C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 293–298, 2000
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Un résultat de fermeture pour les équations de Maxwell en géométrie axisymétrique

Patrick CIARLET, Jr. [a], Nikolaï FILONOV [b], Simon LABRUNIE [c]

[a] ENSTA/UMA, 32, boulevard Victor, 75739 Paris cedex, France
Courriel : ciarlet@ensta.fr

[b] Physique mathématique, Université de Saint-Pétersbourg, 198904 Saint-Pétersbourg, Russie
Courriel : n@filonov.pdmi.ras.ru

[c] IECN, Université Nancy-I, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex, France
Courriel : labrunie@iecn.u-nancy.fr

(Reçu le 21 février 2000, accepté le 8 juin 2000)

Résumé. On étudie l'équivalence des normes H^1 et $\mathrm{H}(\mathbf{rot}, \mathrm{div})$ pour des champs de vecteurs vérifiant une condition aux limites électrique ou magnétique, dans un ouvert axisymétrique. On utilise deux méthodes, l'une fondée sur des outils élémentaires, l'autre sur les résultats connus pour le Laplacien. Ce résultat, valable pour presque tous les domaines axisymétriques, est utilisé pour la résolution numérique des équations de Maxwell. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A result of closedness for Maxwell's equations in an axisymmetric domain

Abstract. *We study the equivalence of* H^1 *and* $\mathrm{H}(\mathbf{curl}, \mathrm{div})$ *norms for vector fields satisfying an electric or magnetic boundary condition in an axially symmetric domain. We present two approaches, one based on elementary analytic tools, the other on the results known for the Laplacian. This result, valid for almost all axisymmetric domains, is used in the numerical resolution of Maxwell's equations.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

The spaces associated with the weak (standard) and strong (regularized) formulations of Maxwell's equations in a domain Ω are $X = \mathrm{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ and $X_R = \left\{\mathbf{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega)^3 : \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_\Gamma = 0\right\} = X \cap \mathrm{H}^1(\Omega)^3$ for the electric boundary condition, $Y = \mathrm{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \cap \mathrm{H}_0(\mathrm{div}, \Omega)$ and $Y_R = Y \cap \mathrm{H}^1(\Omega)^3 = \left\{\mathbf{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega)^3 \colon \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0\right\}$ for the magnetic boundary condition.

The strong formulation is well posed if X_R or Y_R are closed in X or Y, and equivalent to the weak formulation if $X_R = X$ or $Y_R = Y$. It is known that one has equality for regular and convex domains, and closedness for curved polyhedra. This Note addresses the issue for axisymmetric domains.

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

S0764-4442(00)01617-7/FLA

We consider the surface of revolution Γ generated by the rotation around the $(\mathrm{O}z)$ axis of a polygonal line γ_b whose extremities are on $(\mathrm{O}z)$, and Ω the volume limited by Γ. $\mathbf{n}$ is the outgoing unit normal vector to Γ. The corners of γ_b which are not on the axis generate circular edges in Γ, whereas the extremities are conical vertices of Γ.

We denote by $\breve{\mathbf{L}}^2(\Omega)$, $\breve{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, $\breve{V} = \breve{\mathrm{H}}(\mathbf{curl}, \mathrm{div}, \Omega)$, $\breve{X}$, $\breve{Y}$, $\breve{X}_R$, $\breve{Y}_R$ the respective subspaces of axisymmetric vector fields in $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$, $\mathrm{H}^1(\Omega)^3$, $V = \mathrm{H}(\mathbf{curl}, \mathrm{div}, \Omega)$, X, Y, X_R, Y_R; by $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ the H^s norm, by $\|\cdot\|_{V,\Omega}$ the $\mathrm{H}(\mathbf{curl}, \mathrm{div})$ norm.

The closedness of X_R in X is equivalent to $\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leqslant C\,\|\mathbf{u}\|_{V,\Omega}$, for all $\mathbf{u} \in X_R$; and similarly for Y_R and Y, $\breve{X}_R$ and $\breve{X}$, etc. This issue is investigated by two approaches. The first parallels that of Costabel et al. [5], with extra technical points. It is based on a formula of integration by parts proved in [4], and on Hardy inequalities. We obtain the closedness of $\breve{Y}_R$ in $\breve{Y}$ and, if the aperture angles at the conical points are not too large, that of $\breve{X}_R$ in $\breve{X}$.

