Cours AMS-TA00

Edition 2016-2017

Introduction à la théorie spectrale

Marc Lenoir

ENSTA UMA
828 Boulevard des Maréchaux
91762 Palaiseau CEDEX

Table des matières

Chapitre 1

Formulations faibles

L'objectif que nous poursuivons consiste essentiellement à appliquer la théorie spectrale à l'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles. Nous allons développer deux points de vue complémentaires à cet égard, le premier ressortit aux formulations variationnelles et le second aux opérateurs non bornés.

L'étude d'une équation aux dérivées partielles elliptique telle

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\partial\Omega$ sa frontière, nécessite trois ingrédients : le théorème **1.2** qui nous garantit le caractère bien posé de certains problèmes variationnels abstraits, la formule de Green qui assure le passage d'une équation concrète du type (1.1) à un problème abstrait tel (1.3), enfin les espaces de Sobolev qui forment le cadre fonctionnel de cette analyse.

1.1 Le théorème de Lax-Milgram

DÉFINITION **1.1** *La forme sesquilinéaire a définie sur l'espace de Hilbert V est dite coercive (ou elliptique) si il existe un nombre $\alpha > 0$, tel que*

$$|a(v,v)| \geq \alpha \|v\|_V^2, \ \forall v \in V. \tag{1.2}$$

THÉORÈME **1.2 (Lax-Milgram)** *Soient V un espace de Hilbert, a et ℓ respectivement une forme sesquilinéaire coercive et une forme antilinéaire continues sur V, alors*

(i) *il existe une solution et une seule u dans V de l'équation*

$$a(u,v) = \langle \ell, v \rangle, \ \forall v \in V. \tag{1.3}$$

(ii) *l'application*

$$V' \xrightarrow{\mathscr{S}} V : \ell \mapsto u,$$

est un isomorphisme, et plus précisément vérifie

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|\ell\|_{V'}, \tag{1.4}$$

où α est la constante d'ellipticité de a.

DÉMONSTRATION.

▹ Résoudre (1.3) revient à démontrer l'existence et l'unicité de u tel que $a(u,\cdot) = \ell$ dans V', c'est précisément dire que $\mathscr{S}$ est bijective. Démontrer (1.4) revient à montrer que $\mathscr{S}$ est continue. Nous étudierons en fait l'application inverse :

$$V \longrightarrow V' : u \mapsto a(u,\cdot)$$

que nous montrerons être un isomorphisme.

▹ Soit $u \in V$, en vertu du théorème de représentation de Riesz, il existe A_u unique dans V, tel que $(A_u\,|\cdot\,) = a(u,\cdot)$, l'application

$$V' \longrightarrow V : (A_u\,|\cdot\,) \mapsto A_u$$

étant une isométrie, puisque

$$\|(A_u\,|\cdot\,)\|_{V'} = \sup_{v\in V,\ v\neq 0} \frac{|(A_u\,|v\,)|}{\|v\|} = \|A_u\|_V\,.$$

Il nous suffira donc de montrer que l'application

$$V \xrightarrow{A} V : u \mapsto A_u,$$

trivialement linéaire, est elle-même un isomorphisme. Désormais nous remplacerons la notation A_u par Au, plus usuelle.

▹ L'application A est continue, en vertu de l'inégalité

$$\|Au\| = \sup_{v\in V,\ v\neq 0} \frac{|(Au\,|v\,)|}{\|v\|} = \sup_{v\in V,\ v\neq 0} \frac{|a(u,v)|}{\|v\|} \leq \|a\|\,\|u\|\,,$$

où

$$\|a\| = \sup_{u,v\in V}\ \sup_{u,v\in V,\ u,v\neq 0} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|}.$$

▹ La coercivité de a implique de plus $\alpha\,\|v\|^2 \leq |(Av\,|v\,)| \leq \|Av\|\,\|v\|$, soit

$$\|v\| \leq \frac{1}{\alpha}\,\|Av\|\,,\ \forall v \in V. \tag{1.5}$$

On a ainsi montré que A est injective.

▹ Montrons que son image $\mathscr{R}(A)$ est fermée. Soit donc $w_n \in \mathscr{R}(A)$, qui converge, soit vers w. Par hypothèse, $\exists u_n$ tel que $w_n = Au_n$. Nous devons montrer que $w \in \mathscr{R}(A)$, c'est-à-dire qu'il existe u tel que $w = Au$. La suite w_n étant convergente est de Cauchy, soit $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$, tel que $m,n > N \Longrightarrow \|w_m - w_n\| \leq \varepsilon$. Selon (1.5),

$$\|u_m - u_n\| \leq \frac{1}{\alpha}\,\|A(u_m - u_n)\| = \frac{1}{\alpha}\,\|w_m - w_n\| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha},$$

ce qui prouve que u_n est de Cauchy, et converge par conséquent, soit vers u. Comme A est continue, on aura

$$w = \lim w_n = \lim Au_n = Au.$$

▹ Un raisonnement par l'absurde permet ensuite de montrer que A est surjective. Supposons que $\mathscr{R}(A) \subsetneq V$, alors il existe $u_0 \in V \setminus \mathscr{R}(A)$, non nul. $\mathscr{R}(A)$ étant fermé, selon le théorème de projection, on peut y projeter u_0. Soit $v_0 \in \mathscr{R}(A)$ cette projection, et $w_0 = u_0 - v_0$; w_0 est non nul et orthogonal à $\mathscr{R}(A)$, il en résulte que

$$\alpha\,\|w_0\|^2 \leq |a(w_0,w_0)| = |(Aw_0\,|w_0\,)| = 0,$$

ce qui conduit à une contradiction. L'application A est donc bijective, d'inverse A^{-1} continu, d'après (1.5) :

$$\left\|A^{-1}w\right\| \leq \frac{1}{\alpha}\,\|w\|\,,\ \forall w \in V.$$

▹ La formule (1.4) enfin n'est qu'une autre façon d'écrire (1.5) :

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\,\|Au\|_V = \|a(u,\cdot)\|_{V'} = \|\ell\|_{V'}\,.$$

Q.E.D.

Notons que le théorème des homomorphismes de Banach nous montre qu'une application linéaire continue bijective est d'inverse continu ; nous n'avons pas eu matière à l'utiliser ici grâce à l'inégalité (1.5), mais dans des situations plus délicates, il nous sera d'un grand secours.

1.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev constituent une échelle de régularité bien adaptée aux formulations variationnelles. Leur étude constitue cependant un vaste domaine non dépourvu de difficultés techniques ; en particulier la régularité du bord peut jouer un rôle déterminant pour la plupart des résultats : régularité, densité ou compacité. Nous nous contenterons de signaler sans démonstration quelques propriétés des espaces construits à partir de L^2, et nous choisirons les ouverts assez réguliers pour éviter les subtilités principales. On notera Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont le bord est 'suffisamment régulier'. Cette expression volontairement imprécise permet de ranger dans la même catégorie des hypothèses techniques différentes, il suffit souvent de savoir qu'un ouvert dont le bord est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et présente d'éventuels sommets ou arêtes, mais pas de rebroussement fait partie de cette catégorie.

Définition **1.3**

(i) Espaces d'indice entier : *on pose*

$$H^\ell(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha, |\alpha| \leq \ell \right\}, \tag{1.6}$$

où ℓ est un entier positif. Cet espace est muni de la norme du graphe, soit

$$\|v\|^2_{H^\ell(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq \ell} \|\partial^\alpha v\|^2_{L^2(\mathscr{O})}. \tag{1.7}$$

(ii) Espaces d'indice fractionnaire : *on note*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \left(1 + \|\xi\|^2\right)^{s/2} \hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}, \tag{1.8}$$

où s est un réel positif et $\hat{v}$ note la transformée de Fourier de v. Cet espace est muni de la norme naturelle :

$$\|v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left\| \left(1 + \|\xi\|^2\right)^{s/2} \hat{v}(\xi) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.9}$$

(iii) Dans le cas d'un ouvert, *on pose*

$$H^s(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \exists \widetilde{v} \in H^s(\mathbb{R}^n),\ \widetilde{v}_{|\Omega} = v \right\}. \tag{1.10}$$

On munit cet espace de la norme quotient :

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{\widetilde{v} \in H^s(\mathbb{R}^n),\ \widetilde{v}_{|\Omega} = v} \|\widetilde{v}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.11}$$

ou de la norme équivalente suivante :

$$\|v\|^2_{H^s(\Omega)} = \|v\|^2_{H^\ell(\Omega)} + \int_{\mathscr{O}\times\mathscr{O}} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{2\delta+n}} dx\, dy, \tag{1.12}$$

où ℓ est la partie entière de s et $\delta = s - \ell$.

Remarque **1.4**

(i) *Les espaces définis ci-dessus sont en fait des espaces de Hilbert, pour le produit scalaire naturel dérivant de celui de* L^2.

(ii) *Dans ces définitions tant les dérivées que la transformation de Fourier doivent être comprises* au sens des distributions ; *ce n'est que dans le cas d'une régularité suffisante qu'elles peuvent l'être au sens des fonctions, les deux acceptions se correspondant alors bien entendu.*

Bien d'autres espaces de cette nature peuvent être définis, et nous aurons l'occasion d'en rencontrer ultérieurement, contentons-nous pour l'instant d'introduire

$$H^1(\Omega;\Delta) = \left\{ v \in H^2(\Omega) \,\middle|\, \Delta v \in L^2(\Omega) \right\},$$

il sera muni de la norme du graphe :

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega;\Delta)} = \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.13}$$

1.2.1 Régularité

Les espaces que nous venons de définir peuvent paraître quelque peu abstraits, les théorèmes de régularité suivants permettent de s'en faire une image plus précise :

LEMME **1.5 (Inégalité d'interpolation)** *Si* $h \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, *avec* $1 \le p \le q \le \infty$, *alors,* $\forall r \in [p,q]$, $h \in L^r(\Omega)$ *et*

$$\|h\|_{L^r} \le \|h\|^{\alpha}_{L^p} \, \|h\|^{1-\alpha}_{L^q}, \text{ où } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q},\ 0 \le \alpha \le 1. \tag{1.14}$$

DÉMONSTRATION. On aura $|h|^r = |h|^{\alpha r}\,|h|^{(1-\alpha)r}$, et si nous posons $s = p/\alpha r$ et $s' = p/(1-\alpha)r$ nous aurons $|h|^{\alpha r} \in L^s$, $|h|^{(1-\alpha)r} \in L^{s'}$, avec $1/s + 1/s' = 1$. En vertu de l'inégalité de Hölder, on aura alors $h \in L^r$, avec

$$\|h\|^r_{L^r} \le \||h|^{\alpha r}\|_{L^s} \left\||h|^{(1-\alpha)r}\right\|_{L^{s'}} = \|h\|^{p/s}_{L^p} \, \|h\|^{q/s'}_{L^q}$$

soit

$$\|h\|_{L^r} \le \|h\|^{p/rs}_{L^p} \, \|h\|^{q/rs'}_{L^q} = \|h\|^{\alpha}_{L^p} \, \|h\|^{1-\alpha}_{L^q}.$$

Q.E.D.

THÉORÈME **1.6 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg, Morrey)** *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *'suffisamment régulier'*

(i) *Si* $m/n < 2$ *alors*

$$H^m(\Omega) \underset{\to}{\subseteq} L^q(\Omega)\ \forall q,\ \text{tel que } 1/2 \ge 1/q \ge 1/2 - m/n \tag{1.15}$$

(ii) *Si* $m/n = 2$ *alors*

$$H^m(\Omega) \underset{\to}{\subseteq} L^q(\Omega)\ \forall q,\ \text{tel que } 1/2 \ge 1/q > 0 \tag{1.16}$$

(iii) *Si* $m/n > 2$ *alors*

$$H^m(\Omega) \underset{\to}{\subseteq} L^q(\Omega)\ \forall q,\ \text{tel que } 1/2 \ge 1/q \ge 0 \tag{1.17}$$

THÉORÈME **1.7 (Théorème d'inclusion de Sobolev)** *Si* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *suffisamment régulier', alors l'inclusion suivante est valable (algébriquement et topologiquement) :*

$$H^s(\Omega) \underset{\to}{\subseteq} \mathscr{C}^k_c(\overline{\Omega}),\ \forall s > k + \frac{n}{2}, \tag{1.18}$$

où $\mathscr{C}^k_c$ *est l'espace des traces sur* Ω *des fonctions k fois dérivables sur* $\mathbb{R}^n$ *muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des dérivées jusqu'à l'ordre* k.

REMARQUE **1.8** *Notons par exemple qu'en dimension un, le théorème d'inclusion de Sobolev affirme que les fonctions de* $H^s(\Omega)$ *sont continues pour* $s > 1/2$, *dérivables pour* $s > 3/2, \ldots$

1.2.2 Théorèmes de densité et de trace

Les fonctions composant les espaces de Sobolev n'étant pas nécessairement régulières, il est fréquemment utile de les approcher par des fonctions plus régulières. La démonstration de la formule de Green par exemple se réalise en deux temps : on commence par la démontrer pour des fonctions indéfiniment dérivables, puis on montre par densité et continuité qu'elle reste valable pour les fonctions de H^1.

THÉORÈME **1.9 (Théorème de densité)** *Si Ω est un ouvert 'suffisamment régulier', alors $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^s(\Omega)$, $\forall s \geq 0$, où $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des traces sur Ω des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur $\mathbb{R}^n$.*

DÉFINITION **1.10** *On note $\mathscr{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions à support compact dans l'ouvert Ω, et on pose*

$$H_0^s(\Omega) = \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}, \tag{1.19}$$

(adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$), cet espace étant muni de la topologie induite par $H^s(\Omega)$.

PROPOSITION **1.11** *Pour $s \leq 1/2$ on a $H_0^s(\Omega) = H^s(\mathscr{O})$.*

Les problèmes aux limites nous conduisent naturellement à étudier les espaces formés des traces des fonctions composant les espaces de Sobolev précédemment définis.

1.2.3 Espace des traces

Il est bien connu que l'application trace

$$\gamma_0 : \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$$

se prolonge continûment. Cependant ce prolongement a pour image un sous-espace strict de $L^2(\Gamma)$:

$$H^{1/2}(\Gamma) = \left\{ v \in L^2(\Gamma) \middle| \int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{n+1}} d\gamma_x d\gamma_y < +\infty \right\} \tag{1.20}$$

$$= \left\{ v \in L^2(\Gamma) \middle| \left(1+\|\xi\|^2\right)^{1/4} \hat{v}(\xi) \in L^2(\Gamma) \right\}, \tag{1.21}$$

où n est la dimension de Γ. Quand on munit $H^{1/2}(\Gamma)$ de la norme naturelle :

$$\|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|u\|^2_{L^2(\Gamma)} + \int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+1}} d\gamma_x d\gamma_y,$$

alors la trace γ_0 est continue et surjective : $H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$.

THÉORÈME **1.12 (Théorème de trace)** *Pour $s > 1/2$, et si Ω est assez régulier, alors l'application γ_0 définie sur $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$, qui à une fonction régulière définie sur $\overline{\Omega}$ fait correspondre sa trace sur $\partial\Omega$ se prolonge de façon unique en une application continue surjective*

$$\gamma_0 : H^s(\Omega) \to H^{s-1/2}(\partial\Omega). \tag{1.22}$$

On a de plus

$$\mathscr{N}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega) \cap H^s(\Omega).$$

DÉMONSTRATION. Nous nous contenterons de traiter du cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1} = \{x \,|x_n = 0\}$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ on pose $x = (x', x_n)$.

