

Caractérisation de la partie singulière de la solution des équations de Maxwell dans un domaine polyédrique

F. Assous, P. Ciarlet, Jr. 1, P.-A. Raviart² et E. Sonnendrücker³
NDE CEA-10-2826, CEA/BIII, BP 12, 91680 Bruyères-le-Château (1997)

Résumé. La solution des équations de Maxwell dans un ouvert polyédrique non convexe est moins régulière que dans le cas d'un domaine régulier ou convexe. Dans ce papier nous montrons que la solution du problème stationnaire peut être décomposée en la somme orthogonale d'une partie singulière et d'une partie régulière, et nous donnons une caractérisation de la partie singulière. Nous prouvons également que cette décomposition est liée à celle du laplacien scalaire.

Mots-clés. Equations de Maxwell, domaines polyédriques, singularités de coin.

Abstract. The solution of Maxwell's equations in a non-convex polyhedral domain is less regular than in a smooth or convex polyhedral domain. In this paper we show that the solution of the steady-state problem can be decomposed into the orthogonal sum of a singular part and a regular part, and we give a characterization of the singular part. We also prove that the decomposition is linked to the one associated with the scalar Laplacian.

Keywords. Maxwell's equations, polyhedral domains, geometric singularities.

1 Introduction

Lorsque l'on résout les équations de Maxwell avec des termes sources réguliers dans un domaine polygonal ou polyédrique (à frontière lipschitzienne) non convexe, les solutions au lieu d'être dans $H^1(\Omega)^3$ comme dans le cas d'un domaine convexe ne sont plus que dans $H(\text{rot}; \Omega) \cap H(\text{div}; \Omega)$. De la même manière lorsque l'on résout un problème pour le laplacien scalaire avec une donnée dans $L^2(\Omega)$, la solution au lieu d'être dans $H^2(\Omega)$ est dans le cas régulier (polygonal ou polyédrique convexe, ou à frontière régulière) n'est plus que dans $H^{1+s}(\Omega)$, avec $0 < s < 1$. Grisvard [12] a montré qu'une solution du laplacien scalaire dans le cas général pouvait se décomposer en la somme d'une partie régulière et d'une partie singulière. Cette décomposition s'appuie sur une décomposition de $L^2(\Omega)$ en la somme de l'espace des images des parties régulières et de son orthogonal. Dans le cas d'un domaine polygonal de \mathbb{R}^2 , Grisvard [13] a complètement caractérisé ces deux espaces; à partir de ce résultat, nous avons introduit une décomposition orthogonale de la solution des équations de Maxwell et une méthode de calcul numérique a été proposée [2], [3]. Cette méthode peut se généraliser à un domaine polyédrique à frontière lipschitzienne dans la mesure où l'on peut obtenir une décomposition orthogonale de $L^2(\Omega)$ et décrire complètement chacun de ces termes.

Dans ce rapport nous proposons de généraliser les résultats obtenus dans [2], [3] au cas tridimensionnel, en prouvant en particulier que la solution des équations de Maxwell stationnaires peut également se décomposer en la somme orthogonale d'un terme régulier et d'un terme singulier. Nous montrons que cette décomposition est toujours liée à la décomposition de $L^2(\Omega)$ associée au laplacien scalaire, le but à terme étant de

¹UMA, ENSTA, 32, boulevard Victor, 75739 Paris Cedex 15

²CMAP, Ecole Polytechnique 91128 Palaiseau

³Institut Elie Cartan, Université Henri Poincaré Nancy 1, 54506 Vandoeuvre-les-Nancy

reconstruire, comme nous l'avons fait en dimension 2, la solution du problème dépendant du temps à partir de cette décomposition de la solution du problème stationnaire.

Le rapport s'organise comme suit. Dans un premier temps, nous détaillons la caractérisation de la décomposition orthogonale de $L^2(\Omega)$ dans le cas d'un domaine Ω polyédrique non convexe à frontière lipschitzienne obtenue par Assous-Ciarlet [1]. Pour un problème modèle associé aux équations de Maxwell stationnaires, nous introduisons une décomposition de l'espace des solutions, qui nous permet de caractériser à la fois les solutions singulières et les solutions régulières.

Dans cette dernière partie, nous établissons des résultats complémentaires à ceux obtenus par Costabel et Dauge [8], qui ont travaillé à l'étude explicite de la partie singulière de la solution. Dans cet esprit, Bonnet-Ben Dhia et al [4] ont récemment proposé une étude de la solution des équations de Maxwell fréquentielles par une méthode régularisante que l'on peut rapprocher de la théorie développée par Costabel et Dauge. L'originalité de notre approche réside d'une part dans l'étude théorique de la décomposition de $L^2(\Omega)$ et d'autre part, dans l'utilisation de décompositions orthogonales, qui permettent entre autres de définir précisément l'espace des solutions singulières.

2 Une caractérisation de l'orthogonal de $\Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ dans $L^2(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné polyédrique connexe et simplement connexe de \mathbb{R}^3 de frontière Γ connexe et lipschitzienne. On appelle $(\Gamma_i)_{1 \leq i \leq N_f}$ les faces de Γ .

Comme on l'a annoncé, on peut décomposer l'espace $L^2(\Omega)$ comme suit.

Théorème 2.1 *L'image par le laplacien de l'espace $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, que l'on note $\Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, est un fermé de $L^2(\Omega)$, on a donc la décomposition orthogonale suivante :*

$$L^2(\Omega) = \Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \oplus N. \quad (1)$$

Preuve : Ce résultat a été prouvé par Grisvard [12], et par Dauge [9]. ■

Les éléments de N sont souvent appelés les "singularités du laplacien" : dont on trouvera une classification en fonction de la géométrie ainsi que des exemples dans de nombreux ouvrages (voir en autres [9], [12], [13], [8]).

Il est possible de caractériser les éléments p de N .

Pour cela, notons $D(\Delta, \Omega)$ l'espace $\{q \in L^2(\Omega); \Delta q \in L^2(\Omega)\}$.

Par définition, chaque face Γ_j est un polygone, et donc de frontière $\partial\Gamma_j$ lipschitzienne. Pour un point $x \in \Gamma_j$, on appelle $\rho_j(x)$ la distance de x à $\partial\Gamma_j$. D'après [13], on a alors la définition suivante

Définition 2.1 *$\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$ est l'ensemble des fonctions f de $H^{1/2}(\Gamma_j)$ telles que $f/\sqrt{\rho_j}$ appartient à $L^2(\Gamma_j)$. On note $\|f\|_{\tilde{H}^{-1/2}, \Gamma_j} = (\|f\|_{L^2, \Gamma_j}^2 + \|f/\sqrt{\rho_j}\|_{L^2, \Gamma_j}^2)^{1/2}$ la norme associée.*

Enfin, on note $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j)$ le dual de $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$.

Maintenant, nous sommes en mesure de démontrer le théorème

Théorème 2.2 *$p \in N$ équivalent à*

$$p \in D(\Delta, \Omega); \quad \Delta p = 0, \quad p|_{\Gamma_i} = 0 \text{ dans } \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_i), \text{ pour } 1 \leq i \leq N_f.$$

Remarque 2.1 Ce résultat est l'analogue en dimension 3 de celui prouvé par Gritsvand en dimension 2 (cf [13]). On aurait bien sûr préféré une description globale de la trace de p sur le bord Γ tout entier, comme par exemple $p|_{\Gamma} = 0$. Ceci n'est malheureusement pas possible dans le cas d'un ouvert polyédrique (voir [13], remarque p.13), et c'est d'ailleurs probablement faux : en effet, on peut dire, de façon "imagée", que les coins et les arêtes reitranées sont les supports de distributions, qui correspondent physiquement à des charges "ponctuelles" ou à des distributions linéaires de courant. Cependant, cette caractérisation est suffisante pour pouvoir, par exemple, donner un sens aux formules d'intégration par parties, indispensables pour la suite (voir plus loin propositions 2.5 et 3.4). ■

Pour la preuve du théorème 2.2, nous avons besoin des cinq résultats techniques qui suivent. On a le premier résultat

Proposition 2.1 (i) *L'application trace normale sur Γ_j ; $\mathbf{g} \mapsto \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_j}$ est linéaire et continue de $\{\mathbf{g} \in H^1(\Omega)^3, \mathbf{g} \times \mathbf{n}_{\Gamma} = 0\}$ dans $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$.*

(ii) *L'application trace de la dérivée normale sur Γ_j ; $u \mapsto (\partial u / \partial n)|_{\Gamma_j}$, est linéaire et continue de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$.*

Preuve : Le résultat (ii) étant une conséquence immédiate de (i), nous démontrons uniquement le premier.

