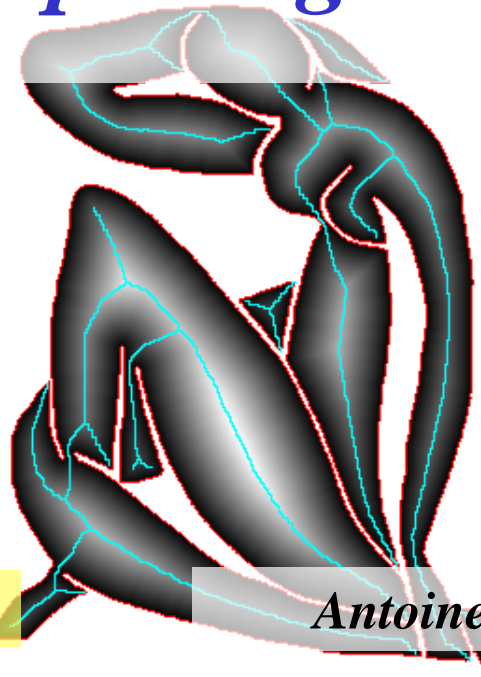




Cours de morphologie mathématique



ENSTA 2^{ème} année

Antoine MANZANERA – ENSTA/U2IS

Présentation et objectifs du cours

La *morphologie mathématique* est une théorie de traitement *non linéaire* de l'information apparue en France dans les années 60 (G. Matheron & J. Serra, Ecole des Mines de Paris), et qui est aujourd'hui très largement utilisée en *analyse d'images*.

Contrairement au traitement linéaire des images, la morphologie mathématique ne s'appuie pas sur le traitement du signal, mais repose sur la *théorie des ensembles*, ce qui en fait une discipline relativement « auto-contenue » et formant un tout cohérent.

L'objectif de ce cours est de *fournir les bases*, mais aussi de présenter *les techniques les plus récentes* du traitement morphologique des images. On s'efforcera de préserver un *équilibre* entre les *concepts* et les *algorithmes*, en développant autant que possible les problèmes d'implantation numérique posés.

Le cours s'accompagne *d'exercices* pour se *familiariser* avec les manipulations algébriques ou géométriques, et pour *développer* certains aspects du cours.

Des *travaux pratiques* permettront enfin, d'une part *d'expérimenter* les outils étudiés en cours, et d'autre part, de s'immerger profondément dans les aspects algorithmiques, en *programmant* soi-même des fonctions morphologiques de traitement d'images.

Morphologie Mathématique : Plan du cours

Chapitre 1 : Introduction et premiers opérateurs (4/4)

Fondements algébriques : treillis complet, adjonction.

Fondements géométriques : opérateurs intégraux, érosion dilatation ensemblistes.

Érosion et dilatation fonctionnelles.

Premiers opérateurs résiduels ou composés : gradients, ouvertures, top-hats, opérateurs de contraste.

Introduction aux opérateurs géodésiques.

Chapitre 2 : Géométrie discrète et approche algorithmique (5/4)

Pavages et maillages. Topologie et métrique dans la maille cubique.

Transformées en distance. Algorithmes : parallèle ou séquentiel, Danielsson-Leymarie.

Application à l'érosion ensembliste. Érosion numérique et algorithme de Van Herk.

Reconstruction géodésique et files d'attente.

Chapitre 3 : Filtrage morphologique et opérateurs connexes (5/4 et 19/4)

Ouverture algébrique. Granulométries et spectre morphologique.

Semi-groupes de Matheron. Filtres alternés séquentiels.

Reconstruction numérique et F.A.S par reconstruction. Espaces d'échelles morphologiques.

Applications de la géodésie et opérateurs connexes

Invariance par changement de contraste et formalisme EDP

Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux (19/4)

Squelettes par boules maximales, résidus d'ouvertures ou maxima locaux de fonction distance

Squelettes connexes par amincissement, homotopie discrète, points et ensembles simples

