Condition *inf-sup* pour l'Elément Fini de Taylor-Hood P_2-iso-P_1

Patrick Ciarlet et Vivette Girault

ciarlet@ensta.fr & girault@ann.jussieu.fr

ENSTA & Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris 6

I. Cas exact

Problèmes-modèle

Dans un polyèdre Ω à bord $\partial\Omega$ lipschitzien (Ω et $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ simplement connexes)...

- *Fluide incompressible*

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ -\nu\, \Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f} \text{ dans } \Omega \text{ ;} \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ ;} \\ \vec{u}_{|\partial\Omega} = 0. \end{array}\right.$$

(viscosité $\nu > 0$, et $\vec{f} \in H^{-1}(\Omega)^3$.)

- *Quasi-électrostatique*

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{E} \in L^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathbf{rot}\, \vec{E} = \vec{f}_E \text{ dans } \Omega \text{ ;} \\ \operatorname{div} \vec{E} = g \text{ dans } \Omega \text{ ;} \\ \vec{E} \times \vec{n}_{|\partial\Omega} = 0. \end{array}\right.$$

$$\left(\vec{f}_E \in L_0^2(\Omega)^3,\ \operatorname{div} \vec{f}_E = 0,\ \vec{f}_E \cdot \vec{n}_{|\partial\Omega} = 0,\ g \in L^2(\Omega).\right)$$

Formulations variationnelles équivalentes

- Dans $X_0 = H_0^1(\Omega)^3$ et $Q_0 = L_0^2(\Omega)$, soit à résoudre

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{u}, p) \in X_0 \times Q_0 \text{ tel que} \\ \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} \, d\Omega - \int_\Omega p \operatorname{div} \vec{v} \, d\Omega = {}_{H^{-1}(\Omega)^3} < \vec{f}, \vec{v} >_{H_0^1(\Omega)^3}, \quad \forall \vec{v} \in X_0 \\ \displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \vec{u} \, d\Omega = 0, \quad \forall q \in Q_0 \end{array}\right.$$

- Dans $X = H_0(\mathbf{rot}\,, \Omega) \cap H(\operatorname{div}\,, \Omega)$ et $Q = L^2(\Omega)$, soit à résoudre

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{E}, p_E) \in X \times Q \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \left\{ \mathbf{rot}\, \vec{E} \cdot \mathbf{rot}\, \vec{v} + \operatorname{div} \vec{E} \operatorname{div} \vec{v} \right\} \, d\Omega \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_\Omega p_E \operatorname{div} \vec{v} \, d\Omega = \int_\Omega \left\{ \vec{f}_E \cdot \mathbf{rot}\, \vec{v} + g \operatorname{div} \vec{v} \right\} \, d\Omega, \; \forall \vec{v} \in X \\ \displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \vec{E} \, d\Omega = \int_\Omega q \, g \, d\Omega, \quad \forall q \in Q \end{array}\right.$$

(On trouve $p_E = 0$.)

Coercivité

- Dans X_0

$$(\vec{v},\vec{w}) \mapsto \nu \int_\Omega \nabla\vec{v} : \nabla\vec{w}\, d\Omega \text{ est } \textit{coercitive}\text{...}$$

(Inégalité de POINCARÉ.)

- Dans X

$$(\vec{v},\vec{w}) \mapsto \int_\Omega \{\mathbf{rot}\,\vec{v}\cdot\mathbf{rot}\,\vec{w} + \operatorname{div}\vec{v}\operatorname{div}\vec{w}\}\; d\Omega$$

$\rightarrow$ est un *produit scalaire* dans X, noté $(\cdot,\cdot)_X$;

$\rightarrow$ de plus, $(\vec{v},\vec{w})_X = \int_\Omega \nabla\vec{v} : \nabla\vec{w}\, d\Omega$, $\forall \vec{v},\vec{w} \in X \cap H^1(\Omega)^3$.

(*cf.* [Weber'80] ; [Costabel'91] et [Costabel-Dauge-Nicaise'99].)