▹ Pour une fonction $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on aura tout d'abord

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}u\left(\xi', \xi_n\right) d\xi_n &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(\xi \bullet x\right)} u\left(x', x_n\right) dx' dx_n d\xi_n \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\left(\xi' \bullet x'\right)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_n x_n} u\left(x', x_n\right) dx_n d\xi_n dx'\end{aligned}$$

Or avec $w(x_n) = u(x', x_n)$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_n x_n} w(x_n)\, dx_n d\xi_n = \int_{\mathbb{R}} d\xi_n \mathscr{F}w(\xi_n)\, d\xi_n = w(0) = u\left(x', 0\right)$$

et par conséquent avec $v = \gamma_0 u$, soit $v(x') = u(x', 0)$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}u\left(\xi', \xi_n\right) d\xi_n = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\left(\xi' \bullet x'\right)} u\left(x', 0\right) dx' = \mathscr{F}v\left(\xi'\right) \tag{1.23}$$

▹ Si $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on aura donc

$$\left|\mathscr{F}v\left(\xi'\right)\right|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}} \left(1+\|\xi\|^2\right)^{-1/4} \left(1+\|\xi\|^2\right)^{1/4} \mathscr{F}u\left(\xi', \xi_n\right) d\xi_n\right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \left(1+\|\xi\|^2\right)^{-1/2} d\xi_n \int_{\mathbb{R}} \left|\mathscr{F}u\left(\xi', \xi_n\right)\right|^2 d\xi_n$$

et avec $\xi_n = \theta\sqrt{1+\|\xi\|^2}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left(1+\|\xi\|^2\right)^{-1/2} d\xi_n &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\left\|\xi'\right\|^2 + \theta^2\left(1+\left\|\xi'\right\|^2\right)\right)^{-1/2} \sqrt{1+\|\xi\|^2}\, d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\theta^2\right)^{-1/2} d\theta\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} &= \int \sqrt{1+\|\xi\|^2} \left|\mathscr{F}v\left(\xi'\right)\right|^2 d\xi' \qquad (1.24) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(1+\theta^2\right)^{-1/2} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathscr{F}u\left(\xi', \xi_n\right)\right|^2 \left(1+\|\xi\|^2\right) d\xi_n d\xi' = \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}} \left(1+\theta^2\right)^{-1/2} d\theta\end{aligned}$$

Par densité, il en résulte que la trace est continue $H^1(\mathbb{R}^n) \to H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

▹ Il reste à montrer que la trace est surjective : $H^1(\mathbb{R}^n) \to H^{1/2}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$. Soit $v \in H^{1/2}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, la fonction u définie par

$$\mathscr{F}u\left(\xi', \xi_n\right) = \mathscr{F}v\left(\xi'\right)\left(1+\left\|\xi'\right\|^2\right)^{-1/2} \varphi\left(\xi_n\left(1+\left\|\xi'\right\|^2\right)^{-1/2}\right) \tag{1.25}$$

où $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt = 1$ vérifie $\gamma_0 u = v$ et $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

▹ Avec $\xi_n = \theta\sqrt{1+\|\xi'\|^2}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left(1+\|\xi\|^2\right)\left|\mathscr{F}u\left(\xi', \xi_n\right)\right|^2 d\xi_n &= \int_{\mathbb{R}} \left|\mathscr{F}v\left(\xi'\right)\right|^2 \left|\varphi\left(\xi_n\left(1+\left\|\xi'\right\|^2\right)^{-1/2}\right)\right|^2 \frac{1+\|\xi\|^2}{1+\|\xi'\|^2} d\xi_n \\ &\leq \left|\mathscr{F}v\left(\xi'\right)\right|^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\varphi\left(\theta\sqrt{1+\|\xi'\|^2}\left(1+\left\|\xi'\right\|^2\right)^{-1/2}\right)\right|^2 \times \\ &\quad \frac{1+\|\xi'\|^2+\theta^2\left(1+\|\xi'\|^2\right)}{1+\|\xi'\|^2} \sqrt{1+\|\xi'\|^2}\, d\theta \\ &\leq \sqrt{1+\|\xi'\|^2} \left|\mathscr{F}v\left(\xi'\right)\right|^2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi(\theta)|^2 \left(1+\theta^2\right) d\theta\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+\|\xi\|^2\right)\left|\mathscr{F}u\left(\xi',\xi_n\right)\right|^2 d\xi_n d\xi' \leq \int_{\mathbb{R}}|\varphi(\theta)|^2\left(1+\theta^2\right)d\theta\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\sqrt{1+\|\xi'\|^2}\left|\mathscr{F}v\left(\xi'\right)\right|^2 d\xi' \quad (1.26)\\ &\leq \|v\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\int_{\mathbb{R}}|\varphi(\theta)|^2\left(1+\theta^2\right)d\theta\end{aligned}$$

ce qui prouve que $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

▹ Par ailleurs, si v est régulière

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\mathscr{F}u\left(\xi',\xi_n\right)d\xi_n &= \mathscr{F}v\left(\xi'\right)\left(1+\left\|\xi'\right\|^2\right)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\varphi\left(\xi_n\left(1+\left\|\xi'\right\|^2\right)^{-1/2}\right)d\xi_n\\ &= \mathscr{F}v\left(\xi'\right)\left(1+\left\|\xi'\right\|^2\right)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\varphi\left(\theta\left(1+\left\|\xi'\right\|^2\right)^{1/2}\left(1+\left\|\xi'\right\|^2\right)^{-1/2}\right)\left(1+\left\|\xi'\right\|^2\right)^{1/2}d\theta\\ &= \mathscr{F}v\left(\xi'\right)\int_{\mathbb{R}}\varphi(\theta)\,d\theta = \mathscr{F}v\left(\xi'\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\mathscr{F}v\left(\xi'\right) = \int_{\mathbb{R}}\mathscr{F}_{x_n}\mathscr{F}_{x'}u\left(\xi',\xi_n\right)d\xi_n = \mathscr{F}_{x'}u\left(\xi',0\right)$$

ce qui prouve que $v(\xi') = u(\xi',0)$. En vertu de (1.26) il en résulte que si $v_n \to v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, alors $u_n \to u \in H^1(\Omega)$, c'est dire que $v = \gamma_0 u$.

Q.E.D.

Si maintenant on note $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence définie sur $H^1(\Omega)$ par

$$(u\ \mathscr{R}\ v) \Leftrightarrow (\gamma_0 u = \gamma_0 v),$$

on peut munir l'espace $H^1(\Omega)/\mathscr{R}$ de la norme quotient :

$$\left\|\dot{u}\right\|_{H^1(\Omega)/\mathscr{R}} = \inf_{v\in\dot{u}}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (1.27)$$

qui en fait un espace de Banach. Il est clair que γ_0 est bijective : $H^1(\Omega)/\mathscr{R} \to H^{1/2}(\Gamma)$, mais comme

$$\begin{aligned}\|\gamma_0 u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} &= \|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\\ &\leq \|\gamma_0\|\,\|v\|_{H^1(\Omega)},\ \forall v \in \dot{u},\end{aligned}$$

il en résulte qu'elle est continue, et *par le théorème des homomorphismes*, que c'est un isomorphisme.

COROLLAIRE **1.13** *Pour $s > 3/2$, et Ω assez régulière, l'application γ_1 qui à une fonction de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ fait correspondre la trace de sa dérivée normale sur $\partial\Omega$ se prolonge de façon unique en une application continue surjective*

$$\gamma_1 : H^s(\Omega) \to H^{s-3/2}(\partial\Omega), \quad (1.28)$$

si on note $\gamma = (\gamma_0,\gamma_1)$, on a

$$\mathscr{N}(\gamma) = H_0^2(\Omega)\cap H^s(\Omega)$$

1.2.4 Compacité

Nous aurons dans la suite l'occasion d'utiliser maintes fois les résultats de ce paragraphe. Leur démonstration repose sur le théorème d'Ascoli, relatif à la compacité des sous-ensembles de fonctions équicontinues dans l'ensemble des fonctions continues. Comme les espaces que nous considérons ici ne sont pas formés de fonctions continues, nous devrons en passer par une première étape de régularisation.

DÉFINITION **1.14** *La suite $\theta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\theta(x/\varepsilon)$, où la fonction positive $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $B_1(0)$ vérifie $\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x)\,dx = 1$, est appelée approximation de l'identité ou suite régularisante. Notons que* Supp $\chi_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$.

L'existence d'une telle fonction n'est pas tout à fait évidente, mais en fait il n'est pas difficile de montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = e^{1/(\|x\|^2-1)} \text{ pour } \|x\| \leq 1 \text{ et } f(x) = 0 \text{ pour } \|x\| > 1$$

est indéfiniment dérivable et a pour support $B_1(0)$. On prendra alors par exemple

$$\theta(x) = f(x)/\,\|f\|_{L^1}\,.$$

Si Ω est un ouvert, on dit que ω est fortement inclus dans Ω si $\overline{\omega}$ est compact et $\overline{\omega} \subset \Omega$; on notera $\omega \Subset \Omega$.

DÉFINITION **1.15** *On dira que le sous-ensemble $\mathscr{F}$ de $L^2(\Omega)$ est équicontinu, au sens de $L^2(\omega)$ si*

$$\forall \eta > 0,\ \exists \delta,\ \textit{tel que } |h| \leq \delta \Longrightarrow \|\tau_h f - f\|_{L^2(\omega)} \leq \eta,\ \forall f \in \mathscr{F}. \tag{1.29}$$

THÉORÈME **1.16 (Fréchet, Kolmogorov)** *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{F}$ un ensemble de fonctions nulles à l'extérieur de Ω, borné dans $L^2(\Omega)$. Soit $\omega \Subset \Omega$ tel que $d(\omega, \Omega^c) = d > 0$ et $\mathscr{F}$ soit équicontinu dans $L^2(\omega)$, alors $\mathscr{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^2(\omega)$.*

DÉMONSTRATION. Soit θ_ε une approximation de l'identité, posons $f_\varepsilon = f * \theta_\varepsilon$ et $\mathscr{F}^\varepsilon = \{f_\varepsilon\,|f \in \mathscr{F}\}$, où $|\varepsilon| \leq d$, et choisissons $\rho > 0$.

▹ Tout d'abord, on aura

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \theta(\frac{x-y}{\varepsilon}) f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \theta(z) f(x-\varepsilon z)\,dz, \tag{1.30}$$

d'où

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \theta(z)(f(x-\varepsilon z) - f(x))\,dz \\ &= \int_{|z|<1} \theta(z)(\tau_{\varepsilon z} f(x) - f(x))\,dz, \end{aligned}$$

et en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)|^2 \leq \int_{|z|<1} |\theta(z)|^2\,dz \int_{|z|<1} |\tau_{\varepsilon z} f(x) - f(x)|^2\,dz,$$

Par conséquent, selon le théorème de Fubini

$$\|f_\varepsilon - f\|^2_{L^2(\omega)} \leq C\int_\omega dx \int_{|z|<1} |\tau_{\varepsilon z} f(x) - f(x)|^2\,dz = C\int_{|z|<1} \|\tau_{\varepsilon z} f - f\|^2_{L^2(\omega)}\,dz.$$

A l'aide de (1.29), on en déduit que, pour ε suffisamment petit, on aura

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^2(\omega)} \leq \rho,\ \forall f \in \mathscr{F}. \tag{1.31}$$

▹ Montrons alors que $\mathscr{F}^{\varepsilon}_{|\omega}$ est un ensemble borné et équicontinu dans $\mathscr{C}(\overline{\omega})$. Selon (1.30) on aura d'une part

$$|f_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy = C\varepsilon^{-n} \|f\|_{L^1(\Omega)} \leq C'\varepsilon^{-n} \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.32}$$

et d'autre part, comme

$$\left|\theta(\frac{x'-y}{\varepsilon}) - \theta(\frac{x-y}{\varepsilon})\right| \leq \frac{\|x'-x\|}{\varepsilon} \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \|D\theta(z)\|\,,$$

il en résulte que

$$\left|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x')\right| = M\varepsilon^{1-n} \left\|x'-x\right\| \|f\|_{L^1(\Omega)} \leq M'\varepsilon^{1-n} \left\|x'-x\right\| \|f\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

▹ On peut alors appliquer le théorème d'Ascoli à $\mathscr{F}^{\varepsilon}_{|\omega}$, qui se trouve donc être relativement compact dans $\mathscr{C}(\overline{\omega})$,.et à plus forte raison dans $L^2(\omega)$, puisque $\mathscr{C}(\overline{\omega}) \underset{\rightarrow}{\subset} L^2(\omega)$, et que l'image continue d'un compact est compacte. De la compacité relative de $\mathscr{F}^{\varepsilon}_{|\omega}$, il résulte que $\mathscr{F}^{\varepsilon}_{|\omega}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ρ dans $L^2(\omega)$, et de la formule (1.31) que les boules correspondantes de rayon 2ρ recouvrent $\mathscr{F}_{|\omega}$. Comme $L^2(\omega)$ est complet, on en déduit que $\mathscr{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^2(\omega)$.

Q.E.D.

Corollaire **1.17** *Si les hypothèses du théorème 1.16, sont vérifiées* $\forall\ \omega \Subset \Omega$, *et si* $\forall\varepsilon$, $\exists\omega \Subset \Omega$ *tel* $\|f\|_{L^2(\Omega\setminus\omega)} \leq \varepsilon$, $\forall f \in \mathscr{F}$, *alors* $\mathscr{F}$ *est relativement compact dans* $L^2(\Omega)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, choisissons ω tel que $\|f\|_{L^2(\Omega\setminus\omega)} \leq \varepsilon$, $\forall f \in \mathscr{F}$. D'après le théorème 1.16, $\mathscr{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^2(\omega)$, et par conséquent $\mathscr{F}_{|\omega}$ peut être recouvert apr un nombre fini de boules $B_\varepsilon(g_i)$ de rayon ε dans $L^2(\omega)$. Si $\widetilde{g}_i$ note le prolongement de g_i par 0 à l'extérieur de ω, les $B_{2\varepsilon}(\widetilde{g}_i)$ recouvrent alors $\mathscr{F}$. La compacité relative de $\mathscr{F}$ dans $L^2(\Omega)$ en résulte.

Q.E.D.

Lemme **1.18** *Si* $u \in H^1(\Omega)$, *alors,* $\forall\omega \Subset \Omega$, *tel que* $d(\omega,\Omega^c) = d > 0$, $\|\tau_h u - u\|_{L^2(\omega)} \leq \|h\|\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$

Démonstration.

▹ Commençons par le cas où $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, selon la formule de Taylor avec reste intégral, on pourra écrire

$$u(x-h) - u(x) = \int_0^1 (\nabla u(x-th)\,|h)\, dt,$$

et par conséquent $|\tau_h u(x) - u(x)|^2 \leq \|h\|^2 \int_0^1 \|\nabla u(x-th)\|^2\, dt$ d'où, pour h assez petit du moins,

$$\begin{aligned}\|\tau_h u - u\|^2_{L^2(\omega)} &\leq \|h\|^2 \int_0^1 dt \int_\omega \|\nabla u(x-th)\|^2\, dx \\ &\leq \|h\|^2 \int_0^1 dt \int_\Omega \|\nabla u(y)\|^2\, dy = \|h\|^2\, \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

▹ Par ailleurs, on sait que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\Omega)$: si $u \in H^1(\Omega)$, $\exists u_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$. On aura alors $\tau_h u_n \to \tau_h u$, et de l'inégalité $\|\tau_h u_n - u_n\|_{L^2(\omega)} \leq \|h\|\,\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$, on déduit par conséquent le résultat annoncé.

Q.E.D.

THÉORÈME **1.19 (Rellich, Kondrasov)** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ 'suffisamment régulier' alors l'injection suivante est compacte :*

$$H^{m+1}(\Omega) \underset{c}{\subset} H^m(\Omega)\ \forall m \geq 0 \tag{1.33}$$

DÉMONSTRATION.