Connexité des squelettes par amincissement

Squelettes multi-échelles par fonction de choc géodésique

Connexité des squelettes multi-échelles

Reconstruction de formes multi-échelles

LPE : notions de bassin versant et simulation d'immersion

SKIZ Géodésique et Algorithme de LPE

LPE contrainte par marqueur. Filtrage bidimensionnel pour la LPE

Morphologie Mathématique : Chapitre 1

INTRODUCTION ET PREMIERS OPERATEURS

I Introduction : *approche morphologique du TI*

II Opérateurs de base : *Dilatation et Erosion*

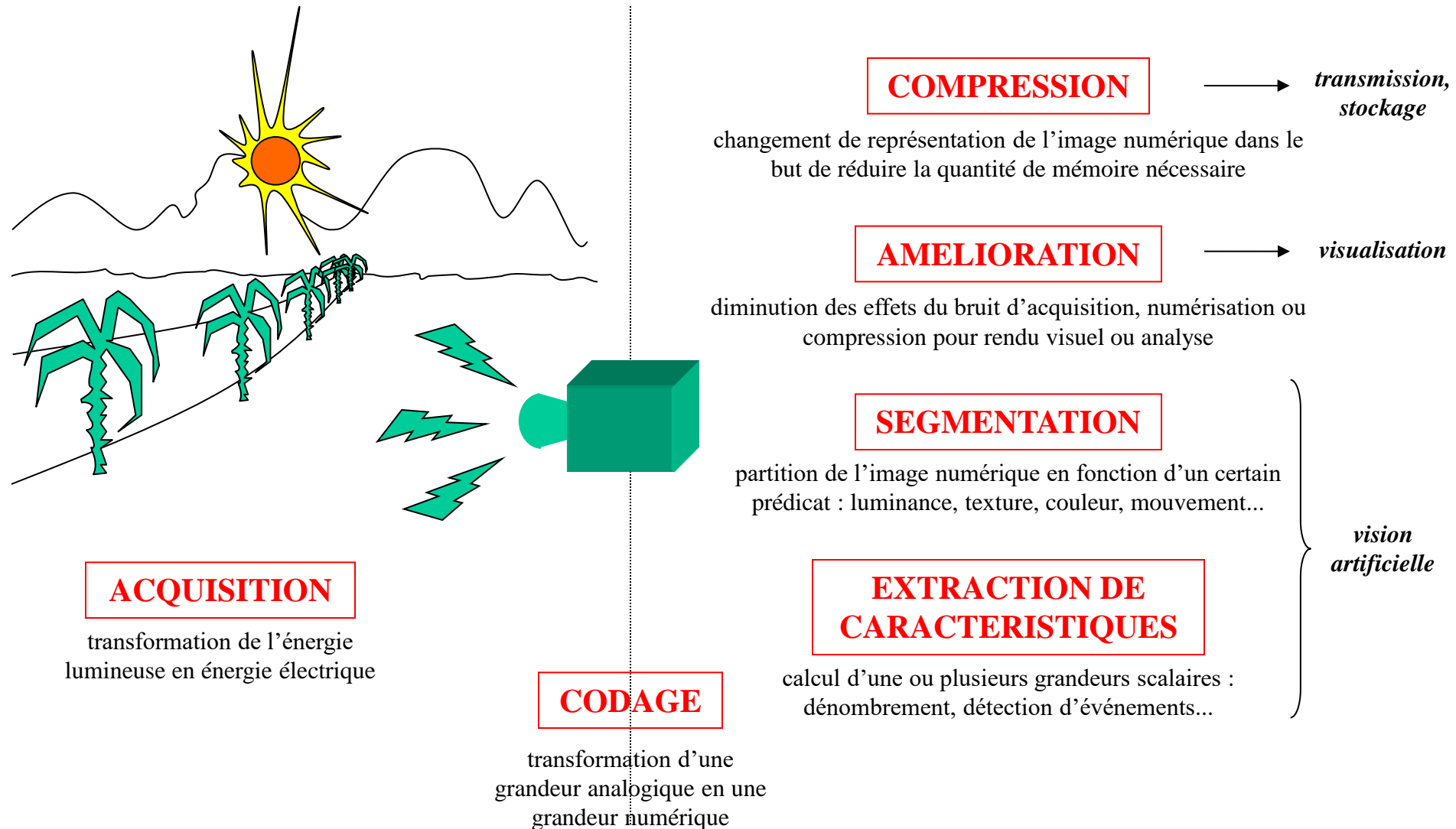
- (a) Opérations ensemblistes
- (b) Opérations fonctionnelles
- (c) Premiers opérateurs composés

III Filtres de base : *Ouverture et Fermeture*

- (a) Définition et propriétés
- (b) Seconds opérateurs composés

III Opérateurs géodésiques : *Reconstruction*

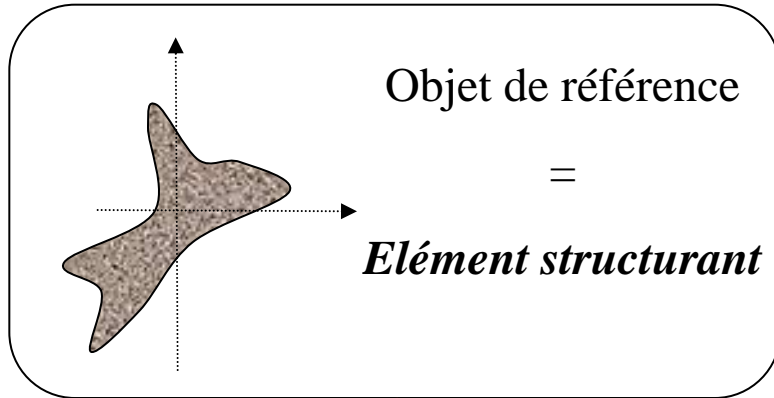
Les problématiques du traitement d'images



