C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I, p. 767-772, 1999
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Caractérisation des singularités et résolution des équations de Maxwell stationnaires en géométrie axisymétrique

Franck ASSOUS [a], Patrick CIARLET, Jr. [b], Simon LABRUNIE [c]

[a] CEA/BIII/DPTA, B.P. 12, 91680 Bruyères-le-Châtel, France
Courriel : assous@bruyeres.cea.fr

[b] ENSTA/UMA, 32, boulevard Victor, 75739 Paris cedex, France
Courriel : ciarlet@ensta.fr

[c] CMAP, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France
Courriel : labrunie@ensta.fr

(Reçu le 10 janvier 1999, accepté le 8 mars 1999)

Résumé. On étudie les équations de Maxwell stationnaires dans un ouvert Ω non régulier, non convexe, à symétrie axiale. L'espace des solutions s'écrit comme la somme orthogonale d'une partie régulière, contenue dans $\mathrm{H}^1(\Omega)^3$, et d'une partie singulière. On montre que, comme dans le cas bidimensionnel, la partie singulière est reliée aux fonctions propres singulières (axisymétriques) du laplacien, et est de dimension finie. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Characterization of the singular part of the solution of steady-state Maxwell's equations in an axisymmetric domain

Abstract. *We study the steady-state Maxwell equations in a non-smooth, non-convex, axially symmetric domain Ω. The solutions are written as the orthogonal sum of a regular part within $\mathrm{H}^1(\Omega)^3$, and a singular part. We show that, like in the two-dimensional case, the singular part is related to the (axisymmetric) singular eigenfuctions of the Laplacian, and hence is of finite dimension.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

The resolution of Maxwell's equations in a non-smooth, non-convex domain is a challenging numerical problem since the fields become infinite near the singularities (reentrant corners, edges, polyhedral or conical vertices...). This problem has been solved in 2D in [2] and general results in 3D have been obtained in [1], [4]. The purpose of this Note is to obtain a decomposition of

Note présentée par Roland Glowinski.

the magnetostatic field which can develop into an effective algorithm for solving the problem in the case—relevant for some applications—where the domain as well as the sources have an axial symmetry. This study parallels that undertaken in [2].

We consider the surface of revolution Γ generated by the rotation around the (Oz) axis of a polygonal line γ_b whose extremities are on (Oz), and Ω the volume limited by Γ. In the following, $\boldsymbol{\nu}$ is the outgoing unit normal vector to Γ. The corners of γ_b which are not on the axis generate circular edges in Γ, whereas the extremities are conical vertices of Γ.

We denote by $\breve{\mathbf{L}}^2(\Omega)$, $\breve{\mathrm{H}}(\mathbf{curl}, \Omega)$ the respective subspaces of axisymmetric vector fields in $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$, $\mathrm{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$.

The space of current densities is $\mathcal{J} = \{\mathbf{j} \in \breve{\mathbf{L}}^2(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{j} = 0\}$; that of magnetic fields is $\mathcal{B} = \{\mathbf{B} \in \breve{\mathrm{H}}(\mathbf{curl}, \Omega) : \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \text{ and } \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0\}$, and $\mathcal{B}_R = \breve{\mathbf{H}}^1(\Omega) \cap \mathcal{B}$ is the regularized subspace to which $\mathbf{B}$ would belong if the domain Ω were smooth or convex. We have then: **curl** is an isomorphism between $\mathcal{B}$ and $\mathcal{J}$; $\mathcal{B}_R$ is closed in $\mathcal{B}$.

As a consequence the following decomposition holds: $\mathcal{J} = \mathbf{curl}\,\mathcal{B}_R \overset{\perp}{\oplus} \underline{N}$.

Then $\underline{N}$ can be characterized as the space of singular solutions of an elliptic operator $\underline{\Delta}$ which is a trace of the vector Laplacian in a meridian half-plane. It is possible to translate the study of the singularities of the standard scalar Laplacian Δ carried out by Grisvard [7] to the context of this operator, and so we prove

THEOREM 1. – *$\underline{N}$ (or equivalently the orthogonal $\mathcal{B}_S$ of $\mathcal{B}_R$ in $\mathcal{B}$) is of finite dimension, equal to the number of reentrant edges.*

Moreover, we get explicit local expressions of the functions of $\underline{N}$ near the reentrant edges, allowing the computation of the singular part and then of the regular part of $\mathbf{B}$.