On suit [6] pour montrer que $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_j} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$. Pour alléger les notations, on omettra dans cette démonstration de signaler qu'il s'agit de trace lorsque c'est suffisamment clair.

Le domaine Ω étant à frontière lipschitzienne et régulière par morceaux, on sait que

$$\mathbf{g} \in H^{1/2}(\Gamma)^3, \text{ et } \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \in H^{1/2}(\Gamma_i), \quad 1 \leq i \leq N_F.$$

Classiquement [10], le fait que la trace de \mathbf{g} appartient à $H^{1/2}(\Gamma)^3$ est équivalent à

$$\mathbf{g} \in L^2(\Gamma)^3, \text{ et } \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} d\sigma(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{y}) < \infty, \quad (2)$$

où $d\sigma$ représente une mesure sur Γ : dans le cas d'un ouvert polyédrique, il s'agit, sur chaque face, de la mesure usuelle. On introduit maintenant, pour une face Γ_j et pour $R > 0$ donnés, l'ensemble

$$\Gamma_j(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \Gamma, d(\Gamma_j, \mathbf{x}) < R\} \text{ et on pose } \Gamma_j(R) = \bar{\Gamma}_j \cup \Gamma_j^+, \text{ avec } \bar{\Gamma}_j \cap \Gamma_j^+ = \emptyset.$$

On appelle \mathbf{n}_j la normale extérieure à Γ_j . La démonstration est faite en trois étapes :

(a) $\mathbf{g} \times \mathbf{n}_j \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j^+)^3$, avec

$$\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j^+) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in H^{1/2}(\Gamma_j^+), \int_{\mathbf{x} \in \Gamma_j^+} |f(\mathbf{x})|^2 \int_{\mathbf{y} \in \Gamma_j} \frac{d\sigma(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} d\sigma(\mathbf{x}) < \infty\}.$$

Notons que cette définition est "locale" à cette démonstration et ne doit pas être comparée à la définition (2.1). A partir de (2), par une majoration évidente, on déduit tout d'abord que

$$\mathbf{g} \times \mathbf{n}_j \in L^2(\Gamma_j^+)^3, \text{ et } \int_{\Gamma_j^+} \int_{\Gamma_j} \frac{\|\mathbf{g} \times \mathbf{n}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{g} \times \mathbf{n}_j(\mathbf{y})\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} d\sigma(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{y}) < \infty,$$

c'est-à-dire $\mathbf{g} \times \mathbf{n}_j \in H^{1/2}(\Gamma_j^+)$. On en déduit également que

$$\int_{\mathbf{x} \in \Gamma_j^+} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma_j} \frac{\|\mathbf{g} \times \mathbf{n}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{g} \times \mathbf{n}_j(\mathbf{y})\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} d\sigma(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{y}) < \infty.$$

Par définition, $\mathbf{g} \times \mathbf{n}_j = 0$ sur Γ_j : on conclut donc

$$\int_{\mathbf{x} \in \Gamma_j^+} \frac{\|\mathbf{g} \times \mathbf{n}_j(\mathbf{x})\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma_j} d\sigma(\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{x}) < \infty.$$

(b) $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_j \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j^+)$.

Il résulte du (a) qu'il existe deux directions $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (orthogonales à \mathbf{n}_j) telles que $(\partial \mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq 2} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j^+)^3$. Par ailleurs, par définition de \mathbf{g} , on a $\mathbf{g} \times \mathbf{n}_k = 0$ sur chaque face portion de face Γ_k incluse dans Γ_j^+ . Localement, il existe donc deux directions supplémentaires (dépendant de la portion de face Γ_k) $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ telles que $(\partial \mathbf{e}_i)_{3 \leq i \leq 4} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j^+)^3$. En conséquence, comme $\mathbf{n}_j \neq \mathbf{n}_k$, la famille $(\mathbf{e}_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq 4}$ engendre toujours l'espace tout entier, et on a $\mathbf{g} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j^+)^3$. Le point (b) en est une conséquence immédiate.

(c) $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_j \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$.

Ici, on va raisonner "à l'inverse" du point (a). D'après (2), on a d'une part $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_j \in H^{1/2}(\Gamma)$ et d'autre part

$$\int_{\mathbf{x} \in \Gamma_j} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma_j^+} \frac{\|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_j(\mathbf{y})\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} d\sigma(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{y}) < \infty.$$

Du point (b), on déduit

$$\int_{\mathbf{x} \in \Gamma_j} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma_j^+} \frac{\|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_j(\mathbf{y})\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} d\sigma(\mathbf{x})d\sigma(\mathbf{y}) < \infty.$$

En conséquence,

$$\int_{\mathbf{x} \in \Gamma_j} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma_j} \frac{\|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_j(\mathbf{x})\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} d\sigma(\mathbf{x}) < \infty. \quad (3)$$

D'après [12], si on se place dans Π_j , le plan engendré par la face Γ_j , il existe une constante positive $C_1(\Gamma_j)$ telle que

$$C_1 \theta_j(\mathbf{x})^{-1} \leq \int_{\mathbf{z} \in \Pi_j \setminus \Gamma_j} \frac{d\sigma(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2}. \quad (4)$$

Pour conclure, c'est-à-dire relier (3) et (4), il faut finir par un peu de géométrie. Dans un voisinage de Γ_j , on ramène Lipschitz-continûment Γ dans le plan Π_j par transformations locales. Si on appelle γ_j^+ le redressement de Γ_j^+ , on vérifie que les deux propriétés suivantes sont satisfaites, avec $C_2(\Omega) > 0$: soient $\mathbf{x} \in \Gamma_j$ et $\mathbf{z} \in \gamma_j^+$ d'antécédent \mathbf{y} , on a

$$C_2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \|\Pi_j\|, \text{ et } \min_{\mathbf{z}_i \notin \{\Gamma_j \cup \gamma_j^+\}} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}_i\| \|\Pi_j\| \geq C_2 R.$$

On en déduit sans peine que, pour $\mathbf{x} \in \Gamma_j$ donné,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{z} \in \Pi_j \cap \Gamma_j} \frac{d\sigma(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_{\Pi_j}^3} &= \int_{\mathbf{z} \in \Gamma_j^+} \frac{d\sigma(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_{\Pi_j}^3} + \int_{\mathbf{z} \in \Pi_j \setminus (\Gamma_j \cup \Gamma_j^+)} \frac{d\sigma(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_{\Pi_j}^3} \\ &\leq C_2' \int_{\mathbf{y} \in \Gamma_j^+} \frac{d\sigma(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} + \int_{r \geq C_2 R} \int_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \frac{r \, dr \, d\theta}{r^3} \\ &\leq C_2' \int_{\mathbf{y} \in \Gamma_j^+} \frac{d\sigma(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} + \frac{C_2''}{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

D'où finalement, grâce à (3)-(5) et au fait que $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_j \in L^2(\Gamma_j)$, on a

$$\int_{\Gamma_j} \frac{|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_j(\mathbf{x})|^2}{\rho_j(\mathbf{x})} d\sigma(\mathbf{x}) \leq C_1' \int_{\mathbf{x} \in \Gamma_j} \int_{\mathbf{y} \in \Gamma_j^+} \frac{|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_j(\mathbf{x})|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} d\sigma(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{y}) + \frac{C_1''}{C_1 R} \|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_j\|_{0, \Gamma_j}^2 < \infty.$$

Enfin, en reprenant la démonstration pas à pas, on en déduit qu'il existe une constante $C(\Gamma_j) > 0$ telle que

$$\|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_j\|_{\infty, 1/2, \Gamma_j} \leq C \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma_j}.$$

L'application trace normale sur Γ_j est donc continue de $\{\mathbf{g} \in H^1(\Omega)^3; \mathbf{g} \times \mathbf{n}_\Gamma = 0\}$ dans $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$. ■

Si maintenant on définit, pour une face Γ_j donnée,

$$H_j(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); (\frac{\partial v}{\partial n})|_{\Gamma_k} = 0 \text{ pour } k \neq j\},$$

on peut démontrer

Proposition 2.2 Soit μ' un élément de $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$, il existe un relèvement u' appartenant à $H_j(\Omega)$ tel que

$$\frac{\partial u'}{\partial n}|_{\Gamma_j} = \mu'.$$

Preuve : Une fois la face Γ_j fixée, on considère μ' une fonction de $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$. On appelle μ le prolongement de μ' par 0 à tout Π_j : par construction $\mu \in H^{1/2}(\Pi_j)$. On raisonne en deux temps, en suivant Necas [15] :

(a) Par partition de l'unité.