SCENE REELLE

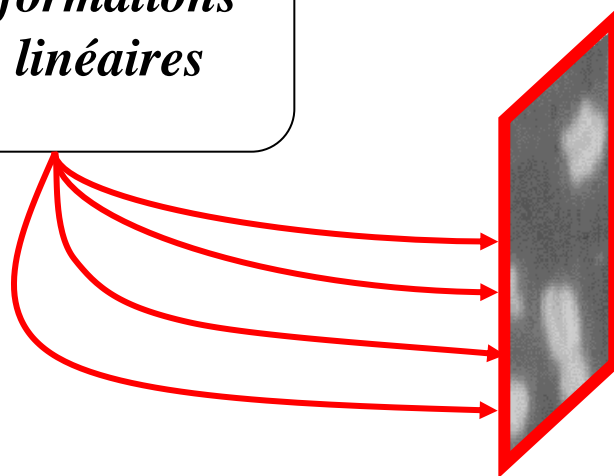
IMAGE NUMERIQUE

L'approche morphologique du traitement d'images



Le principe de base de l'analyse morphologique est d'extraire de la connaissance de l'image à partir des réponses fournies à différents tests (transformations).

*Transformations
non linéaires*

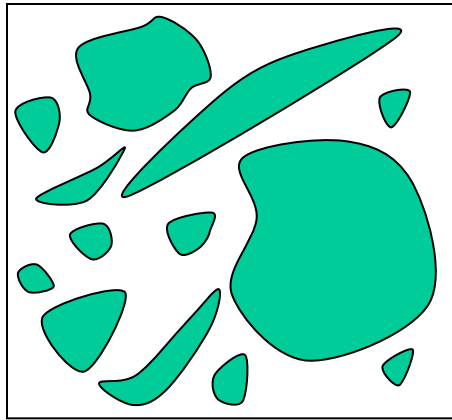


Critères de :

- ✓ *taille*
- ✓ *forme*
- ✓ *orientation*
- ✓ *connexité*
- ✓ *.../...*

L'approche morphologique du traitement d'images

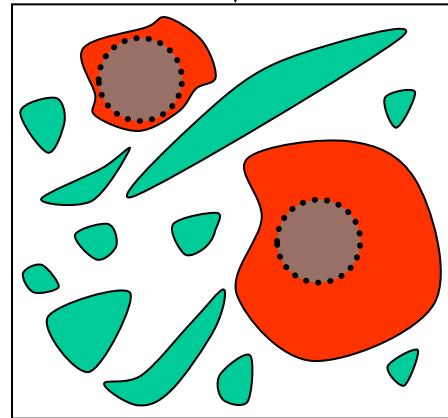
Exemple :



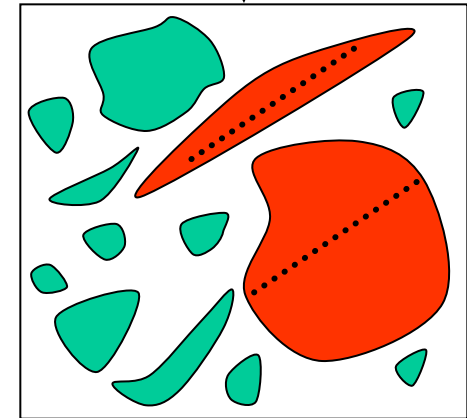
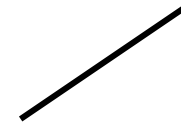
Elément
structurant 1



Test : « contient »



Elément
structurant 2



Taille, forme, orientation,...

Analyse quantitative, spatiale,...