Condition *inf-sup* dans (X_0, Q_0)

Classiquement [Girault-Raviart'86], il existe $C_1 > 0$ tel que :

$$\forall q^0 \in X_0,\ \exists \vec{v}^0 \in X_0,\ \mathrm{div}\, \vec{v}^0 = q^0 \text{ et } |\vec{v}^0|_1 \leq C_1 \, \|q^0\|_0.$$

D'où la condition *inf-sup* exacte dans (X_0, Q_0)

$$\inf_{q^0 \in Q_0} \sup_{\vec{v}^0 \in X_0} \frac{\displaystyle\int_\Omega q^0 \, \mathrm{div}\, \vec{v}^0 \, d\Omega}{\|q^0\|_0 \, |\vec{v}^0|_1} \geq \frac{1}{C_1}.$$

Condition *inf-sup* dans (X, Q)

- Soit F une face *donnée* de $\partial\Omega$:

  Lemme 1 $\exists \varrho \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ *telle que supp*$(\varrho_{|\partial\Omega}) \subset F$ *et* $\int_F \varrho \, d\Gamma = 1$.

  Soit $\vec{\varrho} = \varrho \, \vec{n}_F$: $\vec{\varrho} \in X \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})^3$ et $\int_\Omega \operatorname{div} \vec{\varrho} \, d\Omega = 1$. On note $K_1 = \|\vec{\varrho}\|_X = |\varrho|_1$.

- **Théorème 1** *La condition* inf-sup *exacte est vérifiée dans* (X, Q).

  Preuve. Décomposer $q \in Q$ en $q = q^0 + \bar{q}$, où $\bar{q} = \dfrac{1}{|\Omega|} \int_\Omega q \, d\Omega \in \mathbb{R}$, $q^0 \in Q_0$.

  $\exists \vec{v}^0 \in H_0^1(\Omega)^3$ tel que $\operatorname{div} \vec{v}^0 = q^0$, et $|\vec{v}^0|_1 \leq C_1 \|q^0\|_0$; on pose $\vec{v} = \alpha \, \vec{v}^0 + \bar{q} \, \vec{\varrho}$.

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega q \operatorname{div} \vec{v} \, d\Omega \quad &= \quad \alpha \, \|q^0\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega|} \|\bar{q}\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \|\bar{q}\|_0 \int_\Omega q^0 \operatorname{div} \vec{\varrho} \, d\Omega \\
&\geq \quad \alpha \, \|q^0\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega|} \|\bar{q}\|_0^2 - \frac{K_1}{|\Omega|^{1/2}} \|\bar{q}\|_0 \, \|q^0\|_0 . \\
&\geq \quad \alpha \, \|q^0\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega|} \|\bar{q}\|_0^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{{K_1}^2}{|\Omega|} \|\bar{q}\|_0^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|q^0\|_0^2, \text{ avec } \varepsilon > 0.
\end{aligned}
$$

  On conclut en choisissant $\varepsilon = \alpha$, puis $\alpha = {K_1}^2$ (On sait que $\|\vec{v}\|_X \leq C_1' \|q\|_0$). ◇

II. Cas discret

Discrétisation

- $(\mathcal{T}_h)_h$ une première famille de triangulations *régulière*.
- Chaque tétraèdre T est divisé en huit sous-tétraèdres $(T_i)_{i=1,\cdots,8}$ ($|T_i| = \frac{1}{8}|T|$). Aux tétraèdres T_i correspond une seconde famille *régulière* $(\mathcal{T}_{h/2})_h$.
- Les espaces discrets...

$$
\begin{aligned}
Q_h &= \{q_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \ : \ q_{h|T} \in P_1, \ \forall T \in \mathcal{T}_h\} \ ; \\
Y_h &= \{y_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \ : \ y_{h|T_i} \in P_1, \ \forall T_i \in \mathcal{T}_{h/2}\}.
\end{aligned}
$$

Pression / Multiplicateur

$$
\begin{aligned}
Q_{0,h} &= \{q_h \in Q_h \ : \int_\Omega q_h \, d\Omega = 0\} \ ; \\
Q_h &= \ldots
\end{aligned}
$$

Vitesse / Champ électrique

$$
\begin{aligned}
X_{0,h} &= \{\vec{v}_h \in {Y_h}^3 \ : \vec{v}_{h|\partial\Omega} = 0\} \ ; \\
X_h &= \{\vec{v}_h \in {Y_h}^3 \ : \vec{v}_h \times \vec{n}_{|\partial\Omega} = 0\} \left(\oplus X^*_{sing}\right).
\end{aligned}
$$

Démarche...