1. Les équations de Maxwell en géométrie axisymétrique

Le cadre de ce travail est l'étude des équations de Maxwell dans un domaine Ω axisymétrique (avec des sources axisymétriques). Soit Ω le volume limité par la surface de révolution Γ, engendrée par la rotation autour de l'axe vertical (Oz) d'une ligne brisée γ_b, dont les extrémités sont sur (Oz). On désigne par ω l'intersection de Ω et d'un demi-plan méridien et $\gamma = \gamma_a \cup \gamma_b$ sa frontière, γ_a étant la partie de l'axe (Oz) comprise entre les extrémités de γ_b. On a donc deux types de singularités géométriques : les arêtes circulaires et les points coniques.

Les singularités étant solutions d'un problème stationnaire, on se restreint dans cette Note à l'étude des équations de la magnétostatique. On adopte les coordonnées cylindriques d'axe (Oz) (r, θ, z) ; un demi-plan méridien $\theta = \text{cte}$ est rapporté aux coordonnées cartésiennes (r, z). On désigne par ν la normale unitaire sortante à Γ (lorsqu'elle existe). On suppose également que la surface Γ est parfaitement conductrice. Les équations s'écrivent

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} \text{ dans } \Omega, \quad \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{1}$$

Pour un second membre $\mu_0\mathbf{j} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3$, vérifiant $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, on montre, à l'aide de la théorie des problèmes mixtes, que le problème (1) admet une unique solution dans $\mathrm{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ (*voir* [6]). En géométrie axisymétrique $(\partial/\partial\theta = 0)$, il y a découplage entre, d'une part, $\mathbf{B}_m = (B_r, B_z)$ et j_θ, et d'autre part B_θ et $\mathbf{j}_m = (j_r, j_z)$. La condition aux limites de (1) se projette sur γ_b en $\mathbf{B}_m \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$. Le problème en B_θ n'a pas de condition aux limites.

On désigne respectivement par $\breve{\mathbf{L}}^2(\Omega)$, $\breve{\mathbf{H}}^s(\Omega)$, $\breve{\mathrm{H}}(\mathbf{rot},\Omega)$, $\breve{\mathrm{H}}(\mathrm{div},\Omega)$ les sous-espaces des champs de vecteurs axisymétriques de $\mathrm{L}^2(\Omega)^3$, $\mathrm{H}^s(\Omega)^3$, $\mathrm{H}(\mathbf{rot},\Omega)$, $\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$. On introduit l'espace des courants $\mathcal{J} = \breve{\mathrm{H}}(\mathrm{div}\,0,\Omega)$, des champs magnétiques $\mathcal{B} = \breve{\mathrm{H}}(\mathbf{rot},\Omega) \cap \breve{\mathrm{H}}_0(\mathrm{div}\,0,\Omega)$, et celui des potentiels-vecteurs $\mathcal{A} = \breve{\mathrm{H}}_0(\mathbf{rot},\Omega) \cap \breve{\mathrm{H}}(\mathrm{div}\,0,\Omega) \cap D(\Delta,\Omega)^3$. On peut alors montrer le

THÉORÈME 1.1. – *On a les isomorphismes suivants d'espaces vectoriels :*
– *l'opérateur* $\mathbf{rot}$ *définit un isomorphisme entre* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{J}$ *;*
– *l'opérateur* $\mathbf{rot}$ *définit un isomorphisme entre* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *;*
– *l'opérateur* $\Delta = -\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}$ *définit un isomorphisme entre* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{J}$.

2. Décomposition d'espaces

Si la frontière Γ était régulière ou convexe, le champ magnétique appartiendrait à l'espace régularisé $\mathcal{B}_R = \mathcal{B} \cap \breve{\mathbf{H}}^1(\Omega)$. On appelle $\mathcal{A}_R = \mathbf{rot}^{-1}\mathcal{B}_R$. À l'aide du

LEMME 2.1. – *Dans* $\mathcal{A}$, *la norme* $\|\Delta\mathbf{A}\|_0$ *est équivalente à la norme canonique* $\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{A}} = \left(\|\mathbf{A}\|_{0,\mathbf{rot}}^2 + \|\Delta\mathbf{A}\|_0^2\right)^{1/2}$. *En munissant* $\mathcal{A}$ *de cette norme,* $\mathcal{B}$ *de la norme* L^2 *du rotationnel et* $\mathcal{J}$ *de la norme* L^2, *les isomorphismes du théorème* 1.1 *sont des isométries.*