Suivant la Figure 1, on recouvre Γ_j par une union de rectangles (ouverts), c'est-à-dire⁴

$$\Gamma_j \subset \bigcup_{1 \leq r \leq R} G_r.$$

On associe aux rectangles $(G_r)_{1 \leq r \leq R}$ des fonctions $(\varphi_r)_{1 \leq r \leq R}$ telles que :

$$\varphi_r \in \mathcal{D}(G_r), \quad 0 \leq \varphi_r \leq 1, \quad \sum_r \varphi_r(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_j.$$

Ceci posé, on note $\mu_r = \varphi_r \mu \in H^{1/2}(\Pi_j)$, avec par construction $\mu_r = 0$ hors de $G_r \cap \Gamma_j$.

⁴Tout d'abord, on recouvre exactement Γ_j par une union d'ouverts quadrilatéraux (convexes) notés $(G_r)_{1 \leq r \leq R}$, $\Gamma_j \subset \bigcup_{1 \leq r \leq R} G_r$, et $\tilde{\Gamma}_j = \bigcup_{1 \leq r \leq R} \tilde{G}_r$. On étend dans un second temps chaque ouvert G_r tel que $\tilde{G}_r \cap \partial\Gamma_j \neq \emptyset$ en un rectangle \tilde{G}_r , ce qui permet d'inclure correctement les coins non convexes de $\partial\Gamma_j$.

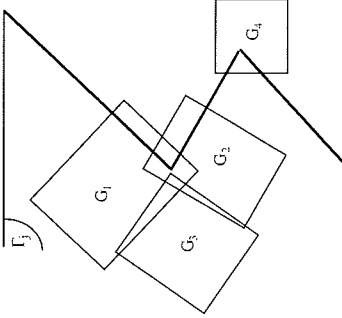


Figure 1: Recouvrement de Γ_j .

(b) Par relèvement.

On suppose que le plan Π_j est défini par $x_3 = 0$ et que Ω se trouve localement dans le demi-espace $x_3 > 0$.

Pour pouvoir relever la fonction μ_r définie sur G_r , on appelle P_r une pyramide droite de base G_r contenue dans $x_3 > 0$. Par application directe de la théorie développée par Necas, il existe un relèvement u_r , tel que :

$$u_r \in H^2(P_r); \quad \frac{\partial u_r}{\partial n}|_{G_r} = \mu_r; \quad u_r|_{G_r} = 0.$$

Comme de plus $\varphi_r \in \mathcal{D}(G_r)$, il existe $\psi_r \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ à support dans $P_r \cup G_r$ telle que $\psi_r|_{G_r} = \varphi_r$. On définit alors $u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq r \leq R} \psi_r u_r$ et on appelle u' sa restriction à Ω . Par construction, on a les propriétés :

$$u' \in H^2(\Omega); \quad \frac{\partial u'}{\partial n}|_{\Gamma_j} = \mu'; \quad u'|_{\Gamma_j} = 0.$$

Il reste maintenant à s'assurer que le relèvement est tel que

$$\frac{\partial u'}{\partial n}|_{\Gamma_k} = 0; \quad u'|_{\Gamma_k} = 0 \text{ pour } k \neq j. \quad (6)$$

En effet, si on reprend la démonstration de Necas, on construit "à la main" le relèvement u_r selon le principe suivant. On note $\mathbf{x}' = (x_1, x_2)$, et on suppose pour simplifier que $G_r = \{\mathbf{x}' \in]-1, 1[^2\}$ et que P_r à pour sommet $(0, 1)$.

Alors, pour $(\mathbf{x}', x_3) \in P_r$ (voir la Figure 2), on définit

$$u_r(\mathbf{x}', x_3) \stackrel{\text{def}}{=} x_3 \int_{\mathbf{z}' \in G_r} R(\mathbf{z}') \mu_r(x_3 \mathbf{z}' + \mathbf{x}') \, dz'. \quad (7)$$

Ici, R appartient à $\mathcal{E}(G_r)$, l'espace des fonctions indéfiniment continûment différentiables dans G_r , et continûment prolongeables pour 0 ainsi que toutes leurs dérivées dans \tilde{G}_r . En particulier, R ainsi que toutes ses dérivées s'annulent sur ∂G_r . De plus,

$$\int_{\mathbf{z}' \in G_r} R(\mathbf{z}') \, dz' = 1.$$

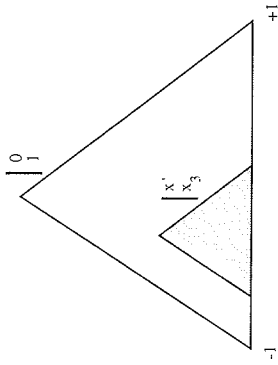


Figure 2: Cône de dépendance.

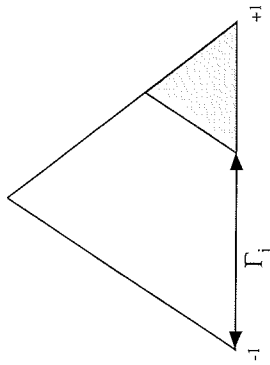


Figure 3: Zone de nullité du relèvement.

Avec le changement de variables $\mathbf{y}' = x_3 \mathbf{z}' + \mathbf{x}'$, (7) peut s'écrire de manière équivalente

$$u_r(\mathbf{x}', x_3) = \frac{1}{x_3} \int_{\|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|_{\Gamma_j} < x_3} R\left(\frac{\mathbf{y}' - \mathbf{x}'}{x_3}\right) \mu_r(\mathbf{y}') d\mathbf{y}'. \quad (8)$$

Ainsi, en un point (\mathbf{x}', x_3) de P_r , $u_r(\mathbf{x}', x_3)$ dépend de la valeur de μ_r sur une partie seulement de Γ_j (cf Figure 2).

Maintenant, soit Γ_k une face adjacente à Γ_j donnée : pour que la propriété (6) soit vérifiée sur cette face, il suffit que u_r s'annule dans un voisinage (inclus dans Ω) de Γ_k . Or, comme μ_r et par voie de conséquence μ_r , est nulle hors de Γ_j , u_r est nulle par construction dans la zone hachurée de la Figure 3.

Si Γ_k est incluse dans la zone hachurée, (6) est vérifiée. On traite donc le cas d'un angle θ_{jk} plus grand que $3\pi/4$, où θ_{jk} est l'angle du dièdre formé par Γ_j et Γ_k .

Si maintenant $\theta_{jk} \leq 3\pi/4$, on modifie la démonstration de Necas de la façon suivante : on considère un relèvement dans une pyramide oblique. Pour cela, on introduit le paramètre $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ et on définit la pyramide $P_{r,b}$ (cf Figure 4).

Dans ce cadre plus général, le relèvement se fait dans la direction de la bissectrice d'équation $\mathbf{x}' + x_3 \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Le cas de la pyramide droite correspond bien sûr à $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ et la bissectrice est normale au plan Π_j . La formule (8) devient ((7)) est modifiée de manière

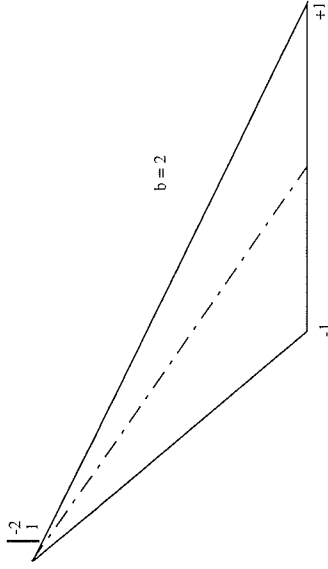


Figure 4: Une pyramide oblique.

similaire, voir (10))

$$u_r(\mathbf{x}', x_3) = \frac{1}{x_3} \int_{\|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|_{\Gamma_j} < x_3} R\left(\frac{\mathbf{y}' - \mathbf{x}'}{x_3}\right) \mu_r(\mathbf{y}' + x_3 \mathbf{b}) d\mathbf{y}'. \quad (9)$$

A partir de (9), on peut faire les observations suivantes :

- (i) On vérifie aisément que le domaine décrit par $\mathbf{y}' + x_3 \mathbf{b}$ reste dans G_r si et seulement si (\mathbf{x}', x_3) appartient à $P_{r,b}$ ⁵
- (ii) De même que le relèvement se fait selon la direction $(-\mathbf{b}, 1)$, on passe à la limite de la pyramide sur sa base en suivant la direction $(\mathbf{b}, -1)$.