▹ Commençons par traiter le cas $m = 0$, et notons $\mathscr{F}$ la boule unité de $H^1(\Omega)$, il s'agit de démontrer qu'elle est compacte dans $L^2(\Omega)$; nous utiliserons à cet effet le corollaire 1.17. Soit $\omega \Subset \Omega$, tel que $d(\omega, \Omega^c) = d > 0$.

▹ Choisissons $\varepsilon > 0$, en vertu du théorème d'injection 1.6, $\exists q > 2$ tel que $H^1(\Omega \setminus \omega) \underset{\to}{\subset} L^q(\Omega \setminus \omega)$, et par conséquent, selon l'inégalité de Hölder,

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega\setminus\omega)} \leq \|u\|^2_{L^q(\Omega\setminus\omega)}\ |\Omega \setminus \omega|^{1-2/q}$$

soit

$$\|u\|_{L^2(\Omega\setminus\omega)} \leq \|u\|_{L^q(\Omega\setminus\omega)}\ |\Omega \setminus \omega|^{1/2-1/q} \leq C\ |\Omega \setminus \omega|^{1/2-1/q}.$$

Il est donc possible de choisir ω de telle sorte que $\|u\|_{L^2(\Omega\setminus\omega)} \leq \varepsilon$, $\forall u \in \mathscr{F}$.

▹ Par ailleurs, $\|\tau_h u - u\|_{L^2(\omega)} \leq \|h\|$, en vertu du lemme 1.18, et par conséquent pour $\|h\|$ suffisamment petit, on aura $\|\tau_h u - u\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon/2$, $\forall u \in \mathscr{F}$. La compacité de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ découle alors du corollaire 1.17.

▹ Raisonnons maintenant par récurrence et supposons compacte l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-1}(\Omega)$, selon l'hypothèse, si la suite u_n est bornée dans $H^{m+1}(\Omega)$, on peut en extraire une sous-suite $u_{n'}$ qui converge dans $H^{m-1}(\Omega)$ ainsi que $\nabla u_{n'}$, comme $u_{n'}$ et $\nabla u_{n'}$ sont de cauchy dans $H^{m-1}(\Omega)$, il en est de même de $u_{n'}$ dans $H^m(\Omega)$, et la conclusion en résulte.

Q.E.D.

Plus généralement on démontre que

$$H^s(\Omega) \underset{c}{\subset} H^t(\Omega)\ \forall s > t \geq 0. \tag{1.34}$$

1.2.5 Dualité

On définit également des espaces de Sobolev d'indice négatif par dualité.

DÉFINITION **1.20** *Pour $s \geq 0$, on pose*

$$H^{-s}(\Omega) = \left(H^s_0(\Omega)\right)', \tag{1.35}$$

c'est un espace de distributions que l'on munit de la norme du dual fort :

$$\|f\|_{H^{-s}(\Omega)} = \sup_{v \in H^s_0(\Omega),\ v \neq 0} \frac{|\langle f, v\rangle|}{\|v\|_{H^s(\Omega)}}. \tag{1.36}$$

1.3 La formule de Green

C'est la généralisation à plusieurs dimensions de la formule bien connue d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'v\ = -\int_a^b uv'\ + [uv]_a^b$$

Sous sa forme la plus simple, elle s'écrit :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} uv\, n_i\, d\gamma, \tag{1.37}$$

où n_i est la ième composante de la normale n, *extérieure* à Ω. Bien entendu, il faut indiquer sous quelles conditions de régularité de la frontière $\partial\Omega$, et des fonctions u et v s'applique la formule de Green ; en fait il suffit que les diverses intégrales existent, ainsi que les traces de u et v. Plus précisément il suffit d'imposer

$$u,\ v \in H^1(\Omega),\ \Omega \in \mathscr{C}^{1,1}.$$

1.3.1 Opérateurs du premier ordre

La formule qui précède est susceptible de prendre diverses formes, notons parmi les plus fréquemment employées :

$$\int_\Omega \left(E \cdot \nabla\overline{\psi}\right) = -\int_\Omega \operatorname{div} E\, \overline{\psi} + \int_{\partial\Omega} \left(E \cdot n\, \overline{\psi}\right) d\gamma. \tag{1.38}$$

et

$$\int_\Omega \left(H \cdot \operatorname{rot}\overline{\psi}\right) = \int_\Omega \left(\operatorname{rot} H \cdot \overline{\psi}\right) + \int_{\partial\Omega} \left(H \cdot \left(n \wedge \overline{\psi}\right)\right) d\gamma. \tag{1.39}$$

1.3.2 Opérateurs du second ordre

Si, dans (1.38), on remplace E par $\operatorname{grad}\varphi$, on obtient

$$\int_\Omega \left(\nabla\varphi \cdot \nabla\overline{\psi}\right) = -\int_\Omega \Delta\varphi\, \overline{\psi} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\overline{\psi}\, d\gamma. \tag{1.40}$$

Si, par contre, on remplace ψ par $\operatorname{div} H$, on aboutit à

$$\int_\Omega \left(E \cdot \nabla \operatorname{div}\overline{H}\right) = -\int_\Omega \operatorname{div} E\, \operatorname{div}\overline{H} + \int_{\partial\Omega} \left((E \cdot n)\, \operatorname{div}\overline{H}\right) d\gamma, \tag{1.41}$$

et de même, en remplaçant dans (1.39), H par $\operatorname{rot}\Phi$,

$$\int_\Omega \left(\operatorname{rot}\Phi \cdot \operatorname{rot}\overline{\psi}\right) = \int_\Omega \left((\operatorname{rot}\operatorname{rot}\Phi) \cdot \overline{\psi}\right) + \int_{\partial\Omega} \left(\operatorname{rot}\Phi \cdot \left(n \wedge \overline{\psi}\right)\right) d\gamma. \tag{1.42}$$

1.4 Le problème de Dirichlet

Traitons tout d'abord du *problème de Dirichlet homogène* :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.43}$$

1.4.1 Formulation variationnelle

Nous allons utiliser une fonction auxiliaire v (dite fonction d'essai) et la formule de Green (1.40) pour abaisser l'ordre de dérivation de u. Si nous choisissons $v \in H^1(\Omega)$ et si nous supposons que $u \in H^2(\Omega)$, nous aurons :

$$\int_\Omega -\Delta u\, \overline{v} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \overline{v}) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, \overline{v}\, d\gamma, \tag{1.44}$$

et, par conséquent,

$$\int_\Omega f\bar{v} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \bar{v}) + \int_\Omega u\bar{v} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\bar{v}\, d\gamma;$$

il reste que la condition de Dirichlet homogène n'a pas été prise en compte, elle doit donc subsister comme une contrainte supplémentaire imposée à u. On aboutit ainsi au problème, dit variationnel, suivant :

$$\begin{gathered}\text{Trouver } u \text{ nulle sur } \partial\Omega, \text{telle que } \forall v \text{ nulle sur } \partial\Omega,\\ \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \bar{v}) + \int_\Omega u\bar{v} = \int_\Omega f\bar{v}\,.\end{gathered}$$

Cette formulation manque de précision, on doit en particulier choisir l'espace où doit être cherchée u pour envisager la démonstration d'un théorème d'existence et d'unicité, de sorte que les conditions relatives aux traces aient un sens. Compte tenu de la formulation que nous venons d'obtenir et du théorème de trace **1.12** nous choisirons de chercher $u \in H_0^1(\Omega)$, et d'y faire varier v. On aboutit ainsi au problème

$$\begin{gathered}\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega), \text{ telle que } \forall v \in H_0^1(\Omega),\\ \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \bar{v}) + \int_\Omega u\bar{v} = \int_\Omega f\bar{v}\,,\end{gathered} \tag{1.45}$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

1.4.2 Existence et unicité

Notre théorème de base sera le théorème de Lax-Milgram **1.2** dans lequel nous poserons $V = H_0^1(\Omega)$,

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \bar{v}) + \int_\Omega u\bar{v} \text{ et } \ell(v) = \int_\Omega f\bar{v}\,.$$

La continuité de a et ℓ est évidente, ainsi que l'ellipticité de a. Le théorème de Lax-Milgram **1.2** nous assure alors que le problème (1.45) est *bien posé,* c'est-à-dire que sa solution existe, est unique et dépend continûment de la donnée, puisque $\|\ell\|_{V'} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

1.4.3 Retour au problème fort

La question qui subsiste est celle du lien entre les problèmes (1.43) et (1.45). Il est tout à fait clair que si u est solution de (1.43) elle l'est de (1.45) ; réciproquement si u est solution du problème variationnel (1.45), alors pour $v \in \mathscr{D}(\Omega)$ on a

$$\langle -\Delta u + u - f, \bar{v}\rangle_{\mathscr{D}'(\Omega),\mathscr{D}(\Omega)} = 0,$$

soit

$$-\Delta u + u = f \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega). \tag{1.46}$$

D'autre part $u \in H_0^1(\Omega)$ peut, en vertu du théorème **1.12**, s'interpréter comme signifiant $u_{|\partial\Omega} = 0$, au sens précis suivant :

$$\gamma_0(u) = 0. \tag{1.47}$$

On a donc montré que u est solution du problème fort (1.43), en un sens quelque peu généralisé.

1.4.4 Le problème non-homogène

Nous n'avons traité que du cas d'une trace nulle, supposons qu'il n'en soit plus ainsi :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.48}$$

Si $u \in H^1(\Omega)$, alors en vertu du théorème de trace **1.12**, $u_{|\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$; réciproquement, si on suppose que $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, d'après ce même théorème de trace, il existe $U \in H^1(\Omega)$, telle que $U_{|\partial\Omega} = g$, U est appelé *relèvement* de g dans $H^1(\Omega)$. Comme u est solution de (1.46) il en résulte que $u' = u - U$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u' + u' = f + \Delta U - U \text{dans } \Omega \\ u' = 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.49}$$

soit encore, sous forme variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u' \in H_0^1(\Omega), \text{ telle que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ a(u', v) = \ell'(v), \text{ avec } \ell'(v) = \displaystyle\int_\Omega f\overline{v} - \int_\Omega (\nabla U \cdot \nabla \overline{v}) - \int_\Omega U\overline{v}\ , \end{cases} \tag{1.50}$$

problème tout à fait semblable à (1.45).

1.4.5 L'inégalité de Poincaré-Friedrichs

Le problème suivant est plus difficile, mais mérite d'être étudié car il est fréquent en mécanique des fluides ou en électrostatique :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.51}$$

La difficulté est relative à la démonstration de l'ellipticité sur $H_0^1(\Omega)$ de la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \overline{v})\ , \tag{1.52}$$

dont découleront l'existence et l'unicité de la solution u de (1.51). Nous utiliserons le théorème suivant :

THÉORÈME **1.21 (Poincaré-Friedrichs)** *Si Ω est un ouvert borné connexe et Γ une partie de son bord, de mesure non nulle, alors*

$$\exists K > 0,\ \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq K \left\{ \int_\Omega \|\nabla v\|^2 + \left| \int_{\partial\Omega} v\, d\gamma \right|^2 \right\},\ \forall v \in H^1(\Omega). \tag{1.53}$$

DÉMONSTRATION. On effectue un raisonnement par l'absurde

▹ Admettons que l'inégalité annoncée soit fausse, on en déduit l'existence d'une suite dans $H^1(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{H^1(\Omega)} &= 1, \text{ et} \\ [v_n] &\leq \frac{1}{n}, \end{aligned} \tag{1.54}$$

avec

$$[v_n]^2 = \int_\Omega^2 \|\nabla v_n\|\ + \left| \int_{\partial\Omega} v_n\, d\gamma \right|^2.$$

A l'aide du Théorème de compacité de Rellich **1.19**, et d'après (1.54), on peut extraire de v_n une sous-suite, encore notée v_n qui converge, soit vers v dans $L^2(\Omega)$.

▹ En vertu de (1.54), la suite ∇v_n est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$; il en est de même de v_n d'après l'item qui précède, et par conséquent v_n est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, elle y converge donc vers v.

▹ D'après (1.54), la fonction v vérifie $\nabla v = 0$, c'est donc une constante, mais également $\int_\Gamma v\, d\gamma = 0$, par continuité de la trace $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$. On en déduit que $v = 0$, ce qui constitue une contradiction avec (1.53).

Q.E.D.

REMARQUE **1.22** *Dans le théorème qui précède, le terme $\int_{\partial\Omega} v\, d\gamma$ peut être remplacé par de nombreux autres, par exemple $\int_\Delta v$ où Δ est un ouvert de mesure non nulle inclus dans Ω. L'essentiel est la continuité de ce terme vis-à-vis de la topologie de $H^1(\Omega)$ et le fait que $[v]$ reste une norme.*

Démontrons maintenant l'ellipticité de la forme bilinéaire (1.52) : on aura en effet pour $u \in H^1_0(\Omega)$,

$$a(u,u) = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 + \left|\int_{\partial\Omega} u\, d\gamma\right|^2 \geq \frac{1}{K}\, \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

1.5 Le problème de Neumann

1.5.1 Dualité et dérivées normales

Dans le cas où $u \in H^2(\Omega)$, nous avons vu que la dérivée normale $\gamma_1 : H^2(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ est une application continue, mais *elle ne se prolonge pas* à $H^1(\Omega)$. Soyons donc moins exigeants et étudions $\partial u/\partial n$ par l'intermédiaire de la forme linéaire

$$w \in H^{1/2}(\Gamma) \to \int_\Gamma w \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma, \tag{1.55}$$

soit en fait *la distribution $\partial u/\partial n$*. Il est facile de montrer que cette application est continue, en effet, si v est un relèvement de w dans $H^1(\Omega)$, on aura, d'après la formule de Green

$$\int_\Omega \Delta u v = -\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} w d\gamma, \tag{1.56}$$

et par conséquent, $\forall v \in H^1(\Omega)$ tel que $v_{|\Gamma} = w$,

$$\begin{aligned} \left|\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} w d\gamma\right| &\leq \left|\int_\Omega \Delta u v\right| + \left|\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v)\right| \\ &\leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\,, \end{aligned} \tag{1.57}$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned} \left|\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} w d\gamma\right| &\leq \inf_{v \in H^1(\Omega),\, v_{|\Gamma} = w} \left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq \left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\right) \|v\|_{H^1(\Omega)/\mathscr{R}}\,, \end{aligned} \tag{1.58}$$

et comme l'application relèvement, inverse de γ_0, est continue : $H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)/\mathscr{R}$,

$$\left|\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} w d\gamma\right| \leq C\left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\right) \|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\,. \tag{1.59}$$

Ce que nous avons donc démontré, c'est que pour $u \in H^2(\Omega)$, la forme linéaire

$$w \to \int_\Gamma w \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma,$$

appartient au dual $H^{-1/2}(\Gamma)$ de $H^{1/2}(\Gamma)$. Plus brièvement, on écrit $\partial u / \partial n \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Mais si on note maintenant

$$H^1(\Delta;\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \,\middle|\, \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}, \tag{1.60}$$

muni de la norme naturelle

$$\|u\|_{H^1(\Delta;\Omega)} = \left(\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2},$$

on constate que, selon (1.59)

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)}=1} \left| \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \overline{w} d\gamma \right| \leq C \, \|u\|_{H^1(\Delta;\Omega)} .$$

Il nous suffit donc de démontrer la densité de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Delta;\Omega)$ pour prolonger l'application $u \to \partial u / \partial n$ à $H^1(\Delta;\Omega)$ tout entier :

Proposition **1.23** *$\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Delta;\Omega)$.*

Démonstration. En s'appuyant sur un corollaire du théorème de Hahn-Banach, on va montrer que toute forme linéaire continue sur $H^1(\Delta;\Omega)$ qui s'annule sur $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ s'annule également sur $H^1(\Delta;\Omega)$ tout entier ; la proposition en résultera alors.