The second approach is based on the decomposition (*see* [3]) $X = X_R + \mathbf{grad}\left\{\phi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) : \Delta\phi \in \mathrm{L}^2(\Omega)\right\}$ and on the study of weak solutions of the Laplacian by Kondrat'ev [7] and Dauge [6]. We obtain the closedness of X_R in X for all angles at the conical points except one.

These results may serve to prove finer decompositions, like $X = X_R \overset{\perp}{\oplus} X_S$, which can develop into an effective method for solving Maxwell's equations [1].

---

1. Position du problème

Les espaces associés aux formulations faible (standard) et forte (régularisée) des équations de Maxwell sont $X = \mathrm{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ et $X_R = X \cap \mathrm{H}^1(\Omega)^3 = \left\{\mathbf{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega)^3 : \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}|_\Gamma = 0\right\}$ pour la condition aux limites électrique ; $Y = \mathrm{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathrm{H}_0(\mathrm{div}, \Omega)$ et $Y_R = Y \cap \mathrm{H}^1(\Omega)^3 = \left\{\mathbf{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega)^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0\right\}$ pour la condition aux limites magnétique.

La formulation forte est bien posée si X_R est fermé dans X, équivalente à la formulation faible si $X_R = X$, et de même pour Y_R et Y. L'égalité est connue pour des domaines réguliers ou convexes, et la fermeture pour des polyèdres courbes. Cette Note étudie le cas des domaines axisymétriques, pour des champs axisymétriques ou non.

Soit Ω le volume limité par la surface de révolution Γ, engendrée par la rotation autour de l'axe vertical $(\mathrm{O}z)$ d'une ligne brisée γ_b, dont les extrémités sont sur $(\mathrm{O}z)$. On désigne par ω l'intersection de Ω et d'un demi-plan méridien et $\gamma = \gamma_a \cup \gamma_b$ sa frontière, γ_a étant la partie de l'axe $(\mathrm{O}z)$ comprise entre les extrémités de γ_b. On a donc deux types de singularités géométriques : les arêtes circulaires et les points coniques.

On adopte les coordonnées cylindriques d'axe $(\mathrm{O}z)$, (r, θ, z), ou parfois les coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ) centrées sur un point conique O. Pour les deux systèmes de coordonnées, θ est l'azimut cylindrique ; un demi-plan méridien $\theta = \mathrm{cte}$ est rapporté aux coordonnées cartésiennes (r, z) ou polaires (ρ, ϕ). $\mathbf{n}$ est la normale unitaire sortante à Γ lorsqu'elle existe.

On appelle respectivement $\breve{\mathbf{L}}^2(\Omega)$, $\breve{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, $\breve{V} = \breve{\mathrm{H}}(\mathbf{rot}, \mathrm{div}, \Omega)$, $\breve{X}$, $\breve{X}_R$, $\breve{Y}$, $\breve{Y}_R$ les sous-espaces des champs de vecteurs axisymétriques de $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$, $\mathrm{H}^1(\Omega)^3$, $V = \mathrm{H}(\mathbf{rot}, \mathrm{div}, \Omega)$, X, X_R, Y, Y_R ; $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ la norme de $\mathrm{H}^s(\Omega)$ ou $\mathrm{H}^s(\Omega)^3$; $\|\cdot\|_{V,\Omega}$ celle de $\mathrm{H}(\mathbf{rot}, \mathrm{div}, \Omega)$.
Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{u}$, on note $\mathbf{u}_m = u_r\,\mathbf{e}_r + u_z\,\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{u}_\theta = u_\theta\,\mathbf{e}_\theta$ ses composantes méridienne et azimutale. Si $\mathbf{u} \in \breve{V}$ (resp. $\breve{\mathbf{H}}^1(\Omega)$), $\mathbf{rot}\,\mathbf{u}_m$ et $\mathbf{rot}\,\mathbf{u}_\theta$ (resp. $\nabla\mathbf{u}_m$ et $\nabla\mathbf{u}_\theta$) sont orthogonaux ponctuellement – i.e. on a p.p. $\mathbf{rot}\,\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{u}_\theta = 0$ (resp. $\nabla\mathbf{u}_m : \nabla\mathbf{u} = 0$) – donc orthogonaux au sens L^2.