(iii) On a :

$$u_r(\mathbf{x}', x_3) = x_3 \int_{\mathbf{z}' \in G_r} R(\mathbf{z}') \mu_r(x_3 \mathbf{z}' + \mathbf{x}' + x_3 \mathbf{b}) d\mathbf{z}'. \quad (10)$$

On en déduit donc que $u_r|_{G_r} = 0$.

(iv) La zone de nullité du relèvement est modifiée selon la Figure 5.

Il apparaît donc clairement que la propriété (6) est vérifiée dans le cas $0 < \theta_{jk} < 3\pi/4$.
Sous réserve que l'on a toujours :

$$\frac{\partial u_r}{\partial n_r} \Big|_{G_r} = \mu_r,$$

$$x_3 > 0, x_3 > \frac{x'_1 + 1}{1 - b_1}, x_3 < \frac{x'_1 - 1}{-1 - b_1}.$$

⁵ en 2d, les équations décrivant $P_{r,b}$ sont

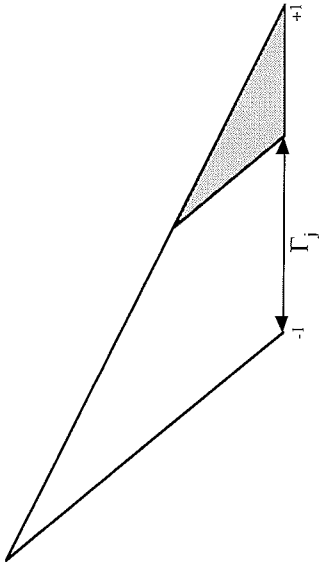


Figure 5: Zone de nullité du relèvement.

la preuve est achevée. Formellement, on obtient à partir de (10) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_r}{\partial x_3}(\mathbf{x}'; x_3) &= \int_{\mathbf{z}' \in G_r} R(\mathbf{z}') \mu_r(x_3 \mathbf{z}' + \mathbf{x}' + x_3 \mathbf{b}) d\mathbf{z}' + x_3 \int_{\mathbf{z}' \in G_r} R(\mathbf{z}') \frac{\partial}{\partial x_3} \mu_r(x_3 \mathbf{z}' + \mathbf{x}' + x_3 \mathbf{b}) d\mathbf{z}' \\
&= \int_{\mathbf{z}' \in G_r} R(\mathbf{z}') \mu_r(x_3 \mathbf{z}' + \mathbf{x}' + x_3 \mathbf{b}) d\mathbf{z}' \\
&\quad + x_3 \int_{\mathbf{z}' \in G_r} R(\mathbf{z}') (\mathbf{z}' + \mathbf{b}) \cdot \nabla \mu_r(x_3 \mathbf{z}' + \mathbf{x}' + x_3 \mathbf{b}) d\mathbf{z}' \\
&= \int_{\mathbf{z}' \in G_r} R(\mathbf{z}') \mu_r(x_3 \mathbf{z}' + \mathbf{x}' + x_3 \mathbf{b}) d\mathbf{z}' \\
&\quad + x_3 \mathbf{b} \cdot \int_{\mathbf{z}' \in G_r} R(\mathbf{z}') \nabla \mu_r(x_3 \mathbf{z}' + \mathbf{x}' + x_3 \mathbf{b}) d\mathbf{z}' \\
&\quad + x_3 \int_{\mathbf{z}' \in G_r} R(\mathbf{z}') \mathbf{z}' \cdot \nabla \mu_r(x_3 \mathbf{z}' + \mathbf{x}' + x_3 \mathbf{b}) d\mathbf{z}' \\
&= \int_{\mathbf{z}' \in G_r} R(\mathbf{z}') \mu_r(x_3 \mathbf{z}' + \mathbf{x}' + x_3 \mathbf{b}) d\mathbf{z}' \\
&\quad + \sum_{i=1,2} b_i \frac{\partial u_r}{\partial x_i}(\mathbf{x}'; x_3) + x_3 \int_{\mathbf{z}' \in G_r} R(\mathbf{z}') \mathbf{z}' \cdot \nabla \mu_r(x_3 \mathbf{z}' + \mathbf{x}' + x_3 \mathbf{b}) d\mathbf{z}' .
\end{aligned}$$

Suivant la théorie développée par Necas, on vérifie pour finir que le premier terme tend vers $\mu_r(\mathbf{x}')$, que le second tend vers 0 (car $\frac{\partial u_r}{\partial x_i} = 0$) et enfin que le troisième tend vers 0 du fait de la présence de x_3 en facteur. ■

Proposition 2.3 Pour une face Γ_j donnée, il existe une constante $C(\Gamma_j)$ et une fonction $u \in H_j(\Omega)$ telles que

$$\frac{\partial u}{\partial n_i \Gamma_j} = \mu \text{ et } \|u\|_2 \leq C \|\mu\|_{-1/2, \Gamma_j}, \quad \forall \mu \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j).$$

Preuve : On considère l'application : $u \in H_j(\Omega) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial n_i \Gamma_j} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$.

D'après les propositions 2.1 et 2.2 respectivement, elle est linéaire et continue d'une part, et surjective d'autre part. De plus son noyau est $\{u \in H_j(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n_i \Gamma_j} = 0\} = H_0^1(\Omega)$.

L'application $u \longmapsto \frac{\partial u}{\partial n_i \Gamma_j}$ est donc bijective, linéaire et continue de $H_j(\Omega)/H_0^1(\Omega)$ dans $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$.

L'application réciproque est donc elle aussi continue d'après le théorème de Banach-Steinhaus (voir par exemple [5]). La conclusion suit. ■

On a maintenant

Proposition 2.4 L'espace $H^2(\Omega)$ est dense dans $D(\Delta, \Omega)$ muni de la norme du graphe $\|q\|_D = \{\|q\|_0^2 + \|\Delta q\|_0^2\}^{1/2}$.

Preuve : Tout d'abord, on a le résultat $H^2(\mathbb{R}^3) = D(\Delta, \mathbb{R}^3)$. En effet, si on appelle \hat{v} la transformée de Fourier de v , on sait que

$$H^2(\mathbb{R}^3) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^3); (1 + \|\zeta\|^2)\hat{v}(\zeta) \in L^2(\mathbb{R}^3)\};$$

mais $\|\zeta\|^2 \hat{v}(\zeta) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ signifie simplement que $\Delta v \in L^2(\mathbb{R}^3)$, par transformée de Fourier inverse.

A partir de là, on va montrer que toute forme linéaire continue sur $D(\Delta, \Omega)$ qui s'annule sur $H^2(\Omega)$ est nulle partout.

Soit $f \in D(\Delta, \Omega)'$. Comme $D(\Delta, \Omega)$ est un espace de Hilbert pour $\|\cdot\|_D$, il existe $q \in D(\Delta, \Omega)$ telle que

$$f(u) = \int_{\Omega} qu \, dx + \int_{\Omega} \Delta q \Delta u \, dx, \quad \forall u \in D(\Delta, \Omega).$$

Soit \tilde{q} (respectivement \hat{Q}) le prolongement de q (resp. Δq) par 0 à \mathbb{R}^3 . D'après [11], comme Ω est de frontière lipschitzienne, les éléments de $H^2(\Omega)$ peuvent être définis par restriction à Ω d'éléments de $H^2(\mathbb{R}^3)$. On déduit alors de la nullité de f sur $H^2(\Omega)$ que

$$\int_{\Omega} \tilde{q} u \, dx + \int_{\Omega} \hat{Q} \Delta u \, dx = 0, \quad \forall u \in H^2(\mathbb{R}^3).$$

Par intégration par parties, on obtient $\tilde{q} = -\Delta \hat{Q}$ et par suite $\hat{Q} \in D(\Delta, \mathbb{R}^3) = H^2(\mathbb{R}^3)$. A partir de là, on en déduit que la restriction de \hat{Q} à Ω , c'est-à-dire Δq , appartient à $H_0^2(\Omega)$. À l'aide de la densité des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^2(\Omega)$, on peut intégrer par parties le second terme de $f(u)$ pour finalement obtenir

$$f(u) = - \int_{\Omega} (g + \Delta^2 q) u \, dx = 0, \quad \forall u \in D(\Delta, \Omega);$$

car $q = -\Delta(\Delta q)$. ■

Enfin, on a

Proposition 2.5 Si p appartient à $D(\Delta, \Omega)$, on a $p|_{\Gamma_i} \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_i)$ pour tout $1 \leq i \leq N_F$. De plus,

$$\int_{\Omega} p \Delta v \, dx - \int_{\Omega} v \Delta p \, dx = \sum_i (p|_{\Gamma_i}, \frac{\partial v}{\partial n_i}|_{\Gamma_i})_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_i), \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_i)}; \quad \forall (p, v) \in D(\Delta, \Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)). \quad (11)$$