▹ Considérons donc une forme linéaire continue ξ sur $H^1(\Delta;\Omega)$, par le théorème de Riesz, il existe un vecteur Ξ de $H^1(\Delta;\Omega)$ tel que pour tout $u \in H^1(\Delta;\Omega)$,

$$\langle \xi, u \rangle_{H^1(\Delta;\Omega)', H^1(\Delta;\Omega)} = (\Xi \,|\, u)_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega \Delta\Xi \, \Delta u.$$

C'est dire qu'il existe une forme linéaire λ continue sur $H^1(\Omega)$ et un élément L de $L^2(\Omega)$ tels que

$$\langle \xi, u \rangle = \langle \lambda, u \rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)} + \int_\Omega L \, \Delta u.$$

▹ Définissons alors la forme linéaire continue $\widetilde{\lambda}$ sur $H^1(\mathbb{R}^n)$ par

$$\left\langle \widetilde{\lambda}, \widetilde{v} \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)', H^1(\mathbb{R}^n)} = \left\langle \lambda, \widetilde{v}_{|\Omega} \right\rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)}, \forall \widetilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^n). \tag{1.61}$$

Comme il existe un prolongement linéaire continu $P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^n)$, on aura

$$\langle \lambda, u \rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)} = \left\langle \widetilde{\lambda}, Pu \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)', H^1(\mathbb{R}^n)}, \forall u \in H^1(), \tag{1.62}$$

et si nous notons $\widetilde{L}$ le prolongement de L par 0 en dehors de Ω,

$$\langle \xi, u \rangle = \left\langle \widetilde{\lambda}, Pu \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)', H^1(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{L} \, \Delta u, \forall u \in H^1(\Delta;).$$

Notons que $H^1(\mathbb{R}^n)'$ est un espace normal de distributions puisque $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, et que d'après (1.61), $\widetilde{\lambda}$ s'annule sur les fonctions dont le support ne rencontre pas Ω, soit encore $\operatorname{Supp} \widetilde{\lambda} \subset \overline{\Omega}$.

▹ Supposons maintenant que ξ s'annule sur $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et choisissons $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, on aura $\widetilde{\varphi}_{|\overline{\Omega}} \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et

$$\begin{aligned}\left\langle \widetilde{\lambda}, P\widetilde{\varphi}_{|\Omega}\right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)',H^1(\mathbb{R}^n)} &= \left\langle \widetilde{\lambda}, \widetilde{\varphi}\right\rangle_{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} + \left\langle \widetilde{\lambda}, P\widetilde{\varphi}_{|\Omega} - \widetilde{\varphi}\right\rangle_{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}\\ &= \left\langle \widetilde{\lambda}, \widetilde{\varphi}\right\rangle_{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

car $\operatorname{Supp}\left(P\widetilde{\varphi}_{|\Omega} - \widetilde{\varphi}\right) \cap \Omega = \varnothing$; par conséquent

$$0 = \left\langle \xi, \widetilde{\varphi}_{|\Omega}\right\rangle = \left\langle \widetilde{\lambda}, \widetilde{\varphi}\right\rangle_{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{L}\,\Delta\widetilde{\varphi}.$$

Il en résulte que $\Delta\widetilde{L} = -\widetilde{\lambda}$ au sens des distributions. Par coercivité, cette équation a une solution dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, c'est en fait la seule qui appartienne à $L^2(\Omega)$, car toute autre en diffère d'un polynôme harmonique, ainsi qu'il est facile de le montrer par transformation de Fourier. On aura donc $\widetilde{L} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, ce qui implique $L \in H^1_0()$.

▹ Plus précisément, nous aurons

$$\left\langle \widetilde{\lambda}, \widetilde{u}\right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)',H^1(\mathbb{R}^n)} = \int (\nabla L \cdot \nabla\widetilde{u}), \forall \widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

En effet pour $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left\langle \widetilde{\lambda}, \widetilde{\varphi}\right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)',H^1(\mathbb{R}^n)} = -\left\langle \Delta\widetilde{L}, \widetilde{\varphi}\right\rangle_{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} = \left\langle \nabla\widetilde{L}, \nabla\widetilde{\varphi}\right\rangle_{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)},$$

soit

$$\left\langle \widetilde{\lambda}, \widetilde{\varphi}\right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)',H^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\nabla\widetilde{L} \cdot \nabla\widetilde{\varphi}\right) = \int (\nabla L \cdot \nabla\widetilde{\varphi}),$$

dont découle la formule ci-dessus, par densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

▹ Nous aurons donc $\forall u \in H^1(\Delta;)$,

$$\langle \xi, u\rangle = \int (\nabla L \cdot \nabla u) + \int L\,\Delta u.$$

Mais si $L_m \in \mathscr{D}()$, alors

$$\int (\nabla L_m \cdot \nabla u) + \int L_m \Delta u = 0,$$

dont il résulte que $\langle \xi, u\rangle = 0$, par densité de $\mathscr{D}()$ dans $H^1_0()$.

Q.E.D.

Nous en déduisons la proposition suivante :

PROPOSITION **1.24** *L'application* $\gamma_1 : u \in H^2(\Omega) \to \partial u/\partial n \in H^{1/2}(\Gamma)$ *se prolonge de façon unique en une application continue :* $H^1(\Delta;\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$.

1.5.2 Formule de Green

Ce prolongement peut être explicité : par densité de $\mathscr{D}()$ dans $H^1(\Delta;)$, on déduit de (1.56) la formule de Green suivante, qui fournit une expression concrète de la dérivée normale γ_1 (1.56)

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, v_{|\Gamma}\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)} = \int_\Omega \Delta u v + \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v),\ \forall u \in H^1(\Delta;\Omega),\ \forall v \in H^1(\Omega). \tag{1.63}$$

On peut alors étudier le problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega.\end{cases} \tag{1.64}$$

1.5.3 Formulation variationnelle

Si on suppose que $g \in L^2(\partial\Omega)$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \overline{v}) + \int_\Omega u\overline{v} = \int_\Omega f\,\overline{v} + \int_{\partial\Omega} g\overline{v}\,d\gamma. \end{array}\right. \tag{1.65}$$

Le théorème de Lax-Milgram s'applique alors, faisant de 1.65 un problème bien posé.

1.5.4 Retour au problème fort

Si on choisit, dans un premier temps de considérer uniquement des fonctions test dans $\mathscr{D}(\Omega)$, comme dans le cas du problème de Dirichlet, on montre aisément que u vérifie $-\Delta u + u = f$. L'interprétation de la condition de Neumann est plus difficile, elle nécessite de faire appel à l'espace $H^1(\Omega;\Delta)$.

PROPOSITION **1.25** *Si u est solution du problème variationnel (1.65), où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\mathscr{O})$, alors* au sens du prolongement précédent, *on a $\partial u/\partial n_{|\partial\Omega} = g$.*

DÉMONSTRATION. On a déjà remarqué que u vérifie $\Delta u = u - f$, et par conséquent $u \in H^1(\Omega;\Delta)$. On pourra donc écrire

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \overline{v}) + \int_\Omega u\overline{v} = \int_\Omega (-\Delta u + u)\overline{v} + \int_{\partial\Omega} g\overline{v}\,d\gamma,$$

soit

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \overline{v}) + \int_\Omega \Delta u\overline{v} = \int_{\partial\Omega} g\overline{v}\,d\gamma,$$

et par conséquent, d'après (1.63), $\partial u/\partial n = g$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Q.E.D.

1.5.5 Le problème de Neumann pur

Si on tente de traiter le problème

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1.66}$$

une difficulté supplémentaire se présente : le problème ne peut admettre une unique solution, en effet si u en est solution, alors $u + C$ l'est encore quelle que soit la constante C. De plus une condition de compatibilité doit être imposée à f et g pour garantir l'existence d'une solution : d'après la formule de Green (1.40), on a nécessairement

$$\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g\,d\gamma = 0. \tag{1.67}$$

Nous sommes donc conduits à montrer que (1.66) est bien posé dans un espace de fonctions définies *à une constante additive près* ; à cet effet on pose

$$\begin{aligned} H^1(\Omega)/\mathbb{R} &= \left\{\dot{v} \,\middle|\, v \in H^1(\Omega)\right\}, \text{ où} \\ \dot{v} &= \left\{w \in H^1(\Omega) \,|\, w - v = \text{Cte}\right\} \end{aligned} \tag{1.68}$$

L'espace $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ est un espace de Hilbert pour la norme quotient :

$$\left\|\dot{v}\right\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{w\in\dot{v}} \|w\|_{H^1(\Omega)} \tag{1.69}$$

Si nous supposons que (1.67) est vérifié par les données f et g, alors on peut donner de (1.66) la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } \dot{u} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tel que } \forall \dot{v} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}, \\ a(\dot{u},\dot{v}) = \ell(\dot{v}), \text{ avec} \end{array}\right. \tag{1.70}$$

$$\begin{aligned} a(\dot{u},\dot{v}) &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \overline{v}) \;\; \forall u \in \dot{u},\; \forall v \in \dot{v} \\ \ell(\dot{v}) &= \int_\Omega f\overline{v} + \int_{\partial\Omega} g\overline{v}\,d\gamma,\; \forall v \in \dot{v}, \end{aligned}$$

ces définitions étant indépendantes des représentants u et v choisis. Ce problème est bien posé en vertu du Théorème de Lax-Milgram 1.2, car a est elliptique sur $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$: on a en effet, d'après l'inégalité de Poincaré-Friedrichs 1.53

$$\begin{aligned} a(\dot{u},\dot{u}) &= \int_\Omega \|\nabla \dot{u}\|^2 \\ &= \inf_{u\in\dot{u}} \left\{ \int_\Omega^2 \|\nabla u\|^2 + \mod \int_{\partial\Omega} u\,d\gamma^2 \right\} \\ &\geq \frac{1}{K}\,\|\dot{u}\|^2_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Chapitre 2

Théorie spectrale des opérateurs compacts

2.1 Introduction aux espaces de Hilbert

DÉFINITION **2.1** *Un espace vectoriel H muni d'un produit hermitien $(u\,|\,v)_H$ est appelé espace de Hilbert s'il est complet (i.e. toute suite de Cauchy converge) pour la norme $\|u\|_H$ dérivant de ce produit scalaire.*

Par la suite, quand le contexte le rend possible, nous omettrons d'indiquer l'espace dans lequel sont calculés la norme et le produit scalaire. Rappelons tout d'abord quelques résultats classiques :

THÉORÈME **2.2 (de projection)** *Si F est un sous-ensemble convexe fermé de H, alors pour tout $z \in H$, il existe un unique $\mathscr{P}z \in F$ qui réalise $d(z,F) = \inf_{y\in F}\{\|y - z\|\}$. L'élément $\mathscr{P}z$ est appelé projection de z sur F.*

DÉMONSTRATION.

▹ Posons $d = d(z,F)$ et notons x_n une suite minimisante dans F, c'est-à-dire vérifiant $\|x_n - z\| \to d$. On aura $(x_n + x_m)/2 \in F$, et par conséquent $\|x_n + x_m - 2z\|^2 \geq 4d^2$; d'après l'égalité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \tag{2.1}$$

on aura

$$\|x_n + x_m - 2z\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2\left(\|x_n - z\|^2 + \|x_m - z\|^2\right),$$

il en résulte que x_n est de Cauchy, et par conséquent converge vers un élément de F, soit $\mathscr{P}z$, avec $d = \|\mathscr{P}z - z\|$.

▹ Si y note un autre élément de F réalisant le minimum de $\|y - z\|$, le raisonnement précédent montre que la suite $x, y, x, y, \ldots$ converge ; l'unicité en découle.

Q.E.D.

COROLLAIRE **2.3** *Si V est un sous-espace fermé strict de l'espace de Hilbert H, alors il existe y unitaire dans H tel que $d(y,V) = 1$.*

DÉMONSTRATION. Si on note z un vecteur de H n'appartenant pas à V et $\mathscr{P}$ la projection sur V, il suffit de poser

$$y = \frac{z - \mathscr{P}z}{\|z - \mathscr{P}z\|}.$$

Q.E.D.

DÉFINITION **2.4** *L'opérateur linéaire $T : H_1 \longrightarrow H_2$ est dit borné si la quantité suivante, appelée alors norme de T, est finie :*

$$\|T\| = \sup_{x \in H_1} \frac{\|Tx\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}} \tag{2.2}$$

LEMME **2.5**

(i) *On a également*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_{H_1}=1} \|Tx\|_{H_2} \tag{2.3}$$

(ii) *Un opérateur linéaire est continu si et seulement si il est borné.*

DÉMONSTRATION.

▹ On a tout d'abord clairement $\|T\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$; réciproquement si $x \in H$, on pose $y = x / \|x\|$ et on aura $\|y\| = 1$ et $\|Tx\| / \|x\| = \|Ty\|$. Il en résulte que $\|T\| \leq \sup_{\|y\|=1} \|Ty\|$.

▹ Si T est continu en 0, alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta,\ \|x\| < \eta \Rightarrow \|Tx\| < \varepsilon$; on en déduit que $\|Ty\| < \varepsilon/\eta,\ \forall y$ vérifiant $\|y\| = 1$.

▹ Réciproquement, si T est borné, alors $\|T(x-y)\| \leq \|T\| \, \|x-y\|$, et par conséquent T est continue en y avec $\eta = \varepsilon \|T\|$.

Q.E.D.

DÉFINITION **2.6** *Soit T un opérateur linéaire borné : $H_1 \longrightarrow H_2$, on appelle*

(i) *noyau de T : $\mathcal{N}(T) = \{x \in H \,|\, Tx = 0\}$*

(ii) *image de T : $\mathcal{R}(T) = \{y \in H \,|\, \exists x \in H,\ y = Tx\}$*

REMARQUE **2.7** *Le sous-espace $\mathcal{N}(T)$ est fermé en tant que image réciproque de $\{0\}$ par un opérateur continu.*

DÉFINITION **2.8** *Si E est un sous-ensemble de H, on appelle orthogonal de E et on note $E^\perp$ l'ensemble des éléments de H orthogonaux à tout élément de E.*

COROLLAIRE **2.9 (complémentaire orthogonal)** *Si M est un sous-espace fermé de H, alors $H = M \oplus M^\perp$, c'est-à-dire M et $M^\perp$ sont des sous-espaces fermés dont l'intersection est réduite à $\{0\}$ et qui ont pour somme H.*

DÉMONSTRATION.

▹ Si E est un sous-ensemble de H, alors par linéarité du produit scalaire, $E^\perp$ est un sous-espace de H. De plus il est fermé en tant que intersection des $N_x = \{y \in H \,|(x\,|y = 0)\}$, qui sont eux-mêmes fermés puisque noyaux des applications continues $(x\,|\cdot)$

▹ Si $x \in M \cap M^\perp$ alors $(x\,|x) = 0$, et par conséquent $x = 0$. Enfin si $z \in H$, alors d'après le Théorème **2.2**, on pourra écrire $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 = \mathcal{P}z \in M$ et $z_2 = z - z_1$. Si $y \in M$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors, puisque $\|z_2\| = d(z, M)$,

$$\|z_2\|^2 \leq \|z - z_1 + \lambda y\|^2 = \|z_2 + \lambda y\|^2 = \|z_2\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(\lambda\,(y\,|z_2))$$

et en choisissant $\lambda = -(z_2\,|y) / \|y\|^2$, on obtient

$$0 \leq -\frac{|(y\,|z_2)|^2}{\|y\|^2},$$

ce qui implique $(y\,|z_2) = 0$, soit $z_2 \in M^\perp$.

Q.E.D.