LEMME 1. – *Les assertions suivantes sont équivalentes* (*par Banach–Steinhaus*) :
– X_R *est fermé dans* X ;
– $\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leqslant C\,\|\mathbf{u}\|_{V,\Omega}$, *pour tout* $\mathbf{u} \in X_R$,
et de même pour Y *et* Y_R, $\breve{X}$ *et* $\breve{X}_R$, *etc.*

Pour démontrer ces inégalités, on présente deux méthodes. La méthode constructive, semblable à [5] repose sur des intégrations par parties et des inégalités de Hardy ; la méthode inductive, sur la décomposition $X = X_R + \mathbf{grad}\,\{\phi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) : \Delta\phi \in \mathrm{L}^2(\Omega)\}$ [3] et l'étude des solution faibles du Laplacien [6,7]. On peut ainsi obtenir des décompositions plus fines, du type $X = X_R \overset{\perp}{\oplus} X_S$, qui conduisent à des méthodes effectives de résolution des équations de Maxwell [1].

Dans ω, on aura besoin des espaces à poids

$$\mathrm{L}^2_\alpha(\omega) = \left\{ f : \iint_\omega |f|^2\, r^\alpha \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z < +\infty \right\} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{H}^1_\alpha(\omega) = \left\{ f \in \mathrm{L}^2_\alpha(\omega) : \partial_{r,z} f \in \mathrm{L}^2_\alpha(\omega) \right\}.$$

On note $\|\cdot\|_{s,\alpha,\omega}$ la norme de $\mathrm{H}^s_\alpha(\omega)$.

2. Méthode constructive

THÉORÈME 2. – *Dans* $\breve{X}_R$ (*si l'ouverture aux points coniques n'est pas trop grande*) *et dans* $\breve{Y}_R$, *on a l'estimation suivante* :

$$\exists\, K,\ \forall\, \mathbf{u} \in \breve{X}_R \ (\textit{resp.}\ \breve{Y}_R), \quad \|\nabla \mathbf{u}\|_0^2 \leqslant K\big(\|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\|_0^2 + \|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|_0^2\big). \tag{1}$$

Ceci entraîne que les normes $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ et $\|\cdot\|_{V,\Omega}$ sont équivalentes sur ces espaces. Par conséquent, $\breve{X}_R$ et $\breve{Y}_R$ sont fermés respectivement dans $\breve{X}$ et $\breve{Y}$.

La preuve suit celle de [5] pour les polyèdres courbes : elle est fondée sur la formule d'intégration par parties de Costabel (*cf.* infra). On vérifie la densité des champs $\mathcal{C}^\infty$ avec condition aux limites électrique (resp. magnétique) dans X_R (resp. Y_R). Puis on démontre (1) pour tout $\mathbf{u} \in \breve{Y}_R$, puis $\breve{X}_R$ (pour des angles d'ouverture aux points coniques légèrement supérieurs à $\pi/2$ dans $\breve{X}_R$).

2.1. Formule d'intégration par parties de Costabel

Soit Ω un domaine dont la frontière Γ est $\mathcal{C}^2$ par morceaux ; on a pour $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \left[\mathrm{H}^2(\Omega)^3\right]^2$ [4] :

$$(\nabla \mathbf{u} \mid \nabla \mathbf{v})_0 = (\mathbf{rot}\,\mathbf{u} \mid \mathbf{rot}\,\mathbf{v})_0 + (\mathrm{div}\,\mathbf{u} \mid \mathrm{div}\,\mathbf{v})_0 - b(\mathbf{u},\mathbf{v}) + d(\mathbf{u},\mathbf{v}). \tag{2}$$

Le terme $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ s'annule lorsque $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont tous deux dans $X \cap \mathrm{H}^2(\Omega)^3$ (resp. $Y \cap \mathrm{H}^2(\Omega)^3$). Si ces espaces sont denses dans X_R (resp. Y_R), on prolonge d par 0 à X_R et Y_R.