Preuve : En effet, pour tous les couples $(u, v) \in H^2(\Omega)^2$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \Delta v \, dx - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx &= \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma \\ &= \sum_i \int_{\Gamma_i} u_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_{\Gamma_i} \, d\sigma_i - \sum_i \int_{\Gamma_i} v_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\Gamma_i} \, d\sigma_i. \end{aligned}$$

On a, pour tout $(u, v) \in H^2(\Omega) \times H_j(\Omega)$,

$$\int_{\Gamma_j} u_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_{\Gamma_j} \, d\sigma_j = \int_{\Omega} u \Delta v \, dx - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx.$$

En conséquence,

$$\left| \int_{\Gamma_j} u_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_{\Gamma_j} \, d\sigma_j \right| \leq \|u\|_D \|v\|_2.$$

D'après la proposition 2.3, pour tout élément μ de $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$, il existe v de $H_j(\Omega)$ tel que $\frac{\partial v}{\partial n} = \mu$ sur Γ_j et $\|v\|_2 \leq C \|\mu\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)}$. Ainsi,

$$\left| \int_{\Gamma_j} u_{\Gamma_j} \mu_{\Gamma_j} \, d\sigma_j \right| \leq C \|u\|_D \|\mu\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)}, \quad \forall \mu \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j).$$

En d'autres termes,

$$\|u_{\Gamma_j}\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j)} \leq C \|u\|_D. \quad (12)$$

Par densité de $H^2(\Omega)$ dans $D(\Delta, \Omega)$ (voir la proposition 2.4), on en déduit finalement que l'application trace qui à u associe u_{Γ_j} est continue de $D(\Delta, \Omega)$ dans $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j)$. Ceci démontre en particulier le premier point.

En ce qui concerne (11), on sait qu'elle est vérifiée pour tout couple (p, v) de $H^2(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, puisque $(\frac{\partial v}{\partial n})_{\Gamma_j}$ appartient à $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$ d'après la proposition 2.1. De plus, chaque côté de (11) est continu en variable p pour la norme $\|\cdot\|_D$, d'après (12). On conclut donc encore une fois par densité de $H^2(\Omega)$ dans $D(\Delta, \Omega)$. ■

Pour finir, le théorème 2.2 est bien évidemment une conséquence directe de la définition de \mathcal{N} et des résultats précédents.

3 Une application aux équations de Maxwell

3.1 Le problème modèle

On rappelle que Ω est un ouvert polyédrique connexe et simplement connexe de \mathbb{R}^3 de frontière Γ connexe et lipschitzienne. Considérons

$$X = \{ \mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\mathbf{div}, \Omega), \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

l'espace de Hilbert muni du produit scalaire canonique de $H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\mathbf{div}, \Omega)$ et

$$V = \{ \mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\mathbf{div}, \Omega), \mathbf{div} \, \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

l'espace de Hilbert muni du produit scalaire canonique de $H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\mathbf{div}, \Omega)$.

Étant données une fonction $g \in L^2(\Omega)$, et une fonction $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$ vérifiant $\mathbf{div} \, \mathbf{f} = 0$ et $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ , on considère le problème suivant :

Trouver $\mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\mathbf{div}, \Omega)$ telle que :

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega \quad (13)$$

$$\mathbf{div} \, \mathbf{u} = g \text{ dans } \Omega \quad (14)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (15)$$

Théorème 3.1 Soient $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$ vérifiant $\mathbf{div} \, \mathbf{f} = 0$ et $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ et $g \in L^2(\Omega)$. Alors le problème (13)-(15) admet une unique solution $\mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\mathbf{div}, \Omega)$.

Preuve : La preuve peut se faire à l'aide de la théorie des problèmes mixtes en introduisant un multiplicateur de Lagrange pour la condition de divergence (14) (voir Girault-Raviart [11]).

Tout d'abord, la solution de (13)-(15), si elle existe, est unique, car d'après le lemme de Peetre (voir par exemple [11]), on sait que $\|\mathbf{v}\|_X = \{ \|\mathbf{div} \, \mathbf{v}\|_0^2 + \|\mathbf{rot} \, \mathbf{v}\|_0^2 \}^{1/2}$ est une norme équivalente à la norme canonique sur X . Ensuite, elle est également solution du problème variationnel (si $p = 0$) :

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in X \times L^2(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} p \, \mathbf{div} \, \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in X. \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{div} \, \mathbf{u} \, q \, dx = \int_{\Omega} g \, q \, dx \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (17)$$

Il nous reste donc à montrer que le problème variationnel (16)-(17) admet une unique solution. On va faire cela en s'aidant de la théorie inf-sup (voir par exemple [11]). D'après Weber [16], la forme bilinéaire $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{rot} \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{v} \, dx$ est coercitive sur le noyau de la forme bilinéaire de (17), c'est-à-dire V . Ensuite la condition inf-sup est satisfaite. En effet, soit $q \in L^2(\Omega)$. Alors en prenant $\mathbf{v} = \nabla \xi$ avec $\xi \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta \xi = q$, on a $\mathbf{v} \in X$ et

$$\int_{\Omega} q \, \mathbf{div} \, \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} q \Delta \xi \, dx = \int_{\Omega} q^2 \, dx.$$

Il en résulte que

$$\inf_{q \in L^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{\int_{\Omega} q \, \mathbf{div} \, \mathbf{v} \, dx}{\|\mathbf{v}\|_X \|q\|_0} \geq 1.$$

Donc le problème (16)-(17) a bien une solution unique.

Enfin, soit $\mathbf{v} = \nabla \xi$ avec $\xi \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta \xi = p$, on a $\mathbf{v} \in X$. Alors (16) donne

$$\int_{\Omega} p^2 \, dx = 0,$$

ce qui va nous permettre de conclure. En effet, (16) devient

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in X.$$

D'où $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \, \mathbf{u} - \mathbf{f}) = 0$ et par conséquent, il existe $\varphi \in H^1(\Omega)$ telle que $\mathbf{rot} \, \mathbf{u} - \mathbf{f} = \nabla \varphi$. En particulier,

$$\|\nabla \varphi\|_0^2 = \int_{\Omega} \mathbf{rot} \, \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Comme $\mathbf{u} \in X$, le premier terme s'annule en intégrant par parties. Il en est de même pour le second, grâce aux hypothèses faites sur \mathbf{f} . La conclusion suit. ■

Remarque 3.1 L'équation (14) peut se ramener au cas $g = 0$ en posant $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \nabla\psi$, ψ étant l'unique élément de $H_0^1(\Omega)$ vérifiant $\Delta\psi = g$. La fonction ψ vérifie un problème en laplacien (dont l'étude a été réalisée par Grisvard [12]) que l'on résout par la formulation variationnelle classique. Pour simplifier l'exposé, nous supposons donc dans toute la suite que $g = 0$. ■

3.2 Décomposition de l'espace des solutions de (13)-(15)

Introduisons les espaces de solutions régulières

$$X_R = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3; \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}; \quad X_{R,j} = \{\mathbf{v} \in X_R; \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_k} = 0 \text{ pour } k \neq j\}$$

et

$$V_R = \{\mathbf{z} \in H^1(\Omega)^3; \operatorname{div} \mathbf{z} = 0, \mathbf{z} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Proposition 3.1 Les espaces X_R et V_R sont fermés respectivement dans X et V .

Preuve : Sur l'espace X_R , Costabel a montré dans [7] que, lorsque le domaine est polyédrique, on a l'égalité des formes bilinéaires

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w} \, dx. \quad (18)$$

Cette égalité reste bien entendu vérifiée sur V_R . Les résultats annoncés en sont une conséquence directe. ■

On a les résultats suivants, pour une face Γ_j donnée.

Proposition 3.2 Soit μ appartenant à $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$, il existe un relèvement $\mathbf{v} \in X_{R,j}$ tel que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_j} = \mu.$$

Preuve : Une fois la face Γ_j fixée, on considère $\mu \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$. On suppose que Γ_j est incluse dans le plan d'équation $z_3 = 0$. On raisonne en deux temps :

(a) Cas d'une fonction scalaire.

Si on appelle $\tilde{\mu}$ le prolongement de μ par 0 à Γ , on a $\tilde{\mu} \in H^{1/2}(\Gamma)$. D'après Necas [15], il existe $z_3 \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$z_{3|\Gamma} = \tilde{\mu}.$$

(b) Cas d'une fonction vectorielle.