DÉFINITION **2.10** *On appelle dual de H et on note H', l'ensemble des formes linéaires continues sur H. Il est canoniquement muni de la norme suivante qui fait de lui un espace complet :*

$$\|\Lambda\|_{H'} = \sup_{x \in H} \frac{\langle \Lambda, x \rangle_{H',H}}{\|x\|_H}. \tag{2.4}$$

COROLLAIRE **2.11 (Théorème de représentation de Riesz)** *La formule suivante :*

$$\langle \Lambda, x \rangle = (x \,|y\,), \tag{2.5}$$

définit une isométrie antilinéaire $y \mapsto \Lambda : H \longrightarrow H'$.

DÉMONSTRATION.

▹ La formule (2.5), où y est donné, définit en vertu de l'inégalité de Schwarz un élément de H' tel que $\|\Lambda\|_{H'} \leq \|y\|_H$. Comme de plus

$$\|y\|^2 = (y\,|y\,) = \langle \Lambda, y \rangle \leq \|\Lambda\|\;\|y\|,$$

il en résulte que $\|\Lambda\| = \|y\|$.

▹ Montrons réciproquement que tout élément de H' est de la forme (2.5). Si $\Lambda = 0$, on prend $y = 0$; sinon on note M le noyau de Λ, c'est un sous-espace fermé strict de H, et par conséquent d'après le Corollaire **2.9**, il existe $z \neq 0$ appartenant à $M^\perp$. Comme

$$\langle \Lambda, x \rangle\, z - \langle \Lambda, z \rangle\, x \in M, \;\; \forall x \in H,$$

il en résulte que $\langle \Lambda, x \rangle\, (z\,|z\,) - \langle \Lambda, z \rangle\, (x\,|z\,) = 0$, et par conséquent (2.5) avec $y = z\overline{\langle \Lambda, z \rangle}/\,\|z\|^2$.

Q.E.D.

PROPOSITION **2.12 (Riesz)** *Si H est un espace de Hilbert et si sa boule unité fermée B_H est compacte, alors H est de dimension finie.*

DÉMONSTRATION.

▹ La boule B_H étant compacte, elle peut être recouverte par un ensemble fini de boules ouvertes de rayon $1/2$, dont les centres seront notés x_i, $i = 1, k$. Notons F l'espace vectoriel, de dimension finie, engendré par les x_i; nous montrerons que $H = F$.

▹ Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire, alors $\exists x \in H \setminus F$. Comme F est fermé, car de dimension finie, $\exists \varepsilon > 0$, tel que $B(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset$, et quitte à augmenter ε, $B(x, 2\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Notons y un élément de $B(x, 2\varepsilon) \cap F$ et $z = (x-y)/\,\|x-y\|$; pour tout i on peut écrire $x = y + z\,\|x-y\| = y + x_i\,\|x-y\| + (z-x_i)\,\|x-y\|$, et comme $y + x_i \parallel x - y \parallel \in F$ on aura $\|z-x_i\|\;\|x-y\| > \varepsilon$. Si nous choisissons alors i, comme c'est possible par construction des x_i, tel que $\|z - x_i\| \leq 1/2$, on en déduit que $\|x-y\| > 2\varepsilon$, ce qui constitue une contradiction.

Q.E.D.

Désormais T notera un opérateur linéaire borné sur H.

DÉFINITION **2.13** *On note $S_\lambda = \lambda I - T$, où $\lambda \in \mathbb{C}$, et I note l'identité et on appelle*

(i) *Spectre de T : $\sigma(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; S_\lambda \; n'est\ pas\ un\ automorphisme\ de\ H\right\}$.*

(ii) *Spectre discret de T : $\mathscr{V}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,|\,\mathscr{N}(S_\lambda) \neq \{0\}\}$, les éléments du spectre discret sont appelés* valeurs propres*, ceux de $\mathscr{N}(S_\lambda)$, vecteurs propres associés à λ.*

PROPOSITION **2.14** *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment un système libre.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par récurrence, et admettons que les $x_i,\ i=1,n-1$ associés aux valeurs propres λ_i forment un système libre. Si on admet alors que $x_n=\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i x_i$, on aura $Tx_n=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\mu_i x_i$, d'où

$$\lambda_n\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i x_i=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\mu_i x_i,$$

soit $\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i-\lambda_n)\mu_i x_i=0$, ce qui implique $\mu_i=0,\ i=1,n-1$, et par conséquent $x_n=0$; il s'agit là d'une contradiction. On a donc montré que les $x_i,\ i=1,\ n$ forment un système libre.

Q.E.D.

2.2 Alternative de Fredholm

DÉFINITION **2.15** *On dit que l'opérateur $T:H\longrightarrow H$, est compact si $T(B_H)$ est relativement compacte, c'est encore dire si de toute suite bornée de H on peut extraire une sous-suite dont l'image par T converge.*

REMARQUE **2.16** *Notons que la somme de deux opérateurs compacts, le produit d'un opérateur compact par un scalaire non nul, le produit de deux opérateurs bornés dont l'un est compact, sont compacts.*

LEMME **2.17** *Si T est compact et $\lambda\neq 0$, alors il existe $C>0$ tel que*

$$d(x,\mathcal{N}(S_\lambda))\le C\,\|S_\lambda x\|,\ \forall x\in H.$$

DÉMONSTRATION.

▹ Commençons par remarquer qu'à condition de remplacer T par T/λ, il suffit de démontrer le Lemme pour $\lambda=1$. On se contentera alors de noter S pour S_1.

▹ Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite x_n vérifiant $d(x_n,\mathcal{N}(S))\ge n$, avec $\|Sx_n\|=1$. Posons alors

$$z_n=\frac{x_n-\mathcal{P}(x_n)}{d(x_n,\mathcal{N}(S))},$$

où $\mathcal{P}$ est l'opérateur de projection sur $\mathcal{N}(S)$; on aura $\|z_n\|=1$, et $S(\mathcal{P})(x_n)=0$, et par conséquent

$$\|Sz_n\|=\frac{1}{d(x_n,\mathcal{N}(S))}\le\frac{1}{n}.$$

▹ Comme z_n est bornée, par compacité de T, il existe une sous suite extraite $z_{n'}$ telle que $Tz_{n'}$ converge, soit vers z. On aura $z_{n'}=(T+S)z_{n'}$, par conséquent $z_{n'}$ converge également vers z, dont il résulte que $Sz=0$.

▹ On a donc montré que $z\in\mathcal{N}(S)$, mais comme $z_{n'}\to z$, et $d(z_{n'},\mathcal{N}(S))=\|z_{n'}\|=1$, on aboutit à une contradiction.

Q.E.D.

THÉORÈME **2.18** *Si T est compact et $\lambda\neq 0$, alors*

(i) *$\mathcal{N}(S_\lambda)$ est de dimension finie.*

(ii) *$\mathcal{R}(S_\lambda)$ est fermée.*

DÉMONSTRATION.

▹ On remarque là aussi qu'il suffit de considérer le cas où $\lambda=1$.

▹ Il est tout d'abord clair que $T(\mathcal{N}(S)\cap B_H)=\mathcal{N}(S)\cap B_H$, par conséquent $\mathcal{N}(S)\cap B_H$ est relativement compact dans H, et comme $\mathcal{N}(S)$ est fermé, on en déduit que la boule unité de $\mathcal{N}(S)$ est compacte. En vertu du Lemme **2.12**, on en déduit que $\mathcal{N}(S)$ est de dimension finie.

▹ Soit maintenant $x_n \in H$, supposons que la suite Sx_n converge, soit vers y,
nous allons construire $x \in H$ tel que $y = Sx$, il en résultera que $Sx \in \mathscr{R}(S)$. Posons $z_n = x_n - \mathscr{P}(x_n)$, où $\mathscr{P}$ est comme précédemment l'opérateur de projection sur $\mathscr{N}(S)$. On aura $\|z_n\| = d(x_n, \mathscr{N}(S))$, soit en vertu du Lemme **2.17**, $\|z_n\| \leq C\,\|Sx_n\|$; comme la suite Sx_n converge, on en déduit que $\|z_n\|$ est bornée.

▹ La compacité de T nous permet alors d'affirmer l'existence de la suite $z_{n'}$ extraite de z_n telle que $Tz_{n'}$ converge. Mais $z_{n'} = (T+S)z_{n'} = Tz_{n'} + Sx_{n'}$; il en résulte que $z_{n'}$ possède une limite, soit x, et que $x = Tx + y$, ou encore $y = Sx$.

Q.E.D.

THÉORÈME **2.19** *Si T est compact, les seuls éléments non nuls de son spectre sont ses valeurs propres non nulles.*

DÉMONSTRATION.

▹ Il est tout d'abord clair que toute valeur propre de T appartient à son spectre. Il nous suffira donc de démontrer que si $\lambda \neq 0$ n'est pas valeur propre, alors $\lambda \notin \sigma(T)$, c'est encore dire que si S_λ est injectif, alors il est surjectif et d'inverse continu.

▹ Posons donc $F_n = \mathscr{R}(S_\lambda)^n$, la suite F_n est décroissante au sens large, on va montrer qu'elle est stationnaire au delà d'un certain rang. Au Théorème **2.18** on a montré que chaque F_n est fermé dans F_{n-1} pour la topologie induite ; si on admet que $F_{n+1} \subsetneq F_n, \forall n$, alors, en vertu du Lemme **2.3**, il existe $x_n \in F_n$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $d(x_n, F_{n+1}) = 1$. Choisissons $m < n$, alors $x_n - x_m \in F_m$ et $S_\lambda(x_n - x_m) \in F_{m+1}$. On aura alors

$$Tx_n - Tx_m = (\lambda I - S_\lambda)(x_n - x_m) = -\lambda(x_m - z_m),$$

où

$$z_m = x_n + \frac{1}{\lambda} S_\lambda(x_n - x_m)$$

appartient à F_{m+1}. On en déduit que $\|Tx_n - Tx_m\| \geq$ mod λ, ce qui est incompatible avec la compacité de T.

▹ Montrons maintenant que S_λ est surjective : soit $y \in H$, pour un certain N on aura $(S_\lambda)^N y \in F_N = F_{N+1}$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in H$ tel que $(S_\lambda)^N y = (S_\lambda)^{N+1} x$, soit $\big((S_\lambda)^N x - (S_\lambda)^{N-1} y\big) \in \mathscr{N}(S_\lambda)$. Comme on a supposé que λ n'est pas valeur
propre, on en déduit que $(S_\lambda)^N x = (S_\lambda)^{N-1} y$, soit par récurrence $S_\lambda x = y$; la surjectivité de S_λ en résulte.

▹ Reste à montrer la continuité de $(S_\lambda)^{-1}$, c'est bien sûr une conséquence du théorème des homomorphismes de Banach, mais aussi plus simplement du Lemme **2.17** : soit $y \in H$, posons $x = (S_\lambda)^{-1} y$, on aura

$$\|x\| = d(x,0) = d(x, \mathscr{N}(S_\lambda)) \leq C\,\|S_\lambda x\|,$$

soit $\left\|(S_\lambda)^{-1} y\right\| \leq C\,\|y\|$.

Q.E.D.

COROLLAIRE **2.20 (Alternative de Fredholm)** *Si l'opérateur T est compact, et si $\lambda \neq 0$, alors une et une seule des deux*
propositions suivantes est vérifiée :

(i) *l'équation $(\lambda I - T)x = 0$ admet une solution non nulle*

(ii) *l'équation $(\lambda I - T)x = y$ admet une solution et une seule $\forall y$, et elle en dépend continûment.*

THÉORÈME **2.21** *Si H est de dimension infinie et T est compact sur H, alors*

(i) $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$

(ii) $0 \in \sigma(T)$

(iii) $\sigma(T)\setminus\{0\}$ *est soit*

- ◇ *vide*
- ◇ *formé d'un nombre fini de points*
- ◇ *formé d'un ensemble dénombrable de points s'accumulant en* 0.

REMARQUE **2.22** 0 *peut être valeur propre, mais pas nécessairement, même si la suite des valeurs propres a* 0 *pour point d'accumulation.*

DÉMONSTRATION.

▹ Supposons que mod $\lambda > \|T\|$ et choisissons $f \in H$; résoudre l'équation $S_\lambda = f$ est équivalent à résoudre $\tilde{S}x = x$, avec $\tilde{S}x = (Tx+f)/\lambda$. L'application $\tilde{S}$ est contractante, puisque

$$\left\|\tilde{S}x_1 - \tilde{S}x_2\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \frac{\|T\|}{|\lambda|}\|x_1 - x_2\|\,;$$

on en déduit qu'elle admet un point fixe unique, et par conséquent que λ n'est pas valeur propre de T. Comme $\lambda \neq 0$, il en résulte que $\lambda \notin \sigma(T)$.

▹ Supposons que $0 \notin \sigma(T)$, alors T est inversible. Mais en vertu de la compacite de T, $T(B_H)$ est relativement compacte, et également fermée, en tant que image réciproque de B_H par T^{-1}, continue. Il en résulte que $T(B_H)$ est compacte, et par conséquent B_H, par continuité de T^{-1} ; c'est impossible d'après le Lemme **2.12**.

▹ Soit maintenant λ_n une suite d'éléments tous différents de $\sigma(T)\setminus\{\lambda\}$, convergeant vers λ; on va montrer que nécessairement $\lambda = 0$, c'est dire que 0 est le seul point d'accumulation possible. Les λ_n sont des valeurs propres de T, d'après le Théorème **2.19** ; notons donc x_n un vecteur propre associé à λ_n et $\mathfrak{M}_n$ le sous-espace engendré par la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Les $\mathfrak{M}_n$ sont de dimension finie et par conséquent fermés, ils forment une suite strictement croissante en vertu de la Proposition **2.14** ; le Lemme **2.3** nous montre par conséquent qu'on peut construire une suite de vecteurs unitaires y_n dans $\mathfrak{M}_n$ qui vérifie $d(y_n, \mathfrak{M}_{n-1}) = 1$. Pour $n > m$ on aura

$$\begin{aligned} Ty_n/\lambda_n - Ty_m/\lambda_m &= (\lambda_n y_n - S_{\lambda_n} y_n)/\lambda_n - (\lambda_m y_m - S_{\lambda_m} y_m)/\lambda_m \\ &= y_n - (y_m + S_{\lambda_n} y_n/\lambda_n - S_{\lambda_m} y_m/\lambda_m) = y_n - z_n \end{aligned}$$

où $z_n \in \mathfrak{M}_{n-1}$ puisque $\mathfrak{M}_n$ est croissante et que $\mathfrak{M}_{n-1} = S_{\lambda_n}(\mathfrak{M}_n)$. Donc $\|Ty_n/\lambda_n - Ty_m/\lambda_m\| \geq 1$; ce qui est incompatible avec le fait pour la suite y_n/λ_n d'être bornée, en vertu de la compacité de T. Il en résulte que $\lambda = 0$.

▹ Notons enfin que $\sigma(T)\setminus\,]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est compact, puisque $\sigma(T)$ est borné ; en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, il ne pourra donc contenir qu'un nombre fini de points. On en déduit que l'ensemble $\sigma(T)$ est dénombrable.

Q.E.D.

2.3 L'opérateur adjoint

DÉFINITION **2.23** *Soit T un opérateur borné, la formule*

$$(T^*x\,|\,y) = (x\,|\,Ty) \;\; \forall x, y \in H$$

définit un opérateur linéaire $T^* : H \longrightarrow H$, appelé adjoint de T.

REMARQUE **2.24** *L'opérateur T^* ainsi défini est continu et vérifie $\|T^*\| = \|T\|$.*

PROPOSITION **2.25 (Théorème de Schauder)** *Si T est compact, T^* l'est également.*

DÉMONSTRATION.

▹ Notons A un borné de H, par continuité de T^*, TT^* est compact ; c'est dire que de toute suite x_n dans A, on peut extraire $x_{n'}$ telle que $TT^*x_{n'}$ converge.