La formule (2) est donc valable pour $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in [X_R]^2$ ou $[Y_R]^2$, puisque tous ses autres termes ont un sens pour $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \left[\mathrm{H}^1(\Omega)^3\right]^2$. En effet, la forme bilinéaire $b(\mathbf{u},\mathbf{v})$ s'obtient en fonction de la seconde forme fondamentale $\mathrm{B} = \nabla \mathbf{n}$ de la surface Γ par :

$$\forall\,(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \left[\mathrm{H}^1(\Omega)^3\right]^2, \quad b(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \iint_\Gamma \left\{ \mathbf{u}_\top \cdot \mathrm{B} \cdot \mathbf{v}_\top + (\mathrm{tr}\,\mathrm{B})\, u_\nu\, v_\nu \right\} \mathrm{d}\Gamma.$$

Pour Ω tel que défini au paragraphe 1, cette forme se réduit à :

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \iint_\Gamma \frac{\nu_r}{r}\,(u_\theta\, v_\theta + u_\nu\, v_\nu)\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{3}$$

On n'a jamais qu'un seul terme à la fois, u_θ si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0$, u_ν si $\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}|_\Gamma = 0$.

Dans les deux cas, l'inégalité (1) est équivalente par (2) à

$$\exists\, k < 1, \quad -b(\mathbf{u},\mathbf{u}) \leqslant k\, \|\nabla \mathbf{u}\|_0^2. \tag{4}$$

2.2. Densité des champs très réguliers

PROPOSITION 3. – *L'espace*

$$\left\{\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^3 : \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}\big|_\Gamma = 0 \textit{ et } \mathbf{u} = 0 \textit{ au voisinage des arêtes et sommets}\right\}$$

est dense dans X_R ; et de même pour la condition aux limites $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0$.

La démonstration suit pas à pas celle de [5], valable dans le cas d'un polyèdre.

2.3. Cas magnétique

LEMME 4. – *L'espace $\mathrm{H}^1_{-1}(\omega)$ s'injecte continûment dans $\mathrm{L}^2_{-3}(\omega)$, i.e. il existe K_1 telle que*

$$\forall\, u \in \mathrm{H}^1_{-1}(\omega), \quad \|u\|^2_{0,-3,\omega} \leqslant K_1\, \|\mathbf{grad}\, u\|^2_{0,-1,\omega}.$$

Il s'agit d'une extension bi-dimensionnelle (par localisation et Fubini) de l'inégalité de Hardy. Elle utilise le fait que, lorsque $u \in \mathrm{H}^1_1(\omega) \cap \mathrm{L}^2_{-1}(\omega)$, $u|_{\gamma_a} = 0$ dans $\mathrm{L}^2(\gamma_a)$ [2].

PROPOSITION 5. – *L'inégalité* (1) *est satisfaite pour tout $\mathbf{u} \in \breve{\mathbf{H}}^1(\Omega)$ vérifiant $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0$.*

Démonstration. – $\nabla \mathbf{u}_m$ et $\nabla \mathbf{u}_\theta$ étant orthogonales, et $b(\mathbf{u},\mathbf{u})$ ne dépendant que de $\mathbf{u}_\theta$, il suffit de vérifier (1) pour $\mathbf{u} \in E^1_\theta = \left\{\mathbf{u} \in \breve{\mathbf{H}}^1(\Omega) : \mathbf{u} \parallel \mathbf{e}_\theta\right\}$. Soit $\mathbf{u} \in E^1_\theta$ et $v = r\, u_\theta$; il résulte des expressions en coordonnées cylindriques de $\mathbf{rot}\,\mathbf{u}$, $\operatorname{div}\mathbf{u}$ et $\nabla\mathbf{u}$ et du lemme 4 que :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\|^2_{0,\Omega} + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2_{0,\Omega} &= 2\pi\, \|\mathbf{grad}\, v\|^2_{0,-1,\omega};\\
\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{0,\Omega} &= 2\pi\left[\|\mathbf{grad}\, u_\theta\|^2_{0,1,\omega} + \|u_\theta\|^2_{0,-1,\omega}\right]\\
&\approx \|\mathbf{grad}\, v\|^2_{0,-1,\omega} + \|v\|^2_{0,-3,\omega}\\
&\approx \|\mathbf{grad}\, v\|^2_{0,-1,\omega},
\end{aligned}$$

le symbole $\approx$ désignant des normes équivalentes. Ceci montre l'inégalité (1), ainsi que l'appartenance à $\breve{\mathbf{H}}^1(\Omega)$ des $\mathbf{u} \in \breve{V}$ parallèles à $\mathbf{e}_\theta$: il n'y a pas de « singularités » dans la direction θ. □