Si on prend $z_1 = z_2 = 0$ et qu'on note $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$, on a $\mathbf{z} \in H^1(\Omega)^3$. Par construction,

$$z_{|\Gamma_k} = 0 \text{ pour } k \neq j; \quad \mathbf{z} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_j} = 0 \text{ et } \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_j} = \mu.$$

En d'autres termes, $\mathbf{z} \in X_{R,j}$ est un relèvement de μ . ■

Proposition 3.3 Pour une face Γ_j donnée, il existe une constante $C(\Gamma_j)$ et une fonction $\mathbf{v} \in X_{R,j}$ telles que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_j} = \mu \text{ et } \|\mathbf{v}\|_1 \leq C \|\mu\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)}; \quad \forall \mu \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j).$$

Preuve : On considère cette fois l'application : $\mathbf{v} \in X_{R,j} \longrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_j} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$.

D'après les propositions 2.1 et 3.2 respectivement, elle est linéaire et continue d'une part, et surjective d'autre part. De plus son noyau est $\{\mathbf{v} \in X_{R,j}; \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_j} = 0\} = H_0^1(\Omega)^3$.

L'application $\mathbf{v} \longmapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_j}$ est donc bijective, linéaire et continue de $X_{R,j}/H_0^1(\Omega)^3$ dans $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$.

L'application réciproque est donc elle aussi continue d'après le théorème de Banach-Steinhaus. La conclusion suit. ■

Proposition 3.4 On a la formule d'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} \forall (p, \mathbf{v}) \in D(\Delta, \Omega) \times X_R, \\ < \nabla p, \mathbf{v} >_{X_R, X_R} + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \sum_i \langle p|_{\Gamma_i}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i} \rangle_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_i), \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_i)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Preuve : Soit $p \in D(\Delta, \Omega)$ et $(p_k)_k$ une suite d'éléments de $H^2(\Omega)$ telle que $p_k \rightarrow p$ dans $D(\Delta, \Omega)$. Pour $\mathbf{v} \in X_R$, on a la formule

$$\int_{\Omega} \nabla p_k \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} p_k \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \sum_i \int_{\Gamma_i} p_k|_{\Gamma_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i} \, d\sigma_i.$$

Comme $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_j} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$, on déduit de (12), proposition 2.5, que

$$\int_{\Gamma_j} p_k|_{\Gamma_j} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_j} \, d\sigma_j \rightarrow < p|_{\Gamma_j}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_j} \rangle_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j), \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)}.$$

Par ailleurs, comme $\int_{\Omega} p_k \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \rightarrow \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx$, le terme $\int_{\Omega} \nabla p_k \mathbf{v} \, dx$ admet une limite lorsque $k \rightarrow +\infty$. De plus, pour $k \neq l$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\nabla p_k - \nabla p_l) \mathbf{v} \, dx \right| &\leq \|p_k - p_l\|_0 \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_0 + \sum_i \|p_k - p_l\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_i)} \|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_i)} \\ &\leq C \|p_k - p_l\|_D \|\mathbf{v}\|_X, \end{aligned} \quad (20)$$

d'après la proposition 2.5 pour $(p_k - p_l)$ et la proposition 2.1 pour \mathbf{v} . Ainsi, $(\nabla p_k)_k$ est une suite de Cauchy dans le dual de X_R . Elle admet donc une limite dans cet espace. Par ailleurs,

$$\nabla p_k \rightarrow \nabla p \text{ dans } H^{-1}(\Omega)^3.$$

Comme de plus $H_0^1(\Omega)^3 \subset X_R$, on a $X'_R \subset H^{-1}(\Omega)^3$ et en conséquence $(\nabla p_k)_k$ converge dans X'_R vers ∇p . La conclusion suit. ■

Dans le cas où la frontière Γ est régulière ou lorsque le domaine Ω est convexe on a l'égalité $V_R = V$. Mais dans le cas qui nous intéresse V_R est un sous-espace propre de V . Notons V_S l'orthogonal de V_R dans V pour la norme $\mathbf{v} \mapsto \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_0$ (qui est bien une norme équivalente à la norme canonique d'après [16]). On peut alors écrire la décomposition en somme directe orthogonale

$$V = V_R \dot{\oplus} V_S. \quad (21)$$

La caractérisation de l'espace V_S est donnée par :

Théorème 3.2 Soit \mathbf{u} un élément de V . Alors \mathbf{u} appartient à V_S si et seulement si il existe une unique $p \in N$ vérifiant $\mathbf{rot rot u} = \nabla p$ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$.

Preuve : Soit $\mathbf{u} \in V_S$. Alors, \mathbf{u} est dans l'orthogonal de V_R , donc pour tout $\mathbf{z} \in V_R$

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot u} \cdot \mathbf{rot z} \, dx = 0$$

et en particulier en prenant $\mathbf{z} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$ tel que $\text{div z} = 0$, on peut écrire

$$(\mathbf{rot rot u}, \mathbf{z})_{\mathcal{D}}, p = 0.$$

Il en résulte, en utilisant une version simplifiée d'un théorème du à De Rham (voir [11] lemme 2.1), qu'il existe $p \in L^2(\Omega)$, p unique à une constante près, telle que

$$\mathbf{rot rot u} = \nabla p \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)^3.$$

On en déduit immédiatement que $\Delta p = 0$ et donc que $p \in D(\Delta, \Omega)$. Par ailleurs, comme $\mathbf{rot rot u} \in \mathbf{rot} L^2(\Omega)^3$, on a en fait

$$\mathbf{rot rot u} = \nabla p \text{ dans } H_0(\mathbf{rot}, \Omega).$$

Il est donc licite d'écrire, comme $V_R \subset H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, que,

$$\begin{aligned} \langle \nabla p, \mathbf{z} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}), H_0(\mathbf{rot})} &= \langle \mathbf{rot rot u}, \mathbf{z} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}), H_0(\mathbf{rot})} \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{rot u} \cdot \mathbf{rot z} \, dx = 0, \quad \forall \mathbf{z} \in V_R. \end{aligned}$$

Or, puisque X_R est dense dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, on peut écrire

$$\langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle_{X_R', X_R} = \langle \mathbf{rot rot u}, \mathbf{v} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}), H_0(\mathbf{rot})} \quad \forall \mathbf{v} \in X_R.$$

D'après (19), on obtient donc

$$\sum_j \langle p|_{\Gamma_j}, \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_j} \rangle_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j), \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)} = 0, \quad \forall \mathbf{z} \in V_R. \quad (22)$$

On va maintenant utiliser le théorème 2.2 pour montrer l'appartenance de p à N .

Soit $\mu_j \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$ telle que $\int_{\Gamma_j} \mu_j \, d\sigma_j = 0$: la proposition 3.2 nous permet d'affirmer qu'il existe $\mathbf{v}_j \in X_{R,j}$ tel que $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_j} = \mu_j$. Par construction, $\int_{\Omega} \text{div v}_j \, dx = 0$. D'après [11], il existe $\mathbf{w}_j \in H_0^1(\Omega)^3$ telle que

$$\text{div w}_j = \text{div v}_j.$$

Posons $\mathbf{z}_j = \mathbf{v}_j - \mathbf{w}_j$: \mathbf{z}_j appartient à V_R et de plus $\mathbf{z}_j \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_j} = \mu_j$, $\mathbf{z}_j \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_k} = 0$ pour $k \neq j$. En conséquence (voir (22)),

$$\langle p|_{\Gamma_j}, \mu_j \rangle_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j), \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)} = 0.$$

Soit maintenant $\mu_j^0 \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$ telle que $\int_{\Gamma_j} \mu_j^0 \, d\sigma_j = 1$. Pour une fonction μ_j quelconque de $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$, soit

$$\mu_j = \mu_j - \left(\int_{\Gamma_j} \mu_j \, d\sigma_j \right) \mu_j^0.$$

Alors, en appliquant le raisonnement ci-dessus à μ_j^0 on trouve que

$$\langle p|_{\Gamma_j}, \mu_j^0 \rangle_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j), \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)} = \lambda_j(p) \int_{\Gamma_j} \mu_j^0 \, d\sigma_j,$$

avec $\lambda_j(p) = \langle p|_{\Gamma_j}, \mu_j^0 \rangle_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j), \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)}$. On peut appliquer le même raisonnement sur chaque face.