THÉORÈME 2.1. – *Dans l'espace* $\{\mathbf{u} \in \breve{\mathbf{H}}^1(\Omega) : \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0\}$, *la norme canonique de* $\mathrm{H}(\mathbf{rot},\Omega) \cap \mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$ *est équivalente à la norme* H^1 *:*

$$\exists\,\alpha > 0,\quad \forall\,\mathbf{u},\quad \alpha\,\|\mathbf{u}\|_1^2 \leq \|\mathbf{u}\|_0^2 + \|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\|_0^2 + \|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|_0^2. \tag{2}$$

On peut alors montrer les résultats de fermeture suivants :

THÉORÈME 2.2. – *Pour ces normes,* $\mathcal{B}_R$ *et* $\mathcal{A}_R$ *sont des sous-espaces fermés de* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{B}_S$ l'orthogonal de $\mathcal{B}_R$ dans $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}_S$ celui de $\mathcal{A}_R$ dans $\mathcal{A}$. Avec les isométries du lemme 2.1, $\mathcal{B}_S = \mathbf{rot}\,\mathcal{A}_S$, $\Delta\,\mathcal{A}_S = \mathbf{rot}\,\mathcal{B}_S$, et l'on a :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_R \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_S,\quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_R \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{B}_S,\quad \mathcal{J} = \Delta\,\mathcal{A}_R \overset{\perp}{\oplus} \Delta\,\mathcal{A}_S. \tag{3}$$

Remarque 2.1. – La preuve du théorème 2.1 utilise une identité démontrée dans le cas général dans [5], une inégalité de Hardy, ainsi que la caractérisation des espaces de Sobolev dans Ω par leurs traces dans ω (*voir* section 3).

3. Réduction à des problèmes bidimensionnels

Les composantes méridienne et azimutale des champs de vecteurs étant ponctuellement orthogonales, elles le sont aussi au sens L^2. En utilisant le découplage des composantes $\mathbf{B}_m \equiv \varpi_m(\mathbf{B})$ et $\mathbf{B}_\theta \equiv \varpi_\theta(\mathbf{B}) \equiv B_\theta\,\mathbf{e}_\theta$, on peut montrer l'absence de singularités du champ magnétique azimutal.

THÉORÈME 3.1. – *Soit* $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_S$ *une singularité azimutale* ($\varpi_m(\mathbf{B}) = 0$). *Alors* $\mathbf{B} = 0$.

Pour étudier les traces des espaces de Sobolev axisymétriques dans un demi-plan méridien, on introduit pour $\alpha \in \mathbb{R}$ l'échelle de Sobolev $\left(\mathrm{H}^s_\alpha(\omega)\right)_{s\in\mathbb{R}}$ fondée sur l'espace hilbertien

$$\mathrm{L}^2_\alpha(\omega) = \left\{f : \iint_\omega |f|^2\, r^\alpha\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z < +\infty\right\},$$

ainsi que les espaces

$$\mathrm{H}^1_-(\omega) = \mathrm{H}^1_1(\omega) \cap \mathrm{L}^2_{-1}(\omega),\qquad R = \left\{\mathbf{w} : \mathbf{w}_m \in \mathrm{L}^2_1(\omega)^2,\ \mathrm{rot}\,\mathbf{w}_m \in \mathrm{L}^2_1(\omega)\ \text{ et }\ r\,w_\theta \in \mathrm{H}^1_{-1}(\omega)\right\}.$$

(On rappelle que $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \partial_z u_r - \partial_r u_z$.) On a les résultats (*voir* [3]).

LEMME 3.1. – *Il y a isométrie au facteur $\sqrt{2\pi}$ près entre les espaces suivants :*

$$\breve{\mathbf{L}}^2(\Omega) \text{ et } \left(\mathrm{L}^2_1(\omega)\right)^3 ; \quad \breve{\mathbf{H}}^1(\Omega) \text{ et } \mathrm{H}^1_-(\omega) \times \mathrm{H}^1_-(\omega) \times \mathrm{H}^1_1(\omega) ; \quad \breve{\mathrm{H}}(\mathbf{rot}, \Omega) \text{ et } R.$$

On se servira de l'isométrie ϱ suivante : $\mathrm{L}^2_\alpha(\omega) \longrightarrow \mathrm{L}^2_{\alpha-2}(\omega)$, $f \longmapsto r\,f$.