▹ Considérons alors la suite $T^*x_{n'}$, elle vérifie

$$\|T^*(x_{m'}-x_{n'})\|^2 = (x_{m'}-x_{n'}\,|\,TT^*(x_{m'}-x_{n'})) \qquad \le \|x_{m'}-x_{n'}\|\;\|TT^*(x_{m'}-x_{n'})\| \le C\,\|TT^*(x_{m'}-x_{n'})\|\,,$$

puisque A est borné. Or $TT^*x_{m'}$ converge, c'est donc une suite de Cauchy, et $T^*x_{m'}$ également ; on en déduit qu'elle converge et par conséquent la compacité de T^*.

Q.E.D.

LEMME **2.26** *La fermeture de l'image de T est l'orthogonal du noyau de son adjoint :*

$$\overline{\mathscr{R}(T)} = \mathscr{N}(T^*)^{\perp}$$

DÉMONSTRATION.

▹ Notons tout d'abord que $\mathscr{N}(T^*)^{\perp}$ est fermé ; en effet

$$\mathscr{N}(T^*)^{\perp} = \bigcap_{x\in\mathscr{N}(T^*)} \{z\,|(z\,|x\,)=0\}\,,$$

et chacun des $\{z\,|(z\,|x\,)=0\}$ est fermé par continuité du produit scalaire.

▹ Pour montrer que $\overline{\mathscr{R}(T)} \subset \mathscr{N}(T^*)^{\perp}$, il suffira donc de montrer que $\mathscr{R}(T)\subset\mathscr{N}(T^*)^{\perp}$. Soit donc $y\in\mathscr{R}(T)$, on aura $y = Tx$, et si $f\in\mathscr{N}(T^*)$,

$$(y\,|f\,) = (Tx\,|f\,) = (x\,|T^*f\,) = 0.$$

C'est dire que $y\in\mathscr{N}(T^*)^{\perp}$.

▹ Réciproquement, soit $y\notin\overline{\mathscr{R}(T)}$, nous devons montrer que $y\notin\mathscr{N}(T^*)^{\perp}$. Notons y_1 la projection orthogonale de y sur $\overline{\mathscr{R}(T)}$, et $y_2 = y - y_1$; on aura

$$0 = (y_2\,|Tx\,) = (T^*y_2\,|x\,)),\ \forall x\in H,$$

on en déduit que $y_2\in\mathscr{N}(T^*)$. Mais

$$(y_2\,|y\,) = (y_2\,|y_1\,) + \|y_2\|^2 = \|y_2\|^2\,,$$

qui n'est pas nul, car $y\notin\overline{\mathscr{R}(T)}$. On en déduit que $y\notin\mathscr{N}(T^*)^{\perp}$.

Q.E.D.

THÉORÈME **2.27** *Si T est compact $H\longrightarrow H$, alors*

(i) $\sigma(T^*) = \bar\sigma(T)$, *où $\bar\sigma(T)$ note le conjugué de $\sigma(T)$.*

(ii) *Si on suppose que $\lambda\in\sigma(T)-\{0\}$, pour que l'équation $S_\lambda x = y$ (respectivement $S^*_\lambda x = y$) admette des solutions, il faut et il suffit que $y\in\mathscr{N}(S^*_\lambda)^{\perp}$ (respectivement $y\in\mathscr{N}(S_\lambda)^{\perp}$).*

REMARQUE **2.28** *Ce théorème apporte une précision au cas* (i) *de l'alternative de Fredholm.*

DÉMONSTRATION.

▹ Notons tout d'abord que $S^*_\lambda = \bar\lambda I - T^*$, en effet

$$((\lambda I - T)^*x\,|y\,) = (x\,|(\lambda I - T)y\,) = \left(\bar\lambda x\,|y\,\right) - (T^*x\,|y\,).$$

▹ Admettons que $\bar\lambda\in\mathscr{V}(T^*)$, nous noterons y un vecteur propre de T^* associé à $\bar\lambda$; y n'étant pas nul et appartenant à $\mathscr{N}(S^*_\lambda)$ n'appartient pas à son orthogonal, et par conséquent, en vertu du Lemme **2.26**, $y\notin\overline{\mathscr{R}\,(S_\lambda)}$. On en déduit que $\lambda\in\sigma(T)$, on a donc montré que $\bar{\mathscr{V}}(T^*)\subset\sigma(T)$. A l'aide des Théorèmes **2.19** et **2.21**, on en déduit que $\bar\sigma(T^*)\subset\sigma(T)$, et comme $(T^*)^* = T$, que $\bar\sigma(T^*) = \sigma(T)$.

▹ Soit $\lambda\in\sigma(T)-\{0\}$, compte tenu du Théorème **2.18**, le Lemme **2.26** nous montre que pour que $y\in\mathscr{R}(S_\lambda)$ il faut et il suffit que $y\in\left(\mathscr{N}(S^*_\lambda)\right)^{\perp}$; la seconde partie du théorème s'en déduit.

Q.E.D.

2.4 Opérateurs auto-adjoints

DÉFINITION **2.29** *On dit que T est auto-adjoint si $T^* = T$.*

LEMME **2.30** *Si T est auto-adjoint, on a*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx\,|x\,)|\,.$$

DÉMONSTRATION.

- ▹ Posons $\alpha = \sup_{\|x\|=1} |(Tx\,|x\,)|$, on aura $\alpha \le \|T\|$.
- ▹ Réciproquement, posons $\mu = (\|Tz\|\,/\,\|z\|)^{1/2}$, et $u = Tz/\mu$. Nous aurons

$$\|Tz\|^2 = (Tz\,|\mu u\,) = (T(\mu z)\,|u\,) = (Tu\,|\mu z\,)\,,$$

soit

$$\begin{aligned}\|Tz\|^2 &= \frac{1}{4}((T(\mu z+u)\,|\mu z+u\,) - (T(\mu z-u)\,|\mu z-u\,))\\ &\le \frac{1}{4}\alpha\left(\|\mu z+u\|^2 + \|\mu z-u\|^2\right)\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\|Tz\|^2 &\le \frac{\alpha}{2}\left(\mu^2\,\|z\|^2 + \|u\|^2\right)\\ &\le \alpha\,\|z\|\,\|Tz\|\,.\end{aligned}$$

On a donc montré que $\|Tz\| \le \alpha\,\|z\|$, $\forall z \in H$, soit $\|T\| \le \alpha$.

Q.E.D.

LEMME **2.31** *Si A est un opérateur borné : $H \longrightarrow H$, qui vérifie*

$$\exists K > 0,\ \|v\|_H \ \le K\,\|Av\|_H\,,\ \forall v \in H, \tag{2.6}$$

alors l'image $\mathscr{R}(A)$ de H par A est un sous-espace fermé de H.

DÉMONSTRATION. On démontrera que $\mathscr{R}(A)$ est égal à son adhérence ; soit donc v_n une suite de H telle que Av_n converge, soit vers w. Nous devons montrer que $w \in \mathscr{R}(A)$; la suite Av_n est de Cauchy, et également la suite v_n en vertu de l'inégalité inverse (2.6), on en déduit qu'elle converge, soit vers u. Par continuité de A on aura $w = Au$, ce qui prouve que $w \in \mathscr{R}(A)$.

Q.E.D.

PROPOSITION **2.32** *Si T est auto-adjoint, on a $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION.

- ▹ Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, nous pouvons écrire

$$\|x\|\,\|S_\lambda x\| \ge |(S_\lambda x\,|x\,)| = \left|\lambda\,\|x\|^2 - (Tx\,|x\,)\right| \ge |\mathfrak{Im}\,\lambda|\,\|x\|^2\,,$$

puisque $(Tx\,|x\,) = (x\,|Tx\,)$ est réel. On en déduit que

$$\|S_\lambda x\| \ge |\mathfrak{Im}\,\lambda|\,\|x\|\,, \tag{2.7}$$

et par conséquent que S_λ est injectif.

- ▹ Remplaçant λ par $\bar\lambda$ on en déduit également que $S_{\bar\lambda}$ est injectif. Mais $\lambda \neq 0$, et par conséquent

$$\mathscr{R}(S_\lambda) = \overline{\mathscr{R}(S_\lambda)} = \mathscr{N}(S_\lambda^*)^\perp = \mathscr{N}(S_{\bar\lambda})^\perp,$$

en vertu des Lemmes **2.31** et **2.26** et de la continuité de S_λ. Il en résulte que S_λ est surjectif, et par conséquent bijectif, l'inverse étant continu d'après l'inégalité (2.7). C'est dire que λ n'appartient pas au spectre.

Q.E.D.

PROPOSITION **2.33** *Si T est auto-adjoint, les sous-espaces propres $\mathcal{N}(S_\lambda)$ associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.*

DÉMONSTRATION. Si $x_i \in N\left(S_{\lambda_i}\right)$ $i = 1,2$, où les λ_i sont des valeurs propres différentes de T, alors, puisque λ_2 est réel, en vertu de la Proposition **2.32**,

$$\lambda_2 (x_1 | x_2) = (x_1 | T x_2) = (T x_1 | x_2) = \lambda_1 (x_1 | x_2)$$

et par conséquent, $(x_1 | x_2) = 0$.

Q.E.D.

LEMME **2.34** *Si T est auto-adjoint, pour que $\lambda \notin \sigma(T)$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$\|S_\lambda x\| \geq C \|x\|, \ \forall x \in H.$$

DÉMONSTRATION.

▹ Il est clair tout d'abord que l'inégalité est vérifiée dès que $\lambda \notin \sigma(T)$.

▹ Supposons réciproquement que l'inégalité soit vérifiée. On a vu à la Proposition **2.32** que si $\lambda \notin \mathbb{R}$ alors $\lambda \notin \sigma(T)$; supposons donc que $\lambda \in \mathbb{R}$. On aura

$$C \|x\| \leq \|S_\lambda x\| = \left\| S^*_{\bar{\lambda}} x \right\| = \left\| S^*_\lambda x \right\|$$

par conséquent, de même qu'à la démonstration de la Proposition **2.32**, S_λ est inversible ; la conclusion en découle.

Q.E.D.

LEMME **2.35** *Si T est auto-adjoint, alors pour que $\lambda \in \sigma(T)$ il faut et il suffit qu'il existe $x_n \in H$, telle que $\|x_n\| = 1$ et $(S_\lambda x_n) \to 0$.*

DÉMONSTRATION.

▹ Supposons que $\lambda \notin \sigma(T)$, et que $(S_\lambda x_n) \to 0$, avec $\|x_n\| = 1$, alors $x_n = S_\lambda^{-1} S_\lambda x_n \to 0$, par continuité de S_λ^{-1}, ce qui est incompatible avec l'hypothèse $\|x_n\| = 1$.

▹ Réciproquement, si $\lambda \in \sigma(T)$, le Lemme **2.34** nous prouve l'existence d'une suite y_n vérifiant $\|S_\lambda y_n\| \leq \|y_n\| / n$; le Lemme est alors démontré en prenant $x_n = y_n / \|y_n\|$.

Q.E.D.

PROPOSITION **2.36** *Si T est auto-adjoint, et si on note*

$$M = \sup_{\|x\|=1} (T x | x) \text{ et } m = \inf_{\|x\|=1} (T x | x),$$

alors M et $m \in \mathbb{R}$ et

(i) $\sigma(T) \subset [m, M]$, *et*

(ii) m et $M \in \sigma(T)$.

DÉMONSTRATION.

▹ Supposons que $\lambda > M$, et démontrons que $\lambda \notin \sigma(T)$, cette même démonstration en remplaçant T par $-T$ permet alors de prouver la première partie de la Proposition. Comme à la Proposition **2.32**, nous aurons

$$\|x\| \, \|S_\lambda x\| \geq |(S_\lambda x | x)| = \left| \lambda \|x\|^2 - (T x | x) \right| \geq (\lambda - M) \|x\|^2,$$

et le Lemme **2.34** permet de conclure.

▹ Montrons maintenant que $M \in \sigma(T)$, démonstration qui montrera également que $m \in \sigma(T)$, en remplaçant T par $-T$. Notons x_n une suite majorante pour $(Tx\,|x\,)$, c'est-à-dire vérifiant

$$\|x_n\| = 1 \qquad\qquad \delta_n \to 0 \qquad\qquad \text{avec } \delta_n = (Tx_n\,|x_n\,) - M.$$

Afin d'utiliser le Lemme **2.35**, calculons $\|(MI-T)x_n\|^2$; pour $\gamma \in \mathbb{R}$, nous aurons

$$\|(MI-T)x_n\|^2 = \|(M+\gamma)x_n - (T+\gamma I)x_n\|^2 \quad = \|(T+\gamma I)x_n\|^2 + (M+\gamma)^2\|x_n\|^2 - 2(M+\gamma)\,\mathfrak{Re}\,\{((T+\gamma I)x_n\,|x_n\,)\}\,.$$

Il est clair que $((T+\gamma I)x_n\,|x_n\,) = M + \gamma + \delta_n$; il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \|(MI-T)x_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|(T+\gamma I)x_n\|^2 - (M+\gamma)^2.$$

▹ On aura par ailleurs, d'après le Lemme **2.30**

$$\|(T+\gamma I)x_n\| \le \|T+\gamma I\| = \sup_{\|x\|=1} \ \operatorname{mod}\,(Tx\,|x\,)+\gamma = \max\{\ \operatorname{mod} M+\gamma,\ \ \operatorname{mod} m+\gamma\}\,.$$

Comme $\operatorname{mod} m \le \|T\|$, on aura $M+\gamma \ge m+\gamma > 0$, dès que γ est choisi tel que $\gamma > \|T\|$, et par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \|(MI-T)x_n\|^2 \le (M+\gamma)^2 - (M+\gamma)^2 = 0.$$

On en déduit que $M \in \sigma(T)$ en vertu du Lemme **2.35**.

Q.E.D.

COROLLAIRE **2.37** *Si T est auto-adjoint, et si $\sigma(T) = \{0\}$, alors $T \equiv 0$.*

DÉMONSTRATION. Si $\sigma(T) = \{0\}$, d'après la Proposition **2.36**, on aura $m = M = 0$, et comme, d'après le Lemme **2.30**, $\|T\| = \max\{\ \operatorname{mod} M,\ \ \operatorname{mod} m\}$, on en déduit que $\|T\| = 0$, soit $T \equiv 0$.

Q.E.D.

DÉFINITION **2.38** *On dit que H est somme directe Hilbertienne de ses sous-espaces E_i, $i = 1, \infty$, si et seulement si*

(i) *les E_i sont fermés, deux à deux orthogonaux et*

(ii) *l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments des E_i est dense dans H.*

On notera

$$H = \widehat{\bigoplus_{i\in\mathbb{N}^*}} E_i.$$

THÉORÈME **2.39** *Si T est auto-adjoint compact : $H \longrightarrow H$, alors H est somme directe Hilbertienne des sous-espaces propres attachés à chacune de ses valeurs propres :*

$$\widehat{\bigoplus_{\lambda\in\mathscr{V}(T)}} \mathscr{N}(S_\lambda).$$

DÉMONSTRATION.

▹ Les $\mathscr{N}(S_\lambda)$ sont bien entendu fermés, quant à l'orthogonalité, elle résulte de la Proposition **2.33**.

▹ Notons maintenant F l'espace engendré par les sommes finies d'éléments des $\mathscr{N}(S_\lambda)$ où $\lambda \in \mathscr{V}(T)$. Nous poserons $G = \bar{F}$, et nous devrons montrer que $G = H$.

▹ Montrons tout d'abord que G et $G^\perp$ sont stables par T. Soit $x \in F$, on aura $x = \sum_{i\in I} x_i$, où I est fini, et par conséquent $Tx = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, où $\lambda_i \in \mathscr{V}(T)$. On en déduit que $Tx \in F$, et par continuité de T, que $T(G) \subset G$. Prenons alors $x \in G^\perp$, et $y \in G$, on aura $Ty \in G$, et donc $(x\,|Ty\,) = 0$, soit $(Tx\,|y\,) = 0$; on en déduit que $Tx \in G^\perp$, soit $T(G^\perp) \subset G^\perp$.