- Coercivité discrète uniforme : toujours ok, puisque la discrétisation est *conforme*.
- Condition *inf-sup* discrète uniforme en trois étapes.
  (i) Dans $(X_{0,h}, Q_{0,h})$.
  (ii) Construction d'une approximation $\vec{\varrho}_h$ de $\vec{\varrho}$.
  (iii) Dans (X_h, Q_h) : pour $q_h \in Q_h$,
  écrire $q_h = q_h^0 + \bar{q}_h$, $q_h^0 \in Q_{0,h}$, $\bar{q}_h \in \mathbb{R}$;
  considérer $\vec{v}_h^0 \in X_{0,h}$ associé à q_h^0 réalisant la condition *inf-sup* du (i) ;
  poser $\vec{v}_h = \alpha\, \vec{v}_h^0 + \bar{q}_h\, \vec{\varrho}_h$ et conclure.

Pour le point (i), on utilise le lemme de Fortin [Fortin'77] :
la condition *inf-sup* discrète uniforme est vérifiée si, et seulement si, il existe un opérateur d'*approximation* $\mathcal{P}_h \in \mathcal{L}(X_0; X_{0,h})$ tel que pour tout élément $\vec{v} \in X_0$,

$$\int_\Omega q_h^0 \,\mathrm{div}\,(\mathcal{P}_h(\vec{v}) - \vec{v})\, d\Omega = 0,\ \forall q_h^0 \in Q_{0,h}, \qquad \|\mathcal{P}_h(\vec{v})\|_X \le C_2 \|\vec{v}\|_X .$$

Une condition *inf-sup* locale

Soient :

$(b_i)_{i=1,\cdots,6}$ les milieux de chaque arête de T.
$(\vec{\tau}_i)_{i=1,\cdots,6}$ les vecteurs unitaires tangents à chaque arête de T.

Alors (*cf.* [Girault-Scott'02]),

Lemme 2 *Pour chaque $q_h^* \in P_1 \cap L_0^2(T)$, il existe $\vec{v}_h^*$ qui est la restriction à T d'un élément de X_h tel que :*

$$\vec{v}_h^* \cdot \vec{n}_{|\partial T} = 0, \qquad \vec{v}_h^*(b_i) \cdot \vec{\tau}_i = \begin{cases} -\nabla q_h^*(b_i) \cdot \vec{\tau}_i, & \textit{si } b_i \notin \partial\Omega \\ 0, & \textit{sinon} \end{cases} \quad (i = 1, \cdots, 6)$$

$$\int_T q_h^* \operatorname{div} \vec{v}_h^* \, d\Omega \geq C_3 \|q_h^*\|_{0,T}^2, \qquad |\vec{v}_h^*|_{1,T} \leq C_4 \|q_h^*\|_{0,T}.$$

A q_h de $Q_{0,h}$, on associe la fonction q_h^*, telle que $q^*_{h|T} = q_{h|T} - \dfrac{1}{|T|} \displaystyle\int_T q_h \, d\Omega$, $\forall T \in \mathcal{T}_h$.

Soient $Q_h^* = \{q_h^* \ : \ q_h \in Q_h\}$ et $X_h^* = \{\vec{v}_h \in X_h \ : \ \displaystyle\int_T \operatorname{div} \vec{v}_h \, d\Omega = 0, \ \forall T \in \mathcal{T}_h\}$.

$\Big($Conclusion : La condition *inf-sup* discrète uniforme est vérifiée dans (X_h^*, Q_h^*)...$\Big)$

Condition *inf-sup* discrète uniforme dans $(X_{0,h}, Q_{0,h})$

On définit l'opérateur d'approximation $\mathcal{P}_h$ en deux étapes...