En raison de la symétrie axiale, $\mathbf{B}_\theta$ satisfait la condition de divergence nulle et est tangentielle sur Γ. On introduit alors $u = r\,B_\theta$ et $\mathbf{g} = \mu_0\, r\, \mathbf{j}_m$, et (1) se résume à $\mathbf{rot}\, u = \mathbf{g}$, avec

$$\mathbf{g} \in \mathcal{G} = \left\{\mathbf{f} \in \mathrm{L}^2_{-1}(\omega)^2 : \operatorname{div} \mathbf{f} = 0\right\}.$$

D'après le lemme 3.1, $u \in \mathrm{H}^1_{-1}(\omega)$.

On va donc étudier les singularités du champ magnétique méridien $\mathbf{B}_m$ qui est à divergence nulle et vérifie l'équation d'Ampère. En posant $\mathbf{v} = r\,\mathbf{B}_m$ et $f = \mu_0\, r\, j_\theta$, on a :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ dans } \omega, \tag{4}$$

$$\underline{\mathrm{rot}}\, \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{v_z}{r} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = f \text{ dans } \omega, \tag{5}$$

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sur } \gamma_b. \tag{6}$$

On introduit la variable $\varphi = r\,A_\theta$, reliée à $\mathbf{v}$ par $v_r = -\partial_z \varphi$, $v_z = \partial_r \varphi$, que l'on note donc $\mathbf{v} = \mathbf{rot}\, \varphi$. En fonction de la source f, φ est obtenue comme la solution du problème de Dirichlet avec laplacien modifié $-\underline{\Delta} = \underline{\mathrm{rot}}\, \mathbf{rot}$

$$-\underline{\Delta}\varphi \equiv -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f \text{ dans } \omega, \tag{7}$$

$$\varphi = 0 \text{ sur } \gamma. \tag{8}$$

On introduit alors en 2D les espaces (« traces » des espaces 3D) suivants :

$$\mathcal{V} = \left\{\mathbf{v} \in \mathrm{L}^2_{-1}(\omega)^2 : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \omega,\ \underline{\mathrm{rot}}\, \mathbf{v} \in \mathrm{L}^2_{-1}(\omega) \text{ et } \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sur } \gamma_b\right\}, \tag{9}$$

$$\Phi = \left\{\varphi \in \mathrm{H}^1_{-1}(\omega) : \underline{\Delta}\varphi \in \mathrm{L}^2_{-1}(\omega) \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \gamma\right\}. \tag{10}$$

On peut alors démontrer les isomorphismes et décompositions analogues au cas 3D.

LEMME 3.2. – *On a les isomorphismes suivants d'espaces vectoriels :*

$$\mathbf{rot} : \Phi \longrightarrow \mathcal{V}, \quad \underline{\mathrm{rot}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{L}^2_{-1}(\omega), \quad \underline{\Delta} : \Phi \longrightarrow \mathrm{L}^2_{-1}(\omega).$$

Le diagramme suivant résume la situation ($\mathcal{A}_\theta$ et $\mathcal{B}_m$ sont les espaces des $\varpi_\theta(\mathbf{A})$ et $\varpi_m(\mathbf{B})$) :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A} & \xrightarrow{\mathbf{rot}} & \mathcal{B} & \xrightarrow{\mathbf{rot}} & \mathcal{J} \\
\varpi_\theta \big\downarrow & & \varpi_m \big\downarrow & & \varpi_\theta \big\downarrow \\
\mathcal{A}_\theta & \xrightarrow{\frac{1}{r}\mathbf{rot}\,(r\,\cdot)} & \mathcal{B}_m & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & \mathrm{L}^2_1(\omega) \\
\varrho \big\downarrow & & \varrho \big\downarrow & & \varrho \big\downarrow \\
\Phi & \xrightarrow{\mathbf{rot}} & \mathcal{V} & \xrightarrow{\underline{\mathrm{rot}}} & \mathrm{L}^2_{-1}(\omega)
\end{array} \tag{11}$$

LEMME 3.3. – *Dans $\mathcal{V}$ (resp. Φ), la norme $\|\underline{\mathrm{rot}}\,\mathbf{v}\|_{\mathrm{L}^2_{-1}}$ (resp. $\|\underline{\Delta}\varphi\|_{\mathrm{L}^2_{-1}}$) est équivalente à la norme canonique. Avec ces normes, les isomorphismes du lemme 3.2 sont des isométries.*