Si on prend maintenant $j \neq k$: pour un couple (μ_j, μ_k) de $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ tel que $\int_{\Gamma_j} \mu_j \, d\sigma_j + \int_{\Gamma_k} \mu_k \, d\sigma_k = 0$, il existe, toujours d'après la proposition 3.2, $\mathbf{v} \in X_R$ tel que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_j} = \mu_j$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_k} = \mu_k$ et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_l} = 0$ pour $l \notin \{j, k\}$. Comme $\int_{\Omega} \text{div v} \, dx = 0$, il existe d'après [11] \mathbf{w} un élément de $H_0^1(\Omega)^3$ tel que $\text{div w} = \text{div v}$. La différence $(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ appartient à V_R et (22) nous permet cette fois d'obtenir

$$(\lambda_j(p) - \lambda_k(p)) \int_{\Gamma_j} \mu_j \, d\sigma_j = 0.$$

Ainsi, il existe une valeur $\lambda(p)$ telle que $\lambda_j(p) = \lambda(p)$ pour tout j . Alors,

$$\langle p|_{\Gamma_j}, \mu_j \rangle_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j), \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)} = \lambda(p) \int_{\Gamma_j} \mu_j \, d\sigma_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, N_F\}, \quad \forall \mu_j \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j),$$

ou, de manière équivalente,

$$\langle (p - \lambda(p))|_{\Gamma_j}, \mu_j \rangle_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j), \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)} = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N_F\}, \quad \forall \mu_j \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_j).$$

La fonction $p - \lambda(p)$ appartient donc bien à N , selon la caractérisation du théorème 2.2.

Réciproquement, soit \mathbf{u} un élément de V tel qu'il existe $p \in N$ vérifiant $\mathbf{rot rot u} = \nabla p$ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$. Le théorème 2.2 et la formule d'intégration par parties (19) nous permettent d'affirmer que

$$\langle \nabla p, \mathbf{z} \rangle_{X_R', X_R} = 0, \quad \forall \mathbf{z} \in V_R.$$

Toujours par densité de X_R dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, on a

$$\langle \mathbf{rot rot u}, \mathbf{z} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}), H_0(\mathbf{rot})} = \langle \nabla p, \mathbf{z} \rangle_{X_R', X_R} = 0, \quad \forall \mathbf{z} \in V_R.$$

On obtient finalement

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot u} \cdot \mathbf{rot z} \, dx = 0, \quad \forall \mathbf{z} \in V_R$$

c'est-à-dire que \mathbf{u} appartient à V_S . ■

Remarque 3.2 Dans la preuve précédente, la fonction constante λ possède les propriétés nécessaires, c'est-à-dire ici $\lambda \in D(\Delta, \Omega)$, $\Delta \lambda = 0$. Notons également que p a été défini à une constante près lors de l'utilisation du théorème de De Rham : on peut donc bien considérer $(p - \lambda(p))$ plutôt que p et fixer ainsi la constante. ■

On peut donner une autre démonstration du théorème 3.2. Celle-ci se fait en deux étapes. On a tout d'abord le théorème

Théorème 3.3 Soit $\mathbf{u} \in V$. Alors \mathbf{u} appartient à V_S si et seulement si il existe une fonction $p \in L^2(\Omega)$ unique telle que

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot u} \cdot \mathbf{rot v} \, dx + \int_{\Omega} p \, \text{div v} \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in X_R.$$

Preuve : Soit $\mathbf{u} \in V$, on a $\mathbf{u} \in V_S$ si et seulement si

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{z} \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in V_R.$$

Considérons alors la forme linéaire

$$\mathbf{v} \rightarrow \langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dx$$

définie et continue sur X_R qui s'annule sur V_R . En particulier, c'est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)^3$ qui s'annule sur

$$V = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

D'après le théorème de de Rham, il existe donc $p \in L^2(\Omega)$ (définie pour l'instant à une constante près) telle que

$$\langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3.$$

Soit maintenant $\mathbf{v} \in X_R$; on commence par supposer que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = 0.$$

D'après [11], il existe alors une fonction $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^3$ telle que $\operatorname{div} \mathbf{w} = -\operatorname{div} \mathbf{v}$.

Alors la fonction $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ de X_R vérifie $\operatorname{div}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = 0$, de sorte que $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V_R$. On en déduit que

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \, dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w} \, dx = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{w} \, dx = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx,$$

soit

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = 0.$$

Considérons alors une fonction $\mathbf{v} \in X_R$ quelconque. On introduit une fonction $\phi_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ telle que $\int_{\Omega} \Delta \phi_0 \, dx = 1$ et on pose $\mathbf{v}_0 = \mathbf{grad} \phi_0$. Ainsi,

$$\mathbf{v}_0 \in X_R, \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \, dx = 1.$$

On pose ensuite

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \left(\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \right) \mathbf{v}_0;$$

de sorte que $\tilde{\mathbf{v}} \in X_R$ vérifie

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} \, dx = 0.$$

De cette manière, on a

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{v}} \, dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} \, dx = 0.$$

Mais $\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{rot} \mathbf{v}$ et donc

$$\int_{\Omega} p \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} \, dx = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx - \left(\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \, dx \right) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} (p - \lambda(p)) \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx.$$

où

$$\lambda(p) = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \, dx.$$

(On remarque que $p - \lambda(p)$ est déterminé de manière unique). En remplaçant $p - \lambda(p)$ par p , on obtient finalement que

$$\int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + p \operatorname{div} \mathbf{v}) \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in X_R.$$

Réciproquement si $\mathbf{u} \in V$ vérifie la propriété précédente, on a de manière évidente

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{z} \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in V_R.$$

de sorte que $\mathbf{u} \in V_S$. Bien sûr, l'unicité de p découle immédiatement de la propriété $\mathbf{u} \in V_S$ et de la première partie de la démonstration. ■

La deuxième étape de la démonstration consiste en une caractérisation plus explicite de p .

Lemme 3.1 Soit \mathbf{u} un élément de $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$. Alors $p \in L^2(\Omega)$ vérifie

$$\int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + p \operatorname{div} \mathbf{v}) \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in X_R$$

si et seulement si

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} = \nabla p \text{ dans } H_0(\mathbf{rot}, \Omega)', \text{ et } p \in N.$$

Preuve : En prenant $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$, on a immédiatement $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} = \nabla p$, dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)'$; puisque $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) \in \mathbf{rot} L^2(\Omega)^3 \subset H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$. En choisissant $\mathbf{v} = \nabla \phi$, $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on trouve

$$\int_{\Omega} p \Delta \phi \, dx = 0;$$

de sorte que $p \in \Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^\perp = N$.

Réciproquement, si $p \in N$ vérifie $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} = \nabla p$ dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, on a d'une part

$$\langle \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}), H_0(\mathbf{rot})} = \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in X_R.$$

D'autre part (cf (19) proposition 3.4)

$$\begin{aligned} \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle_{X_R', X_R} &= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx + \sum_k (p \Gamma_k, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_k}) \bar{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \bar{H}^{1/2}(\Gamma_k) \\ &= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in X_R. \end{aligned}$$

Or, puisque X_R est dense dans $H_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, on a

$$\langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle_{X_R', X_R} = \langle \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H_0(\mathbf{rot}), H_0(\mathbf{rot})}, \quad \forall \mathbf{v} \in X_R.$$

Le résultat suit. ■

Le théorème 3.2 est alors une conséquence directe du théorème 3.3 et du lemme 3.1.

Remarque 3.3 On peut également constater que dans le cas qui nous intéresse, X_R est un sous-espace fermé de X . Notons X_S l'orthogonal de X_R dans X pour le produit scalaire

$$(v; w) \mapsto \int_{\Omega} \text{rot } v \cdot \text{rot } w \, dx + \int_{\Omega} \text{div } v \, \text{div } w \, dx.$$

On a alors la décomposition en somme directe orthogonale

$$X = X_R \dot{+} X_S. \quad (23)$$

La solution de (13)-(15) peut être écrite sous la forme $\mathbf{u} = \mathbf{u}'_R + \mathbf{u}'_S$ avec $(\mathbf{u}'_R; \mathbf{u}'_S) \in X_R \times X_S$. En particulier, on obtient immédiatement par définition de N que

$$\text{div } \mathbf{u}'_S \in N.$$

Ainsi, si $\text{div } \mathbf{u} = 0$, on a automatiquement $\text{div } \mathbf{u}'_R \in N$. ■

3.3 Formulation point-selle

On en arrive maintenant à une formulation point-selle dans $H^1(\Omega)^3$ du problème : trouver $\mathbf{u} \in V$ solution de

$$\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

On a déjà vu, cf (16)-(17), que \mathbf{u} est solution de

$$\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in X \quad (24)$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \, q \, dx = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (25)$$

On utilise la décomposition

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_S \quad \mathbf{u}_R \in V_R; \quad \mathbf{u}_S \in V_S.$$

A \mathbf{u}_S on associe la fonction $p \in N$ unique telle que

$$\text{rot } \text{rot } \mathbf{u}_S = \nabla p \text{ dans } H_0(\text{rot}; \Omega).$$

On peut alors caractériser le couple (\mathbf{u}_R, p) de la partie régulière \mathbf{u}_R et de la fonction p associé à la solution singulière \mathbf{u}_S de la solution \mathbf{u} comme solution d'un problème de point-selle dans l'espace $X_R \times L^2(\Omega)$.