▹ Nous pouvons donc définir la restriction T' de T à $G^\perp$; nous montrerons que $T' = 0$, soit $G^\perp \subset \mathcal{N}(T)$. Soit donc $\mu \in \sigma(T')$, $\mu \neq 0$, c'est une valeur propre de T' d'après le Théorème **2.19**, et par conséquent, il existe $x' \neq 0$, $x' \in G^\perp$, tel que $T'x' = \mu x'$. On en déduit que $\mu \in \sigma(T)$, et que $x' \in \mathcal{N}(S_\mu) \subset G$, et par conséquent $x' \in G \cap G^\perp$; il en résulte que $x' = 0$, ce qui constitue une contradiction. On en déduit que $\sigma(T') = \{0\}$, et par conséquent que $T' \equiv 0$, d'après le Corollaire **2.37**.

▹ Si 0 n'est pas valeur propre de T, alors $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, et par conséquent $G^\perp = \{0\}$, soit $G = H$. Si 0 est valeur propre de T alors $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(S_0)$, et par conséquent $\mathcal{N}(T) \subset G$, ce qui implique encore $G^\perp = \{0\}$, et $G = H$.

Q.E.D.

PROPOSITION **2.40** *Si*

$$H = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*}} E_n,$$

et si on note x_n la projection sur E_n de $x \in H$, alors

(i) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *converge vers x, et*

(ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2$.

DÉMONSTRATION.

▹ Montrons tout d'abord que la série $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2$ converge, et posons $\sigma_k = \sum_{n=1}^k \|x_n\|^2$, on aura

$$\sigma_k = \left(x \,\middle|\, \sum_{n=1}^k x_n \right) \le \|x\| \left\| \sum_{n=1}^k x_n \right\| \le \|x\| \sqrt{\sigma_k},$$

car les x_n sont orthogonaux deux à deux. On en déduit que $\sigma_k \le \|x\|^2$ et que la série $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2$ converge.

▹ On aura $\left\|\sum_{n=p}^q x_n\right\|^2 = \sum_{n=p}^q \|x_n\|^2$, il en résulte que la série $\sum_{n=1}^\infty x_n$ est de Cauchy, et par conséquent qu'elle converge. Si nous notons alors $P(x)$ sa somme, nous aurons

$$\|P(x)\|^2 \le \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2 \le \|x\|^2,$$

dont découle la continuité de P. Mais comme $P(x) = x$ dès que $x \in E_n$, il en résulte que P n'est autre que l'identité sur l'espace des combinaisons linéaires finies des éléments des E_n, et par continuité sur son adhérence H tout entière.

▹ La formule finale s'obtient par passage à la limite à partir de l'identité $\sum_{n=1}^k \|x_n\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^k x_n\right\|^2$.

Q.E.D.

REMARQUE **2.41** *Le Théorème **2.39** et la Proposition **2.40** nous montrent donc qu'on peut construire une base Hilbertienne (orthonormale) $\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ de H, formée de vecteurs propres de l'opérateur auto-adjoint compact T. Pour tout élément $x \in H$, on aura*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (x\,|e_n)\, e_n \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mod (x\,|e_n)^2.$$

De plus les e_n diagonalisent T selon l'expression

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda_n (x\,|e_n)\, e_n,$$

où les λ_n sont les valeurs propres respectivement associées aux e_n.

COROLLAIRE **2.42** *Si T est auto-adjoint compact, c'est la limite d'une suite d'opérateurs auto-adjoints compacts de rangs finis.*

DÉMONSTRATION.

▹ Comme T est compact, nous pouvons ordonner ses valeurs propres λ_k en une suite dont les modules décroissent. Nous notons x_k la projection de x sur $\mathcal{N}\left(S_{\lambda_k}\right)$, et $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

▹ L'opérateur T_n est clairement auto-adjoint, et on a $\dim(\mathscr{R}(T_n)) = \sum_{k=1}^{n} \dim(\mathcal{N}(S_{\lambda_k})) < \infty$, dont découle la compacité de T_n. De plus, d'après la Proposition **2.40**, on a $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, et par continuité de T, $T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. On aura même

$$\|T(x) - T_n(x)\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k x_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \quad \text{mod } \lambda_k^2 \, \|x_k\|^2$$

et donc

$$\|T(x) - T_n(x)\|^2 \leq \quad \text{mod } \lambda_{n+1}^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|^2 \leq \quad \text{mod } \lambda_{n+1}^2 \, \|x\|^2 ,$$

toujours d'après la Proposition **2.40**. On en déduit que $\|T - T_n\| \leq |\lambda_{n+1}|$, qui tend vers 0.

Q.E.D.

2.4.1 Quotients de Rayleigh

Dans ce paragraphe nous supposerons que T est non seulement auto-adjoint compact, mais encore positif, c'est-à-dire que $(Tx\,|x\,) \geq 0,\ \forall x \in H$; une caractérisation très commode des valeurs propres est alors accessible. Notons que ces valeurs propres sont des réels vérifiant $(Tx_k\,|x_k\,) = \lambda_k \|x_k\|^2$, et sont par conséquent positives.

DÉFINITION **2.43** *On appelle quotient de Rayleigh la quantité suivante :*

$$\mathfrak{R}(x) = \frac{(Tx\,|x\,)}{\|x\|^2}. \tag{2.8}$$

PROPOSITION **2.44** *Supposons que* les valeurs propres λ_k de T sont rangées dans l'ordre décroissant *et sont associées aux vecteurs propres e_k, notons $\mathscr{W}_k$ le sous-espace engendré par les e_i, $i = 1, k$ et $\mathbb{W}_k$ l'ensemble des sous-espaces de dimension k de V. Alors les éléments propres (λ_k, e_k) de T admettent les caractérisations suivantes :*

$$\lambda_k = \mathfrak{R}(e_k) \tag{2.9}$$

$$\lambda_k = \min_{x\in\mathscr{W}_k} \mathfrak{R}(x) \tag{2.10}$$

$$\lambda_k = \max_{x\in\mathscr{W}_{k-1}^{\perp}} \mathfrak{R}(x) \tag{2.11}$$

$$\lambda_k = \max_{W\in\mathbb{W}_k} \min_{x\in W} \mathfrak{R}(x) \tag{2.12}$$

$$\lambda_k = \min_{W\in\mathbb{W}_{k-1}} \max_{x\in W^{\perp}} \mathfrak{R}(x) \tag{2.13}$$

DÉMONSTRATION.

▹ On a de façon évidente $\mathfrak{R}(e_k) = \lambda_k$.

▹ Si $x \in \mathscr{W}_k$ alors $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$, d'où il résulte

$$\mathfrak{R}(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \quad \text{mod } \alpha_i^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \quad \text{mod } \alpha_i^2} \geq \lambda_k.$$

La formule (2.10) découle alors de (2.9).

▹ Si $x \in \mathscr{W}_{k-1}^{\perp}$, on peut écrire $x = \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i x_i$, on en déduit, comme précédemment que

$$\mathfrak{R}(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i \geq k} \lambda_i \mod \alpha_i^2}{\displaystyle\sum_{i \geq k} \mod \alpha_i^2} \leq \lambda_k.$$

▹ On déduit tout d'abord de (2.10) que

$$\max_{W \in \mathbb{W}_k} \min_{x \in W} \mathfrak{R}(x) \geq \lambda_k;$$

mais réciproquement si on choisit $W \in \mathbb{W}_k$, on ne peut avoir $W \subset \mathscr{W}_{k-1}$ et par conséquent, $\exists x \neq 0, \in W \cap \mathscr{W}_{k-1}^{\perp}$. De (2.11) on déduit alors que $\lambda_k \geq \mathfrak{R}(x)$, d'où il résulte que $\lambda_k \geq \min_{w \in W} \mathfrak{R}(w), \ \forall W \in \mathbb{W}_k$, soit

$$\lambda_k \geq \max_{W \in \mathbb{W}_k} \min_{w \in W} \mathfrak{R}(w),$$

et par conséquent la formule (2.12).

▹ On opère de même, et on choisit $W \in \mathbb{W}_{k-1}$ et $x \neq 0, \in W^{\perp} \cap \mathscr{W}_k$; on aura en vertu de (2.10) $\lambda_k \leq \mathscr{R}(x)$; il en résulte que

$$\lambda_k \leq \min_{W \in \mathbb{W}_{k-1}} \max_{w \in W^{\perp}} \mathfrak{R}(w),$$

l'inégalité inverse découle alors de (2.11).

Q.E.D.

2.5 Problèmes variationnels spectraux

L'objet de ce paragraphe est l'étude de problèmes du type

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.14}$$

où μ est positif, ce qui empêche la forme bilinéaire associée d'être elliptique. *Dans tout ce paragraphe nous supposerons l'ouvert Ω borné.* Nous verrons que l'utilisation de la théorie spectrale précédemment développée conduit à des résultats de qualité comparable à celui fourni par le théorème de Lax-Milgram. La formulation variationnelle de (2.14) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \overline{v} - \mu \int_{\Omega} u\overline{v} = \int_{\Omega} f\,\overline{v}\,d\gamma. \end{cases} \tag{2.15}$$

2.5.1 Formulation générale

Il est facile de voir que le problème qui précède entre dans le cadre suivant :

$$\begin{array}{c} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } \forall v \in V, \\ a(u,v) - \mu\,(u\,|\,v)_H = q(v), \text{ où} \end{array} \tag{2.16}$$

- V et H sont deux espaces de Hilbert tels que

$$V \underset{c}{\subset} H$$

(dans le cas du problème (2.15) on a $V = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$, l'injection étant compacte en vertu du théorème de Rellich **1.19**)
- a et q sont respectivement une forme sesquilinéaire continue elliptique sur V, et une forme anti-linéaire continue sur V.

Cadre fonctionnel

Commençons par préciser quelque peu l'étude du problème variationnel

$$\begin{array}{c}\text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } \forall v \in V,\\ a(u,v) = (f\,|v)_H\,, \text{ où } f \in H.\end{array} \tag{2.17}$$

Notons $\mathscr{M}$ l'application

$$H \xrightarrow{\mathscr{M}} V' : f \mapsto \ell \text{ où } \ell(\cdot) = (f\,|\cdot)_H\,, \tag{2.18}$$

le théorème de Lax-Milgram 1.2 nous montre que la solution u de 2.17 est de la forme $u = \mathscr{S}(\ell)$ où $\mathscr{S}$ est continue $V' \longrightarrow V$. Nous poserons alors

$$\mathscr{G} = \mathscr{S} \circ \mathscr{M} : H \longrightarrow V, \tag{2.19}$$

et nous pourrons écrire

$$a(\mathscr{G}f, v) = (f\,|v)_H\,,\ \forall v \in V. \tag{2.20}$$

Notons également $\mathscr{J}$ l'injection canonique $V \longrightarrow H$, supposée compacte ; nous poserons

$$\mathscr{G}_V = \mathscr{G} \circ \mathscr{J} : V \longrightarrow V, \tag{2.21}$$

et

$$\mathscr{G}_H = \mathscr{J} \circ \mathscr{G} : H \longrightarrow H, \tag{2.22}$$

ces deux applications étant compactes. Le diagramme suivant résume ces définitions :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\mathscr{G}_H} & H \\ \mathscr{J}\uparrow & \mathscr{G}\searrow & \uparrow\mathscr{J} \\ V & \xrightarrow[\mathscr{G}_V]{} & V \end{array}$$

Problèmes aux valeurs propres

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier le problème homogène (2.16), soit en fait le *problème variationnel de valeurs propres :*

$$\begin{array}{c}\text{Trouver } \mu \in \mathbb{C} \text{ et } u \neq 0 \in V, \text{ tel que } \forall v \in V\\ a(u,v) = \mu\,(u\,|v)_H\,.\end{array} \tag{2.23}$$

Compte tenu de (2.20) et (2.21), le problème (2.23) peut s'exprimer sous la forme $u = \mathscr{G}_V(\mu u)$, soit

$$\mathscr{G}_V u = \frac{1}{\mu} u,\ u \in V. \tag{2.24}$$

PROPOSITION **2.45**

(i) *Les valeurs propres μ_n de (2.23) sont en quantité dénombrable, ne peuvent s'accumuler qu'à l'infini et sont situées à l'extérieur d'un disque de rayon strictement positif.*

(ii) *Les sous-espaces propres associés aux valeurs finies de μ_n sont de dimension finie.*

(iii) *Si V est dense dans H, alors 0 n'est pas valeur propre de $\mathscr{G}_V$, c'est-à-dire $\mu = \infty$ n'est pas valeur propre de (2.23).*

DÉMONSTRATION.

▹ Il s'agit essentiellement d'appliquer les Théorèmes **2.18** et **2.21**, avec $T = \mathscr{G}_V$ et $\lambda = 1/\mu$.

▹ Comme $\mathscr{S}$ est un isomorphisme, 0 est n'est pas valeur propre de $\mathscr{G}_V$ si et seulement si $\mathscr{M} \circ \mathscr{J}$ est injective ; c'est-à-dire si l'équation $(\mathscr{J} u \,|\, v)_H = 0,\ \forall v \in V$ n'a que la solution nulle, ou encore $\left(\overline{V}^H\right)^\perp = \{0\}$.

Q.E.D.

PROPOSITION **2.46** *Le problème de valeurs propres (2.23) peut s'exprimer sous la forme équivalente*

$$\mathscr{G}_H \tilde{u} = \frac{1}{\mu} \tilde{u},\ \tilde{u} \in H, \tag{2.25}$$

où $\tilde{u} = \mathscr{J} u$, (μ, u) étant solution de (2.24).

DÉMONSTRATION.

- ▹ Si (μ, u) est solution de (2.24) alors, en multipliant à gauche (2.24) par $\mathscr{J}$ on voit que $(\mu, \tilde{u})$ est solution de (2.25), $\tilde{u}$ n'étant pas nul puisque $\mathscr{J}$ est injectif.
- ▹ Réciproquement si $(\mu, \tilde{u})$ est solution de (2.25) alors $\tilde{u} = \mathscr{J}(\mu \mathscr{G} \tilde{u})$, ce qui en fait un élément de V. Multipliant (2.25) par $\mathscr{G}$, on constate que $(\mu, \mathscr{G}\tilde{u})$ vérifie (2.24). Il en résulte que (2.25) est équivalent à (2.24).

Q.E.D.

Alternative de Fredholm

Revenons à la résolution du problème (2.16), il peut être mis sous la forme $u = \mathscr{G}_V(\mu u) + \mathscr{S} q$, soit

$$\left(\frac{1}{\mu} I - \mathscr{G}_V\right) u = \frac{1}{\mu} \mathscr{S} q,\ u \in V. \tag{2.26}$$

PROPOSITION **2.47** *Le problème (2.16) admet une solution et une seule dépendant continûment de q, si et seulement si μ n'est pas valeur propre de (2.23)*

DÉMONSTRATION. Il ne s'agit là que d'une application du Corollaire **2.20** à la formulation (2.26).

Q.E.D.

2.5.2 Formes hermitiennes

Dans le cas où a est hermitienne, c'est-à-dire si $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$, afin de profiter pleinement du caractère auto-adjoint des opérateurs sous-jacents nous serons amenés à renforcer l'hypothèse de coercivité en supposant a positive, c'est-à-dire :

$$a(u, u) \geq \alpha \, \|u\|_V^2,\ \forall v \in V. \tag{2.27}$$

REMARQUE **2.48** *Une notion renforcée souvent utile est la suivante : il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, tels que*

$$\mathfrak{Re}\left\{e^{i\theta}a(u,u)\right\} \geq \alpha \|u\|_V^2 .$$

Cette condition implique évidemment la coercivité et signifie que, de plus, $a(u,u)$ prend ses valeurs dans un cône du plan complexe dont l'angle est inférieur à π.