Si maintenant on note $\mathcal{V}_R$ l'image de $\mathcal{B}_R$ par $\varrho \circ \varpi_m$ et Φ_R l'image de $\mathcal{A}_R$ par $\varrho \circ \varpi_\theta$, soit

$$\Phi_R = \left\{\varphi \in \mathrm{H}^1_{-1}(\omega) : \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial r \partial z}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) \in \mathrm{L}^2_{-1}(\omega)^3 \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \gamma\right\}, \tag{12}$$

les traces des décompositions (3) sont :

$$\Phi = \Phi_R \overset{\perp}{\oplus} \Phi_S, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_R \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{V}_S, \quad \mathrm{L}^2_{-1}(\omega) = \underline{\Delta}\Phi_R \overset{\perp}{\oplus} \underline{\Delta}\Phi_S, \tag{13}$$

avec $\mathcal{B}_S = \mathbf{rot}\,\Phi_S$ et $\underline{\mathrm{rot}}\,\mathcal{B}_S = \underline{\Delta}\Phi_S$.

4. Singularités du champ magnétique méridien et singularités du laplacien modifié

Suivant [4], on relie les singularités des équations de Maxwell à celles du laplacien modifié :

THÉORÈME 4.1. – *Soit $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_S$ une singularité méridienne ($\varpi_\theta(\mathbf{B}) = 0$). Alors, en posant $\mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{P} = (p/r)\,\mathbf{e}_\theta$, p peut être caractérisé comme solution dans $\mathrm{L}^2_{-1}(\omega)$ du problème « très faible » de Dirichlet :*

$$\underline{\Delta}p = 0 \text{ dans } \omega, \quad p = 0 \text{ sur } \gamma, \tag{14}$$

où la trace est à prendre au sens fort sur γ_a et au sens suivant sur chaque côté de γ_b : p/r est la trace d'une distribution axisymétrique du dual de $\mathrm{H}^{1/2}_{00}$ de la face correspondante.

La preuve se fait comme dans [1] en 3D cartésien. Soit $\underline{N}$ l'espace des solutions à (14) dans $\mathrm{L}^2_{-1}(\omega)$.

LEMME 4.1. – *Soit $p \in \underline{N}$. Alors $p \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\omega} \setminus V)$, pour tout V voisinage des coins.*

On procède à l'étude des $p \in \underline{N}$ au voisinage des coins hors de l'axe puis sur l'axe.

Au voisinage d'un coin $E = E_j$ de γ_b, d'ouverture π/α, n'étant pas sur l'axe, on remarque que le laplacien modifié s'écrit comme la somme du laplacien standard et de termes du premier ordre à coefficients réguliers. Soit alors ω_E un voisinage suffisamment petit de E, (ρ, ϕ) les coordonnées polaires d'origine E et $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\omega})$ une fonction de troncature qui vaut 1 dans un voisinage de E, on a :

LEMME 4.2. – *Soit $p \in \underline{N}$. Il existe $c \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell\,\alpha > -1$ tels que*

$$\eta\left(p(\rho,\phi) - c\,\rho^{\ell\,\alpha}\sin \ell\,\alpha\,\phi\right) \in \mathrm{H}^1(\omega_E).$$

Réciproquement, pour une telle expression analytique locale, il existe $\sigma \in \underline{N}$ tel que

$$\sigma(\rho,\phi) - c\,\eta\,\rho^{\ell\,\alpha}\sin \ell\,\alpha\,\phi \in \mathrm{H}^1_{-1}(\omega).$$

Au voisinage d'un coin convexe ($\alpha > 1$), toute solution au problème (14) est H^1 tandis que pour un coin rentrant ($1/2 < \alpha < 1$), il existe *localement* une seule fonction singulière L^2 (à une constante multiplicative près) dont le développement commence par $p(\rho, \phi) = \rho^{-\alpha}\sin\alpha\,\phi +$ etc.