Théorème 3.4 *Le couple (\mathbf{u}_R, p) est la solution unique du problème :* trouver $(\mathbf{u}_R, p) \in X_R \times L^2(\Omega)$ solution de

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{u}_R \cdot \text{rot } \mathbf{v} - p \, \text{div } \mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in X_R, \quad (26)$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}_R \, q \, dx = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (27)$$

Preuve : Vérifions que (\mathbf{u}_R, p) est effectivement solution du problème précédent. D'après (24), on a

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{u}_R \cdot \text{rot } \mathbf{v} + \text{rot } \mathbf{u}_S \cdot \text{rot } \mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in X.$$

En prenant $\mathbf{v} \in X_R$ et en tenant compte de la définition de p , on a

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{u}_R \cdot \text{rot } \mathbf{v} - p \, \text{div } \mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in X_R,$$

ce qui prouve notre assertion.

Il reste à vérifier l'unicité de la solution. Si $(\mathbf{u}_R, p) \in X_R \times L^2(\Omega)$ vérifie (26)-(27) avec $\mathbf{f} = 0$, en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}_R \in V_R$, on obtient $\text{rot } \mathbf{u}_R = 0$ et, puisque $\mathbf{u} \mapsto \|\text{rot } \mathbf{u}\|_0$ est une norme sur V , $\mathbf{u}_R = 0$. Ainsi

$$\int_{\Omega} p \, \text{div } \mathbf{v} \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in X_R.$$

En particulier, $\nabla p = 0$, c'est-à-dire que p est une constante. D'où

$$p \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in X_R;$$

soit évidemment $p = 0$. ■

Ceci nous permet de prouver le théorème 3.4. Cependant, nous pouvons également vérifier l'existence et l'unicité de la solution du problème de point-selle (26)-(27) grâce à la théorie inf-sup. Tout d'abord, nous savons que la forme bilinéaire $\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{u}_R \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, dx$ est coercitive sur V_R . Il nous reste donc simplement à prouver que la condition inf-sup qui suit est vraie :

Théorème 3.5 *Il existe une constante $\beta > 0$ telle que*

$$\sup_{\mathbf{v} \in X_R} \frac{\int_{\Omega} p \, \text{div } \mathbf{v} \, dx}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq \beta \|p\|_0 \quad \forall p \in L^2(\Omega). \quad (28)$$

C'est une conséquence directe de la

Proposition 3.5 *L'application divergence de $X_R \mapsto L^2(\Omega)$ est surjective, i.e.*

$$\text{div } X_R = L^2(\Omega).$$

Preuve : Les inclusions suivantes sont réalisées

$$H_0^1(\Omega)^3 \subset X_R \text{ et } \nabla(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \subset X_R.$$

Maintenant, puisque $L_0^2(\Omega) = \text{div } H_0^1(\Omega)^3$ (voir [11]),

$$L_0^2(\Omega) \subset \text{div } X_R \text{ et } \Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \subset \text{div } X_R.$$

On a aussi $\text{div } X_R \subset L^2(\Omega)$, et donc

$$L_0^2(\Omega) + \Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \subset \text{div } X_R \subset L^2(\Omega).$$

Par ailleurs,

$$L^2(\Omega) = L_0^2(\Omega) \oplus \mathbb{R}. \quad (29)$$

la somme étant orthogonale dans $L^2(\Omega)$.
 Supposons pour le moment qu'il existe $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ telle que $\Delta\phi$ n'appartienne pas à $L_0^2(\Omega)$; alors, il existe une constante non nulle c telle que $\Delta\phi = f + c$, avec $f \in L_0^2(\Omega) = \text{div } H_0^1(\Omega)^2$. Donc, il existe $\mathbf{g} \in H_0^1(\Omega)^2$ tel que $f = \text{div } \mathbf{g}$ et $\mathbf{y} = \nabla\phi - \mathbf{g}$, qui appartient à X_R , est tel que $\text{div } \mathbf{y} = c$. Comme c n'est pas nulle, tout nombre réel est la divergence d'un élément de X_R (\mathbf{y} multiplié par un scalaire).

Comme nous savons déjà que tout élément de $L_0^2(\Omega)$ peut être écrit sous la forme de la divergence d'un élément de X_R , le résultat suit en utilisant (29).

Pour achever la démonstration, il nous faut prouver que $\Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ n'est pas inclins dans $L_0^2(\Omega)$. Pour cela, nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \subset L_0^2(\Omega)$.

Soit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors $c \in L^2(\Omega) = \Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \oplus N$, et l'on peut écrire

$$c = \Delta\phi + p, \quad \phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad p \in N,$$

avec en particulier $\|c\|_0^2 = \|\Delta\phi\|_0^2 + \|p\|_0^2$. Par hypothèse, $\int_\Omega \Delta\phi \, dx = 0$ et, grâce à l'orthogonalité de la décomposition, $\int_\Omega p \Delta\phi \, dx = 0$. En conséquence,

$$\|c\|_0^2 = \int_\Omega c(\Delta\phi + p) \, dx = \int_\Omega cp \, dx = \int_\Omega (\Delta\phi + p)p \, dx = \int_\Omega p^2 \, dx = \|p\|_0^2.$$

Ceci implique que $\|\Delta\phi\|_0^2 = 0$, et donc $c \in N$. Maintenant, d'après le théorème 2.2, $c|_\Gamma = 0$ et finalement $c = 0$. Ceci contredit notre hypothèse, ce qui nous permet finalement de prouver la proposition. ■

Pour conclure, notons que l'application divergence est continue de X_R dans $L^2(\Omega)$, et que son noyau est V_R . D'après le théorème de Banach-Steinhaus, l'application réciproque est également continue de $L^2(\Omega)$ dans X_R/V_R , ce qui nous permet d'obtenir (28).

Une fois le couple (\mathbf{u}_R, p) solution du problème de point-selle (26)-(27) calculé, il reste à déterminer la partie singulière \mathbf{u}_S à partir de p , ce qui signifie ici résoudre

$$\text{rot rot } \mathbf{u}_S = \nabla p \text{ dans } H_0(\text{rot}, \Omega)', \text{ avec } \mathbf{u}_S \in V.$$

Bien sûr, ce problème admet lui aussi une unique solution d'après le théorème 3.2.

Références

- [1] F. Assous, P. Ciarlet, Jr. (1997). Une caractérisation de l'orthogonal de $\Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ dans $L^2(\Omega)$. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 325, Série I, 605-610.
- [2] F. Assous, P. Ciarlet, Jr., E. Sonnendrücker (1996). Résolution des équations de Maxwell dans un domaine avec un coin rentrant. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 323, Série I, 203-208.
- [3] F. Assous, P. Ciarlet, Jr., E. Sonnendrücker. Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners, *accepté pour publication dans RAIRO Mathematical Modelling and Numerical Analysis (février 1997)*.
- [4] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Hazard et S. Lohrengel. A singular field method for the solution of Maxwell's equations in polyhedral domains, *accepté pour publication dans au SIAM J. Numer. Analysis (décembre 1997)*.
- [5] H. Brezis (1983). *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Collection pour la maîtrise, Masson, Paris.
- [6] P. Ciarlet, Jr., Tools for solving the div-curl problem with mixed boundary conditions in a polygonal domain, *En préparation*.
- [7] M. Costabel (1991). A Coercive Bilinear Form for Maxwell's Equations, *J. Math. Anal. and Appl.* **157**, 2, 527-541.
- [8] M. Costabel et M. Dauge (1997). Singularités des équations de Maxwell dans un polyèdre. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 324, Série I, 1005-1010.
- [9] M. Dauge (1988), *Elliptic boundary value problems on corner domains*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin.
- [10] E. Gagliardo (1957), Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, *Rend. Sem. Padova* **27**, 284-305.
- [11] V. Girault, P.-A. Raviart (1986), *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer Series in Computational Mathematics, 1341, Springer Verlag, Berlin.
- [12] P. Grisvard (1985), *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and studies in Mathematics, 24, Pitman, London.
- [13] P. Grisvard (1992), *Singularities in boundary value problems*, RMA 22, Masson, Paris.
- [14] J.-L. Lions et E. Magenes (1968), *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris.
- [15] J. Necas (1967), *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris.
- [16] C. Weber (1980), A local compactness theorem for Maxwell's equations, *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, **2**, 12-25.