- On construit un opérateur $\mathcal{R}_h \in \mathcal{L}(X_0; X_{0,h})$ *quasi-local* à la [Scott-Zhang'90], tel que

$$\int_{F_i} (\mathcal{R}_h(\vec{v}) - \vec{v}) d\Gamma = 0, \text{ sur toutes les faces } F_i \text{ de } \mathcal{T}_h.$$

- Puis, on définit $\mathcal{P}_h$ en corrigeant $\mathcal{R}_h$: $\mathcal{P}_h(\vec{v}) = \mathcal{R}_h(\vec{v}) + \mathcal{C}_h(\vec{v})$, avec

$$\mathcal{C}_h(\vec{v}) \in X_h^* \text{ solution de}$$
$$\int_\Omega q_h^* \operatorname{div} \mathcal{C}_h(\vec{v})\, d\Omega = \int_\Omega q_h^* \operatorname{div} (\vec{v} - \mathcal{R}_h(\vec{v}))\, d\Omega, \quad \forall q_h^* \in Q_h^*.$$

On en déduit le

Théorème 2 *La condition* inf-sup *discrète uniforme est vérifiée dans* $(X_{0,h}, Q_{0,h})$*.*
$\exists \beta^0 > 0$*, indépendante de* h *telle que*

$$\inf_{q_h^0 \in Q_{0,h}} \sup_{\vec{v}_h^0 \in X_{0,h}} \frac{\displaystyle\int_\Omega q_h^0 \operatorname{div} \vec{v}_h^0\, d\Omega}{\|\vec{v}_h^0\|_X \|q_h^0\|_0} \geq \beta^0.$$

Approximation de $\vec{\varrho}$

On introduit $\Pi_h(\varrho)$, où Π_h est l'opérateur habituel d'interpolation de Lagrange dans Y_h.

Comme Π_h ne conserve pas $\int_F \Pi_h(\varrho)\, d\Gamma = 1$, il faut le *corriger*...

On construit par exemple une correction sur les N milieux des arêtes de F (bord exclu), avec les fonctions de base de Y_h $(\varphi_i)_{i=1,\cdots,N}$ associées. On définit $\varrho_h \in Y_h$ par :

$$\varrho_h = \Pi_h(\varrho) + \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i, \text{ où les } (c_i)_{i=1,\cdots,N}$$

$\rightarrow$ dépendent linéairement de $\varrho - \Pi_h(\varrho)$;

$\rightarrow$ sont tels que $\int_F (\varrho_h - \varrho) d\Gamma = 0$.

Ainsi

- Par construction, $\int_F \varrho_h \, d\Gamma = 1$.
- $\exists C_5 > 0$ indépendante de h et ϱ, et donc $K_2 > 0$ indépendante de h, telles que

$$|\varrho_h|_1 \leq C_5(|\varrho|_2 + h\, |\varrho|_{2,F}) \leq K_2.$$

On pose $\vec{\varrho}_h = \varrho_h \vec{n}_F \in X_h$ ($\|\vec{\varrho}_h\|_X = |\varrho_h|_1 \leq K_2$).

Condition *inf-sup* discrète uniforme dans (X_h, Q_h)

Théorème 3 *La condition* inf-sup *discrète uniforme est vérifiée dans* (X_h, Q_h)*.*
$\exists \beta^1 > 0$*, indépendante de* h *telle que*

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\vec{v}_h \in X_h} \frac{\displaystyle\int_\Omega q_h \operatorname{div} \vec{v}_h \, d\Omega}{\|\vec{v}_h\|_X \|q_h\|_0} \geq \beta^1 .$$

Preuve. On décompose $q_h \in Q_h$ en $q_h = q_h^0 + \bar{q}_h$, où $\bar{q}_h = \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_\Omega q_h \, d\Omega \in \mathbb{R}$, $q_h^0 \in Q_{0,h}$.
$\exists \vec{v}_h^0 \in X_{0,h}$ tel que $\displaystyle\int_\Omega q_h^0 \operatorname{div} \vec{v}_h^0 = \|q_h^0\|_0^2$, et $|\vec{v}_h^0|_1 \leq \dfrac{1}{\beta^0} \|q_h^0\|_0$; on pose $\vec{v}_h = \alpha \, \vec{v}_h^0 + \bar{q}_h \, \vec{\varrho}_h$.

$$\begin{aligned} \int_\Omega q_h \operatorname{div} \vec{v}_h \, d\Omega &= \alpha \, \|q_h^0\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega|} \|\bar{q}_h\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \|\bar{q}_h\|_0 \int_\Omega q_h^0 \operatorname{div} \vec{\varrho}_h \, d\Omega \\ &\geq \alpha \, \|q_h^0\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega|} \|\bar{q}_h\|_0^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{{K_2}^2}{|\Omega|} \|\bar{q}_h\|_0^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|q_h^0\|_0^2, \text{ avec } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

On conclut comme dans le cas exact. ◇