Dans un voisinage ω_O d'un sommet conique O, d'ouverture π/β, avec le système de coordonnées polaires : $r = \rho \sin\phi$, $z = -\rho\cos\phi$, on a l'expression du laplacien modifié

$$\underline{\Delta}p = \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} - \frac{\mathrm{cotg}\,\phi}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} = 0, \tag{15}$$

qui est à variables séparables. On considère l'échelle de Sobolev $(\mathcal{H}^s)_{s\in\mathbb{Z}}$ fondée sur l'espace hilbertien $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2\left(\left]0, \frac{\pi}{\beta}\right[, \frac{\mathrm{d}\phi}{\sin\phi}\right)$, ainsi que l'opérateur $(\Lambda u)(\phi) = -u''(\phi) + \operatorname{cotg}\phi\, u'(\phi)$ qui est auto-adjoint dans son domaine $D(\Lambda) = \{u \in \mathcal{H} : \Lambda u \in \mathcal{H} \text{ et } u(0) = u(\pi/\beta) = 0\}$.

THÉORÈME 4.2. – *Il existe une base hilbertienne $(u_\ell)_\ell$ de $\mathcal{H}$ formée de fonctions propres de Λ, u_ℓ appartenant à $\mathcal{H}_0^1 \cap \mathcal{C}^\infty$, dont les valeurs propres simples λ_ℓ $(\lambda_\ell > 0)$ tendent vers l'infini.*

On peut identifier les u_ℓ : en notant $(\nu_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}^*}$ la suite des $\nu > 1$ vérifiant $P^1_{\nu-1}\left(\cos\frac{\pi}{\beta}\right) = 0$ rangés en ordre croissant, les $\lambda_\ell = \nu_\ell(\nu_\ell - 1)$ sont les valeurs propres de Λ, et $u_\ell = C_\ell \sin\phi\, P^1_{\nu_\ell - 1}(\cos\phi)$, avec C_ℓ une normalisation, les fonctions propres associées. On a $\nu_1 > 2$ et $\nu_\ell \sim \beta\,\ell$ lorsque $\ell \to +\infty$.

Un élément p de $\underline{N}$ vérifiant $\frac{\partial^2 p}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\Lambda p = 0$, on le développe sur la base des u_ℓ :

LEMME 4.3. – *Soit $p \in \mathcal{C}^\infty(]0, R[\,;\, D(\Lambda))$ une solution de $\frac{\partial^2 p}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\Lambda p = 0$. Notons $D_R = \omega_O \cap \{0 < \rho < R\}$; si l'on suppose de plus que $p \in \mathrm{L}^2_{-1}(D_R)$ (cet espace est associé à la mesure $r^{-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = (\rho\sin\phi)^{-1}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$), alors il existe une suite c_ℓ telle que*

$$p(\rho, \phi) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} c_\ell\, \rho^{\nu_\ell}\, u_\ell(\phi), \tag{16}$$

qui vérifie d'autre part (K constante ne dépendant que de p)

$$|c_\ell| \le K\, R^{-\nu_\ell} \sqrt{\nu_\ell}. \tag{17}$$

En conséquence, il n'y a pas de singularité du laplacien modifié au voisinage de O :

THÉORÈME 4.3. – *Soit $p \in \mathcal{C}^\infty(]0, R[\,;\, D(\Lambda))$ une solution de $\frac{\partial^2 p}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\Lambda p = 0$. Si $p \in \mathrm{L}^2_{-1}(D_R)$, alors $p \in \mathrm{H}^1_{-1}(D_{R'})$ pour $R' < R$.*

À l'aide de ces résultats, on étend au cas axisymétrique le résultat de Grisvard [7] :

THÉORÈME 4.4. – *L'espace $\underline{N}$ – et par conséquent l'espace $\mathcal{B}_S$ – est de dimension finie égale au nombre d'arêtes rentrantes.*

Références bibliographiques

[1] Assous F., Ciarlet P., Jr., Raviart P.-A., Sonnendrücker E., Characterization of the singular part of the solution of Maxwell's equations in a polyhedral domain, M^{3}AS (à paraître).
[2] Assous F., Ciarlet P., Jr., Sonnendrücker E., Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners, Modél. Math. Anal. Numér. 32 (1998) 359–389.
[3] Azaïez M., Bernardi C., Dauge M., Maday Y., Spectral methods for axisymmetric domains, Rapport technique IRMAR 96-37, 1996.
[4] Costabel M., Dauge M., Singularities of Maxwell's equations on polyhedral domains, Rapport technique IRMAR 96-30, 1996.
[5] Costabel M., Dauge M., Maxwell and Lamé eigenvalues on polyhedra, Rapport technique IRMAR 98-08, 1998.
[6] Girault V., Raviart P.-A., Finite element methods for Navier–Stokes equations, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
[7] Grisvard P., Singularities in boundary value problems, RMA 22, Masson, Paris, 1992.