PROPOSITION **2.49** *Si a est une forme hermitienne coercive positive, les opérateurs $\mathscr{G}_V$ et $\mathscr{G}_H$ sont auto-adjoints, respectivement pour les produits scalaires $a(\cdot,\cdot)$ et $(\cdot|\cdot)_H$.*

DÉMONSTRATION.

▹ Notons d'abord que a étant continue, hermitienne coercive et positive, elle constitue un produit scalaire sur V, définissant une norme équivalente à la norme initiale.

▹ On aura, $\forall u, v \in V$,

$$a(\mathscr{G}_V u, v) = (\mathscr{J} u \,|\, \mathscr{J} v)_H = \overline{(\mathscr{J} v \,|\, \mathscr{J} u)_H} = \overline{a(\mathscr{G}_V v, u)}.$$

▹ De même, $\forall \tilde{u}, \tilde{v} \in H$,

$$(\mathscr{G}_H \tilde{u} \,|\, \tilde{v})_H = \overline{(\tilde{v} \,|\, \mathscr{G}_H \tilde{u})_H} = \overline{a(\mathscr{G}\tilde{v}, \mathscr{G}\tilde{u})} = a(\mathscr{G}\tilde{u}, \mathscr{G}\tilde{v}) = (\tilde{u} \,|\, \mathscr{G}_H \tilde{v})_H$$

Q.E.D.

Bases hilbertiennes

Nous noterons désormais (μ_k, e_k) les éléments propres du problème (2.23).

PROPOSITION **2.50**

(i) *Les μ_k sont des nombres réels strictement positifs.*

(ii) *Les e_k peuvent être choisis de sorte qu'ils forment une base orthonormale de V pour le produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$, les $y_k = \mu_k^{1/2} e_k$ formant alors une base orthonormale de H.*

(iii) *Si V est dense dans H, alors les μ_k forment une suite tendant vers l'infini.*

DÉMONSTRATION.

▹ Le caractère réel des μ_k est une conséquence de la Proposition **2.32** appliquée à la formulation (2.24). De plus on a $\alpha \|e_k\|_V^2 \leq a(e_k, e_k) = \mu_k \|e_k\|_H^2$, d'où le caractère positif des μ_k.

▹ D'après le Théorème **2.39** appliqué à l'opérateur $\mathscr{G}_V$, V est somme directe hilbertienne de ses sous-espaces propres ; les vecteurs propres en composant les bases pouvant alors être choisis orthogonaux et normés, c'est-à-dire vérifiant $a(e_k, e_k) = 1$. Mais on sait également que H est somme hilbertienne de ces mêmes sous-espaces propres ; comme $a(e_k, e_m) = \mu_k (e_k | e_m)_H$, les e_k forment une base de H composée de vecteurs mutuellement orthogonaux, et comme $a(e_k, e_k) = \mu_k (e_k | e_k)_H = (y_k | y_k)_H$, les y_k forment une base orthonormale de H.

▹ Nous avons vu à la Proposition **2.45** que si V est dense dans H, alors 0 n'est pas valeur propre de $\mathscr{G}_V$; V de dimension infinie est donc somme hilbertienne de sous-espaces propres tous de dimension finie, ils sont donc en nombre infini. D'autre part on sait que le seul point d'accumulation des $1/\mu_k$ est 0, il en résulte que μ_k tend vers l'infini.

Q.E.D.

PROPOSITION **2.51** *Les vecteurs propres de (2.23) permettent d'obtenir les caractérisations suivantes :*

$$H = \left\{ f = \sum_{k\geq 1} \alpha_k y_k \,\middle|\, \|f\|_H^2 = \sum_{k\geq 1} \mod \alpha_k^2 \ < +\infty \right\} \tag{2.28}$$

$$V = \left\{ v = \sum_{k\geq 1} \alpha_k y_k \,\middle|\, a(v,v) = \sum_{k\geq 1} \mu_k \mod \alpha_k^2 \ < +\infty \right\} \tag{2.29}$$

$$V' = \left\{ q = \sum_{k\geq 1} \alpha_k \left(y_k \,|\cdot \right)_H \,\middle|\, \|q\|_{V'}^2 = \sum_{k\geq 1} \mu_k^{-1} \mod \alpha_k^2 \ < +\infty \right\} \tag{2.30}$$

DÉMONSTRATION.

▹ Le théorème de représentation **2.39** nous montre que tout élément f de H est de la forme

$$f = \sum_{k\geq 1} \alpha_k y_k, \tag{2.31}$$

où la série converge normalement dans H. Réciproquement, si on pose $f_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i$, où les$\alpha_k$ vérifient $\sum_{k\geq 1} \mod \alpha_k^2 \leq +\infty$, alors la suite f_k vérifie $\|f_m - f_k\|_H^2 = \sum_{i\geq k+1}^{m} \mod \alpha_i^2$; il en résulte que f_k est de Cauchy et par conséquent converge dans H.

▹ Le même raisonnement s'applique dans V, muni du produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$ et prouve que

$$V = \left\{ v = \sum_{k\geq 1} \beta_k e_k \,\middle|\, a(v,v) = \sum_{k\geq 1} \mod \beta_k^2 \ < +\infty \right\}.$$

La caractérisation annoncée découle alors simplement de la relation $y_k = \mu_k^{1/2} e_k$.

▹ Si $q \in V'$, alors $\langle q, v\rangle = a(\mathscr{S}q, v)$, $\forall v \in V$, et comme $\mathscr{S}q \in V$, d'après 2.29 on aura

$$\mathscr{S}q = \sum_{k\geq 1} \alpha'_k y_k \text{ avec } \sum_{k\geq 1} \mu_k \left|\alpha'_k\right|^2 < +\infty;$$

il en résulte que

$$a(\mathscr{S}q, v) = \sum_{k\geq 1} \alpha'_k a(y_k, v) = \sum_{k\geq 1} \alpha'_k \mu_k \left(y_k \,| v \right)_H,$$

et par conséquent

$$q = \sum_{k\geq 1} \alpha_k \left(y_k \,| v \right), \text{avec } \alpha_k = \alpha'_k \mu_k \text{ et } . \sum_{k\geq 1} \mu_k^{-1} |\alpha_k|^2 = \sum_{k\geq 1} \mu_k \left|\alpha'_k\right|^2 < +\infty.$$

▹ Réciproquement si $q = \sum_{k\geq 1} \alpha_k \left(y_k \,|\cdot \right)$, avec $\sum_{k\geq 1} \mu_k^{-1} \mod \alpha_k^2 < +\infty$, alors

$$\begin{aligned}
\| q \|_{V'} &= \sup_{v\in V} \frac{\sum_{k\geq 1} \alpha_k \left(y_k \,| v \right)}{a(v,v)} \\
&= \sup_{\sum_{k\geq 1} \mu_k \mod \beta_k^2 < +\infty} \frac{\sum_{k\geq 1} \alpha_k \overline{\beta}_k}{\sum_{k\geq 1} \mu_k \mod \beta_k^2} \\
&= \sup_{\sum_{k\geq 1} \mu_k \mod \beta_k^2 < +\infty} \frac{\sum_{k\geq 1} \mu_k^{-1/2} \alpha_k \mu_k^{1/2} \overline{\beta}_k}{\sum_{k\geq 1} \mu_k \mod \beta_k^2} \\
&= \sum_{k\geq 1} \mu_k^{-1} \mod \alpha_k^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $q \in V'$.

Q.E.D.

REMARQUE **2.52** *Un prolongement naturel de ces résultats est la définition d'espaces intermédiaires entre H et V, appelés espaces d'interpolation. Pour* $\theta \in [0,1]$, *on pose*

$$[H,V]_\theta = \left\{ u = \sum_{k\geq 1} \alpha_k y_k \,\middle|\, \sum_{k\geq 1} \mu_k^\theta \mod \alpha_k^2 < +\infty \right\}.$$

On montre aisément que la norme naturelle en fait bien des espaces de Hilbert, que $[H,V]_0 = H$, $[H,V]_1 = V$ *et que* $[H,V]_{\theta_1} \subset [H,V]_\theta \subset [H,V]_{\theta_2}$ *pour* $\theta_1 > \theta > \theta_2$. *On peut également montrer que cette construction est intrinsèque, au sens où les espaces d'interpolation ne dépendent pas de la forme hermitienne coercitive a ayant servi à leur détermination. Dans le cas où* $H = L^2(\Omega)$ *et* $V = H^m(\Omega)$, *il s'agit là d'une façon de définir les espaces de Hilbert d'indice non entier, on montre en effet que*

$$\left[L^2(\Omega), H^m(\Omega)\right]_\theta = H^{m\theta}(\Omega).$$

Quotients de Rayleigh

Si nous appliquons à la formulation (2.24) les résultats relatifs aux quotients de Rayleigh (voir la formule (2.8)), nous sommes amenés à poser

$$\mathfrak{R}_V(v) = \frac{a(\mathscr{G}_V v, v)}{a(v,v)},$$

soit encore

$$\mathfrak{R}_V(v) = \frac{1}{\mathscr{Q}(v)} \text{ avec } \mathscr{Q}(v) = \frac{a(v,v)}{\| v \|_H^2} \tag{2.32}$$

PROPOSITION **2.53** *Supposons que* les valeurs propres μ_k de (2.23) sont rangées dans l'ordre croissant *et sont associées aux vecteurs propres* y_k, *notons* $\mathscr{W}_k$ *le sous-espace de V engendré par les* y_i, $i = 1,k$ *et* $\mathbb{W}_k$ *l'ensemble des sous-espaces de dimension k de V. Alors les éléments propres* (μ_k, e_k) *de (2.23) admettent les caractérisations suivantes :*

$$\mu_k = \mathscr{Q}(e_k) \tag{2.33}$$

$$\mu_k = \max_{v\in\mathscr{W}_k} \mathscr{Q}(v) \tag{2.34}$$

$$\mu_k = \min_{v\in\mathscr{W}_{k-1}^\perp} \mathscr{Q}(v) \tag{2.35}$$

$$\mu_k = \min_{W\in\mathbb{W}_k} \max_{v\in W} \mathscr{Q}(v) \tag{2.36}$$

$$\mu_k = \max_{W\in\mathbb{W}_{k-1}} \min_{v\in W^\perp} \mathscr{Q}(v) \tag{2.37}$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit simplement d'appliquer les résultats de la proposition **2.44** en notant que les valeurs propres λ_k de $\mathscr{G}_V$ sont les inverses de celles μ_k de 2.23, et que de même $\mathfrak{R}_V$ est l'inverse de $\mathscr{Q}$.

Q.E.D.

Alternative de Fredholm

Dans le cas particulier des formes hermitiennes positives, on peut préciser le résultat de la Proposition **2.47** relative à l'alternative de Fredholm, c'est-à-dire à la résolution du problème (2.16).

PROPOSITION **2.54**

(i) *Si μ n'est pas valeur propre de (2.23), alors (2.16) est bien posé et sa solution peut se mettre sous la forme suivante :*

$$u = \sum_{k\geq 1} \frac{q(y_k)}{\mu_k - \mu} y_k, \tag{2.38}$$

où la série converge dans V.

(ii) *Si μ est l'une des valeurs propres de (2.23), soit $\mu = \mu_i$, alors (2.16) admet une solution si et seulement si*

$$q(y) = 0,\ \forall y \in S_i, \tag{2.39}$$

où S_i est le sous-espace propre associé à μ_i. Dans ces conditions, les solutions de (2.16) sont de la forme

$$u = y + \sum_{k\neq i} \frac{q(y_k)}{\mu_k - \mu} y_k, \tag{2.40}$$

où y est un élément quelconque de S_i.

DÉMONSTRATION. Si $u \in V$, on a vu à la Proposition **2.51** que $u = \sum_{k\geq 1} \alpha_k y_k$ avec $\sum_{k\geq 1} \mu_k \mod \alpha_k^2 < +\infty$. Le fait pour u d'être solution de (2.16) implique alors $(\mu_i - \mu)\alpha_i = q(y_i),\ \forall i \geq 1$.

▹ Si$\mu \neq \mu_i,\ \forall i \geq 1$, alors on en déduit la valeur de $\alpha_i\ \forall i$, et par conséquent l'expression (2.38).

▹ Si par contre μ est l'une des valeurs propres de (2.23) alors d'après le Théorème **2.27**, le problème (2.26) équivalent à (2.16), admet des solutions si et seulement si $a(\mathscr{S}q, y) = 0\ \forall y \in S_i$, soit $q(y) = 0\ \forall y \in S_i$.

▹ De plus il est clair que la formule

$$u = \sum_{k\neq i} \frac{q(y_i)}{\mu_k - \mu} y_k$$

fait de u une solution de (2.16), et que les autres en diffèrent d'une solution du problème homogène, soit exactement d'un élément de S_i.

Q.E.D.

REMARQUE **2.55** *Ce résultat constitue une généralisation du Théorème de Lax-Milgram, au sens où la forme sesquilinéaire $a(u,v) - \mu(u\,|\,v)_H$ est positive elliptique s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\mu \leq \inf_{v\in V} \left\{ \frac{a(v,v)}{\|v\|_H^2} - \alpha \frac{\|v\|_V^2}{\|v\|_H^2} \right\}, \tag{2.41}$$

*alors qu'en fait nous avons montré que (2.16) est bien posé dès que $\mu \notin \mathscr{V}(\mathscr{G}_V)$. Ce résultat est beaucoup plus précis car les valeurs autorisées de μ ne sont pas confinées à un disque comme pourrait le laisser penser le Théorème de Lax-Milgram. Mais de plus, en vertu de la Proposition **2.36**, le problème (2.16) est bien posé dès que*

$$\mu < \mu_1 = \min_{v\in V} \frac{a(v,v)}{\|v\|_H^2}, \tag{2.42}$$

ce qui constitue une amélioration de la formule (2.41).

2.5.3 Le problème de Dirichlet

Il ne nous reste plus qu'à traduire les résultats obtenus dans le cas d'un problème pratique tel (2.14) ; ils s'appliquent sans aucune modification si on choisit de poser

$$\begin{aligned} V = H_0^1(\Omega),\ H = L^2(\Omega), \\ a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\ ,\ \text{et} \\ q(v) = \int_\Omega f\,\overline{v}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

2.5.4 Le problème de Neumann

Le cas du problème de Neumann est également instructif, soit en effet à étudier

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu u &= f \ \text{dans}\ \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0 \ \text{sur}\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.44}$$

posant $\mu = \tau - 1$, on en donnera la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver}\ u \in H^1(\Omega),\ \text{tel que}\ \forall v \in H^1(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\ + \int_\Omega u\overline{v}\ - \tau \int_\Omega u\overline{v}\ = \int_\Omega f\,\overline{v}. \end{cases} \tag{2.45}$$

On prendra donc, d'une façon qui a priori peut sembler un peu artificielle, mais qui a le mérite de rendre a positive elliptique

$$\begin{aligned} V = H^1(\Omega),\ H = L^2(\Omega),\ \tau = \mu + 1 \\ a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\ + \int_\Omega u\overline{v}\ ,\ \text{et} \\ q(v) = \int_\Omega f\,\overline{v}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Il est clair que $\mu = 0$ (ou $\tau = 1$) est valeur propre de (2.45), avec pour sous-espace propre les fonctions constantes sur Ω. D'après (2.39), la condition pour que (2.44) ait une solution lorsque $\mu = 0$ est la suivante :

$$\int_\Omega f\ = 0,$$

ce qui corrobore la condition (1.67).