2.4. Cas électrique

On appelle domaine « en cœur » un domaine Ω défini en coordonnées sphériques par

$$\Omega = \left\{(\rho,\theta,\phi) : 0 < \rho < \rho_0 \text{ et } 0 < \phi < F(\rho)\right\}, \quad F \text{ décroissante, } F(\rho) = \phi_1 \text{ si } \rho < \rho_1 \leqslant \rho_0.$$

Sa frontière se compose d'une face conique Γ_1 d'ouverture ϕ_1 et d'une face convexe Γ_2. Cette fois, on se ramène par orthogonalité à $u_\theta = 0$ et, par localisation, à Ω « en cœur » et à $\mathbf{u} \in V^1_m = \left\{\mathbf{v} \in \breve{\mathbf{H}}^1(\Omega) : v_\theta = 0\right.$ et $v_\phi|_{\Gamma_2} = 0$ et $\left.v_\rho|_\Gamma = 0\right\}$.

LEMME 6. – *Soit $\mathbf{v} = v_\rho\, \mathbf{e}_\rho + v_\phi\, \mathbf{e}_\phi = \mathbf{v}_\rho + \mathbf{v}_\phi \in V^1_m$. On a les majorations suivantes* :

$$|\mathbf{v}_\rho|_1^2 \leqslant 9\, |\mathbf{v}|_1^2, \qquad |\mathbf{v}_\phi|_1^2 \leqslant 16\, |\mathbf{v}|_1^2.$$

Il s'agit là encore d'inégalités de Hardy bi-dimensionnelles.

LEMME 7. – *Il existe* $\phi_0^1 > \pi/2$ *tel que, si* $\phi_1 < \phi_0^1$, *l'inégalité* (4) *est vraie pour* $\mathbf{u} \in V_m^1$.

Démonstration. – Dans le cas intéressant où Ω n'est pas convexe ($\phi_1 > \pi/2$), $\mathbf{u} \in V_m^1$ implique $b(\mathbf{u},\mathbf{u}) = b(\mathbf{u}_\phi,\mathbf{u}_\phi) \leqslant 0$. En coordonnées sphériques, la formule (3) donne :

$$-b(\mathbf{u},\mathbf{u}) = -2\pi \int_{\gamma_b} \nu_r\, |u_\nu|^2\, \mathrm{d}\gamma = -2\pi \int_{\rho=0}^{\rho_1} \cos\phi_1\, |u_\phi|^2\, \mathrm{d}\rho,$$

or $u_\phi = 0$ sur γ_a car elle y est égale à u_r qui est dans $\mathrm{H}_1^1(\omega) \cap \mathrm{L}_{-1}^2(\omega)$ [2] ; d'où

$$\begin{aligned}
-b(\mathbf{u},\mathbf{u}) &= 2\pi \frac{|\cos\phi_1|}{\sin^2\phi_1} \int_{\rho=0}^{\rho_1} \left| \int_{\phi=0}^{\phi_1} \frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\, u_\phi)\, \mathrm{d}\phi \right|^2 \mathrm{d}\rho \\
&\leqslant 2\pi \frac{|\cos\phi_1|}{\sin^2\phi_1} \int_{\rho=0}^{\rho_1} \phi_1 \int_{\phi=0}^{\phi_1} \left| \frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\, u_\phi) \right|^2 \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\rho \\
&\leqslant 2\pi \frac{|\cos\phi_1|\,\phi_1}{\sin^2\phi_1} \iint_\omega \left| \frac{1}{\rho\sin\phi} \frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\, u_\phi) \right|^2 \rho^2 \sin^2\phi\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\phi.
\end{aligned}$$