Traitement d'images linéaire : structure fondamentale

Dans le cas du traitement d'images linéaire, la structure fondamentale est celle d'*espace vectoriel*.

structure
de base

ESPACE VECTORIEL

E espace vectoriel sur K

opérateurs
de base

Ce sont ceux qui préservent la structure et commutent avec les lois de base :

$$\forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in E^2: f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ et } f(x+y) = f(x) + f(y)$$

isomorphismes d'espace vectoriel

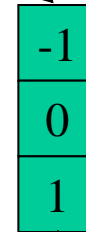
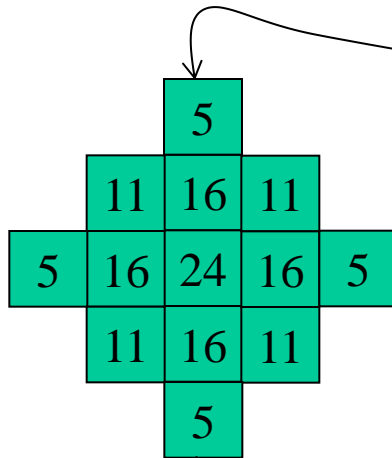


Applications linéaires

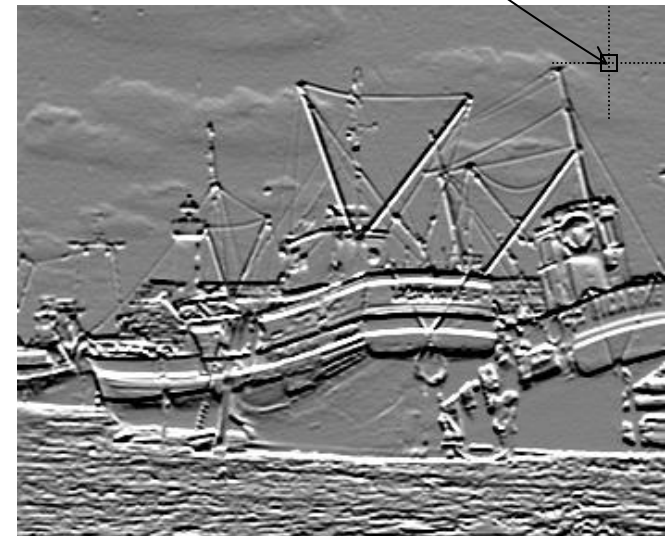


CONVOLUTIONS

Traitement linéaire : convolutions



Filtre passe-bas



Gradient vertical

Morphologie mathématique : structure fondamentale

Dans le cas de la morphologie mathématique, la structure fondamentale est celle de *treillis complet*.

structure
de base

TREILLIS COMPLET

(1) Ensemble ordonné (E, \leq)

$$\leq \begin{cases} \text{REFLEXIVE} & x \leq x \\ \text{ANTI-SYMETRIQUE} & x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y \\ \text{TRANSITIVE} & x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{cases}$$

(2) Toute partie P de E admet : $\begin{cases} \bullet \text{ une borne sup} \\ \bullet \text{ une borne inf} \end{cases}$

Sup : plus petit des majorants $\vee P$

Inf : plus grand des minorants $\wedge P$

Morphologie mathématique : opérateurs de base

opérateurs
de base

Ceux qui préservent la structure...

$$x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)$$

CROISSANCE

...et commutent avec les lois de base :

sup → || $\Phi(\vee \{x_i\}) = \vee \{\Phi(x_i)\}$

inf → || $\Psi(\wedge \{x_i\}) = \wedge \{\Psi(x_i)\}$



DILATATION

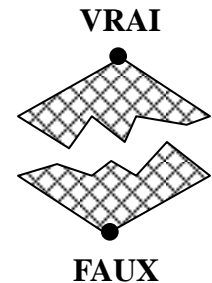


EROSION

Exemples de treillis complets

Treillis des formules booléennes

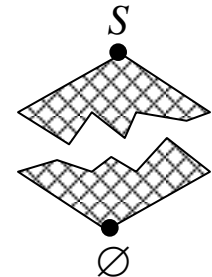
- *éléments* : formules booléennes f, g, h
- *relation d'ordre* : implication $f \rightarrow g$



- *sup* : OU logique
- *inf* : ET logique
- *éléments extrêmes* :

Treillis ensembliste

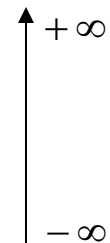
- *éléments* : les parties d'un ensemble S
- *relation d'ordre* : inclusion \subset



- *sup* : Union \cup
- *inf* : Intersection \cap
- *éléments extrêmes* :

Treillis des nombres

- *éléments* : nombres réels (ou nombres entiers)
- *relation d'ordre* : \leq (ordre total)



- *sup* : max
- *inf* : min
- *éléments extrêmes* :

