Résolution d'un problème aux valeurs propres pour le laplacien

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$. On veut résoudre numériquement le problème aux valeurs propres :
Trouver $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda\, u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{1}$$

1.1 - Mettre le problème (1) sous forme variationnelle.

1.2 - Rappeler pourquoi les $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont des réels strictement positifs.
Dans la suite, on les ordonne selon

$$0 \;<\; \lambda_1 \;\leq\; \lambda_2 \;\leq\; \lambda_3 \;\leq\; \ldots$$

1.3 - Expliquer pourquoi on peut chercher des fonctions propres à valeurs réelles.

Discrétisation par éléments finis de Lagrange P^1 :

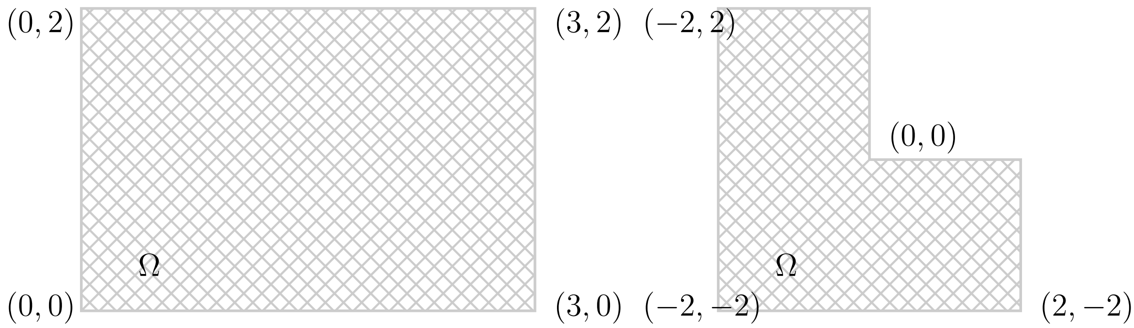
1.4 - Ecrire la formulation variationnelle discrète dans $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$.

1.5 - Réécrire le problème discret sous la forme équivalente :
Trouver $(\vec{U}^0, \lambda^h) \in \mathbb{R}^{N_0} \times \mathbb{R}$ *tels que*

$$\mathbb{K}^0 \vec{U}^0 = \lambda^h \mathbb{M}^0 \vec{U}^0, \tag{2}$$

avec $\mathbb{M}^0, \mathbb{K}^0 \in \mathbb{R}^{N_0\times N_0}$ respectivement les matrices de masse et de rigidité restreintes aux nœuds intérieurs.

1.6 - Comment construit-on les matrices de masse $\mathbb{M}$ et de rigidité $\mathbb{K}$ sans tenir compte de la condition aux limites ?



(a) Première géométrie (b) Deuxième géométrie

FIGURE 1 – Exemples de géométries.

1.7 - Quel problème rencontre-t-on si on utilise la technique de pseudo-élimination pour essayer de construire un problème aux valeurs propres matriciel équivalent à (2) ?

Rappel : en supposant que les nœuds frontières sont numérotés en dernier, la pseudo-élimination consiste à transformer $\mathbb{K}$ et $\mathbb{M}$ respectivement en

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}^0 & 0 \\ 0 & \alpha\,\mathbb{I} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mathbb{M}^0 & 0 \\ 0 & \beta\,\mathbb{I} \end{pmatrix},$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $\beta \neq 0$ (la matrice de masse doit rester inversible).

1.8 - A l'aide des programmes `Matlab` de ANN201, construire les matrices $\mathbb{K}$ et $\mathbb{M}$.

1.9 - Construire les matrices de rigidité $\mathbb{K}^0$ et de masse $\mathbb{M}^0$ en éliminant explicitement les lignes et les colonnes associées aux indices des nœuds frontière. Pour déterminer les ensembles d'indices de ligne et de colonne à conserver dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{M}$ on pourra utiliser la commande `matlab find(Refneu==0)`.

Attention : ceci nécessite d'avoir construit le maillage à l'aide d'un fichier `.geo` (`Gmsh`) décrivant la géométrie qui impose une référence non-nulle sur la frontière.

Calculs dans un ouvert rectangulaire :

Dans un premier temps on considère $\Omega =]0,3[\times]0,2[$ le domaine dessiné figure 1.(a).

1.10 - Résoudre le problème aux valeurs propres à l'aide de la commande `matlab eigs()`. En particulier, on s'intéressera aux 10 plus petites valeurs propres. On prendra soin de les afficher par ordre croissant à l'aide de la commande `matlab sort()`.

1.11 - (a) On admet que les fonctions propres de (1) sont à variables séparées, de la forme $u_{\ell,m}(x,y) = f_\ell(x)g_m(y)$, avec $\ell, m > 0$. Déterminer $(f_\ell)_{\ell>0}$ et $(g_m)_{m>0}$. Combien valent les valeurs propres associées $(\lambda_{\ell,m})_{\ell,m>0}$?

(b) Comparer aux valeurs calculées. Afficher les erreurs relatives sur des maillages successifs

$$\left|\frac{\lambda_k - \lambda_k^h}{\lambda_k}\right|, \qquad 1 \leq k \leq 10.$$

(c) Comment se comportent les erreurs ? Est-ce conforme aux estimations abstraites ?

1.12 - Représenter les vecteurs propres associés aux 10 plus petites valeurs propres.

Calculs dans un domaine en L :

Dans un second temps on considère le domaine $\Omega =]-2,2[\times]-2,2[\backslash[0,2]\times[0,2]$ dessiné figure 1.(b).

1.13 - Utiliser l'idée de la question **1.11** pour donner l'expression de quelques couples de valeurs et vecteurs propres du problème (1).

1.14 - Construire le problème discret approché (2) pour la nouvelle géométrie.

1.15 - Résoudre le problème aux valeurs propres. On s'intéressera à nouveau aux 10 plus <u>petites</u> valeurs propres.

1.16 - Représenter les vecteurs propres associés aux 10 plus petites valeurs propres.

1.17 - A votre avis, obtient-on tous les couples possibles par séparation de variables ? Motiver votre réponse.

Calculs avec un coefficient variable :

On veut finalement résoudre numériquement le problème aux valeurs propres :
Trouver $(u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ *tels que*

$$(3) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}(\sigma\nabla u) = \lambda\, u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où σ est un coefficient constant par zone (chaque zone correspondant à un matériau différent), à valeurs strictement positives.

1.18 - Reprendre les questions **1.2** à **1.5** dans cette configuration.

On donne deux géométries, `geom_deux_milieux.geo` et `geom_trois_milieux.geo`, figurant respectivement un milieu constitué de deux, ou de trois, matériaux. Pour la mise en œuvre `Matlab`, il faudra modifier la routine `matK_elem.m`.

1.19 - Résoudre le problème aux valeurs propres dans chaque géométrie en fixant des valeurs différentes de σ pour chaque zone : $\sigma = 5$ dans le petit carré, $\sigma = 8$ dans le triangle (cas à trois matériaux), et $\sigma = 1$ dans le reste du domaine. Représenter les vecteurs propres associés aux 10 plus petites valeurs propres.