On reconnaît l'expression de $\operatorname{div} \mathbf{u}_\phi$, d'où en majorant $\sin^2\phi$ par $\sin\phi$:

$$-b(\mathbf{u},\mathbf{u}) \leqslant \frac{|\cos\phi_1|\,\phi_1}{\sin^2\phi_1} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_\phi\|_{0,\Omega}^2;$$

or $b(\mathbf{u}_\phi,\mathbf{u}_\phi) \leqslant 0$ entraîne par (2) que $\|\operatorname{div} \mathbf{u}_\phi\|_0^2 \leqslant \|\nabla \mathbf{u}_\phi\|_0^2$, et d'après le lemme précédent :

$$-b(\mathbf{u},\mathbf{u}) \leqslant 16 \frac{|\cos\phi_1|\,\phi_1}{\sin^2\phi_1} \|\nabla \mathbf{u}\|_0^2.$$

La constante est strictement inférieure à 1 pour $\phi_1 < 92°\ldots$ $\square$

3. Méthode inductive, cas électrique

THÉORÈME 8. – *Soit* Ω *un ouvert borné lipschitzien. Les inégalités suivantes sont équivalentes* :

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leqslant C_1 \|\mathbf{u}\|_{V,\Omega}, \qquad \forall\, \mathbf{u} \in X_R; \tag{5}$$

$$\|\varphi\|_{2,\Omega} \leqslant C_2 \|\Delta\varphi\|_{0,\Omega}, \quad \forall\, \varphi \in \mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega). \tag{6}$$

Démonstration. – Elle est fondée sur la représentation [3], Th. 4.1 :

$$\forall\, \mathbf{u} \in X, \quad \exists\, \mathbf{u}_0 \in X_R, \quad \exists\, \varphi \in \left\{\phi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) : \Delta\phi \in \mathrm{L}^2(\Omega)\right\},$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{grad}\,\varphi, \tag{7}$$

$$C\,\|\mathbf{u}\|_{V,\Omega}^2 \geqslant \|\mathbf{u}_0\|_{1,\Omega}^2 + \|\Delta\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{grad}\,\varphi\|_{0,\Omega}^2. \tag{8}$$

Supposons (6) vraie ; si $\mathbf{u} \in X_R$, alors φ de (7) appartient à $\mathrm{H}^2(\Omega)$; on contrôle $\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2$ par le second membre de (8), donc par $\|\mathbf{u}\|_{V,\Omega}^2$. Réciproquement, si $\varphi \in \mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, (5) appliquée à $\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,\varphi$ donne (6). $\square$

Dans [6], pp. 162–164, il est démontré que pour les arêtes l'estimation (6) est vraie ; pour le cône circulaire elle est vraie sauf si $3/4$ est localement une valeur propre du Laplacien, ce qui a lieu pour une ouverture et une seule, qui vaut environ 130°. Dans ce dernier cas X_R *n*'est *pas* fermé.

Références bibliographiques

[1] Assous F., Ciarlet P., Jr., Labrunie S., Caractérisation des singularités et résolution des équations de Maxwell stationnaires en géométrie axisymétrique, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 328 (1999) 767–772.
[2] Bernardi C., Dauge M., Maday Y., Spectral Methods for Axisymmetric Domains, Series in Applied Mathematics, Gauthier-Villars, Paris et North-Holland, Amsterdam, 1999.
[3] Birman M.Sh., Solomyak M.Z., The Maxwell operator in regions with nonsmooth boundary, Siberian Math. J. 28 (1) (1987) 12–24.
[4] Costabel M., A coercive bilinear form for Maxwell's equations, J. Math. Anal. and Appl. 157 (1991) 527–541.
[5] Costabel M., Dauge M., Nicaise S., Singularities of Maxwell interface problems, Math. Mod. Num. Anal. 33 (1999) 627–649.
[6] Dauge M., Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains, Lect. Notes in Math. 1341, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
[7] Kondrat'ev V.A., Boundary value problems for elliptic equations in domains with angular or conical points, Trans. Moscow Math. Soc. 16 (1967) 227–313.