Résolution d'un problème de propagation d'ondes

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$ et $T_{max} > 0$. On veut résoudre numériquement l'équation des ondes :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \times]0, T_{max}[\\ u_{|t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}_{|t=0} = u_1 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T_{max}[\end{array} \right. .$$

Milieu homogène :

Le coefficient σ est supposé constant, avec une vitesse $c = 2$ et $\sigma = c^2$.

5.1 - Rappeler la formulation variationnelle du problème et l'identité d'énergie.

5.2 - On discrétise cette formulation variationnelle par éléments finis de Lagrange P^1 en espace et différences finies centrées d'ordre 2 en temps. Construire le schéma discret associé (on précisera en particulier son initialisation). Expliquer comment on peut l'accelérer.

5.3 - Rappeler l'identité d'énergie discrète. Sous quelle condition le schéma est-il stable ? On exprimera cette condition sous forme matricielle.

5.4 - On veut simuler des ondes qui se propagent dans un domaine $\Omega =]0, 9[\times]0, 2[$ (voir la figure 1). Construire plusieurs maillages correspondants à cette géométrie, à l'aide du fichier `geomRect.geo` (`Gmsh`). On fera varier h de 0.02 à 0.2.

5.5 - Construire les matrices de masse exacte et condensée, et la matrice de rigidité.

5.6 - A l'aide de la commande `Matlab` `eigs()`, calculer le pas de temps maximum autorisé par la condition CFL prédite par la théorie dans les deux cas suivants :
- pour la matrice de masse exacte ;
- pour la matrice de masse condensée.

Que pensez-vous des résultats ?

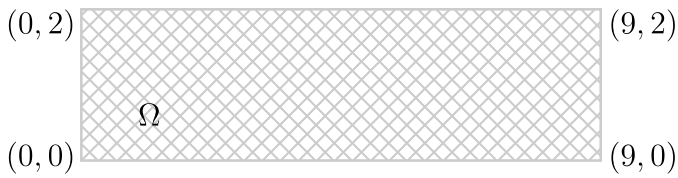

FIGURE 1 – Géométrie milieu homogène.

5.7 - Pour la simulation numérique, on fixe $T_{max} = 4$. On choisit des conditions initiales nulles et une source gaussienne en espace et en temps (`f_gauss.m`). Calculer le vecteur second membre associé à cette source, construit par interpolation.

5.8 - Programmer le schéma avec matrice de masse exacte, puis avec matrice de masse condensée.

5.9 - Dans les deux cas, calculer l'énergie discrète : afficher l'évolution de l'énergie au cours du temps et commenter.

5.10 - Calculer et afficher l'évolution de la solution au point $(6.5, 1)$.

5.11 - Déterminer le temps de calcul à l'aide de la commande `Matlab cputime`.

5.12 - Réaliser des simulations avec et sans condensation de masse. Comparer les temps de calcul :
- avec affichage de la solution à chaque pas de temps ;
- sans affichage.

Que pensez-vous des résultats ?

5.13 - Pour un maillage fixé, faire varier le pas de temps et comparer la CFL numérique à la CFL prédite par la théorie.

5.14 - Réaliser des simulations avec différents maillages. Commenter.

Problème de transmission :

Dans cette partie, on considère la propagation d'ondes dans un milieu constitué de plusieurs matériaux, caractérisés par un coefficient σ constant par zone.

5.15 - Programmer le schéma pour σ variable (à l'aide de `Reftri`). On pourra supposer que le milieu est constitué au plus de 3 matériaux.

5.16 - On donne deux géométries, `geom_deux_milieux.geo` et `geom_trois_milieux.geo`, figurant respectivement un milieu constitué de deux, ou de trois, matériaux. Simuler et visualiser les ondes qui se propagent. Commenter.