Exemples de treillis complets

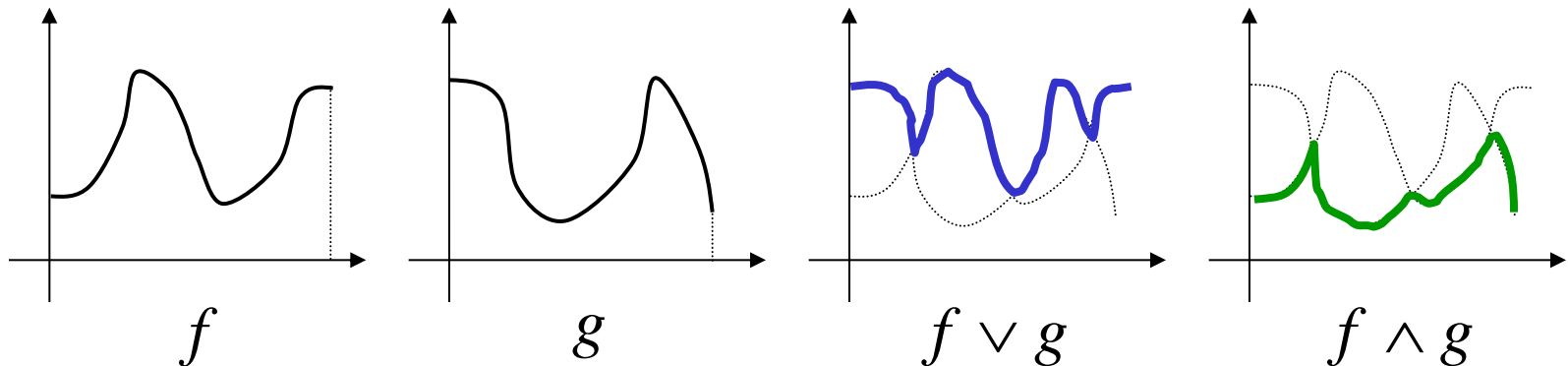
Treillis des fonctions

• *éléments* : les fonctions réelles ou numériques : $f : S \rightarrow \mathbf{R}$
ou $S \rightarrow \mathbf{Z}$

• *relation d'ordre* : $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in S, f(x) \leq g(x)$

• *sup* : $\vee \{f_i\}$
• *inf* : $\wedge \{f_i\}$

définies par :
$$\begin{cases} (\vee \{f_i\})(x) = \vee \{f_i(x)\} \\ (\wedge \{f_i\})(x) = \wedge \{f_i(x)\} \end{cases}$$



Le principe de dualité

Dans un treillis, les lois *Sup* et *Inf* jouent des rôles symétriques.

On appelle *involution* l'opérateur $\bar{\cdot} : E \rightarrow E$

qui permet d'échanger leur rôle :

$$\wedge \bar{P} = \overline{\vee P} \quad \text{et} \quad \vee \bar{P} = \overline{\wedge P}$$

On dit que deux opérateurs Φ et Φ^* sont *duaux* pour l'involution $\bar{\cdot}$.

si :

$$\boxed{\Phi(\bar{x}) = \overline{\Phi^*(x)}}$$

Exemples d'involutions

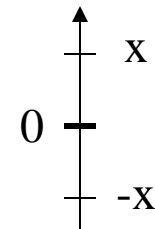
Treillis des formules booléennes

NON logique :

g	$\neg g$
0	1
1	0

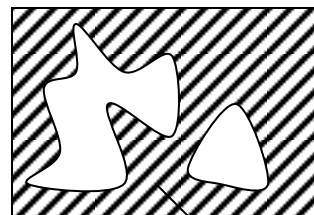
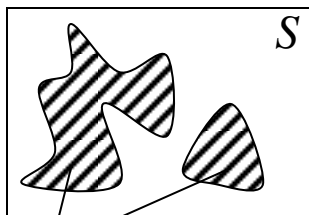
Treillis des nombres

opposé :



Treillis ensembliste

Complémentaire :

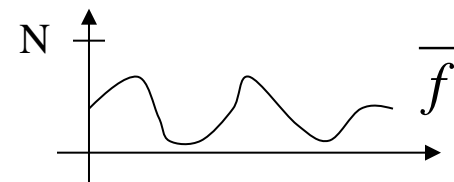
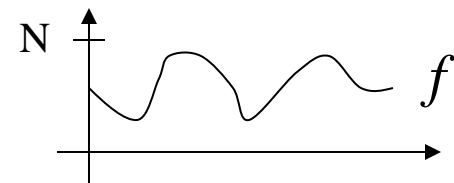


X

$X^c = S \setminus X$

Treillis des fonctions dans $[0, N]$

$\bar{f} = N - f$:



Propriétés des opérateurs : quelques définitions

$$\Phi : E \rightarrow E$$

$$x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y) \quad \textit{Croissance}$$

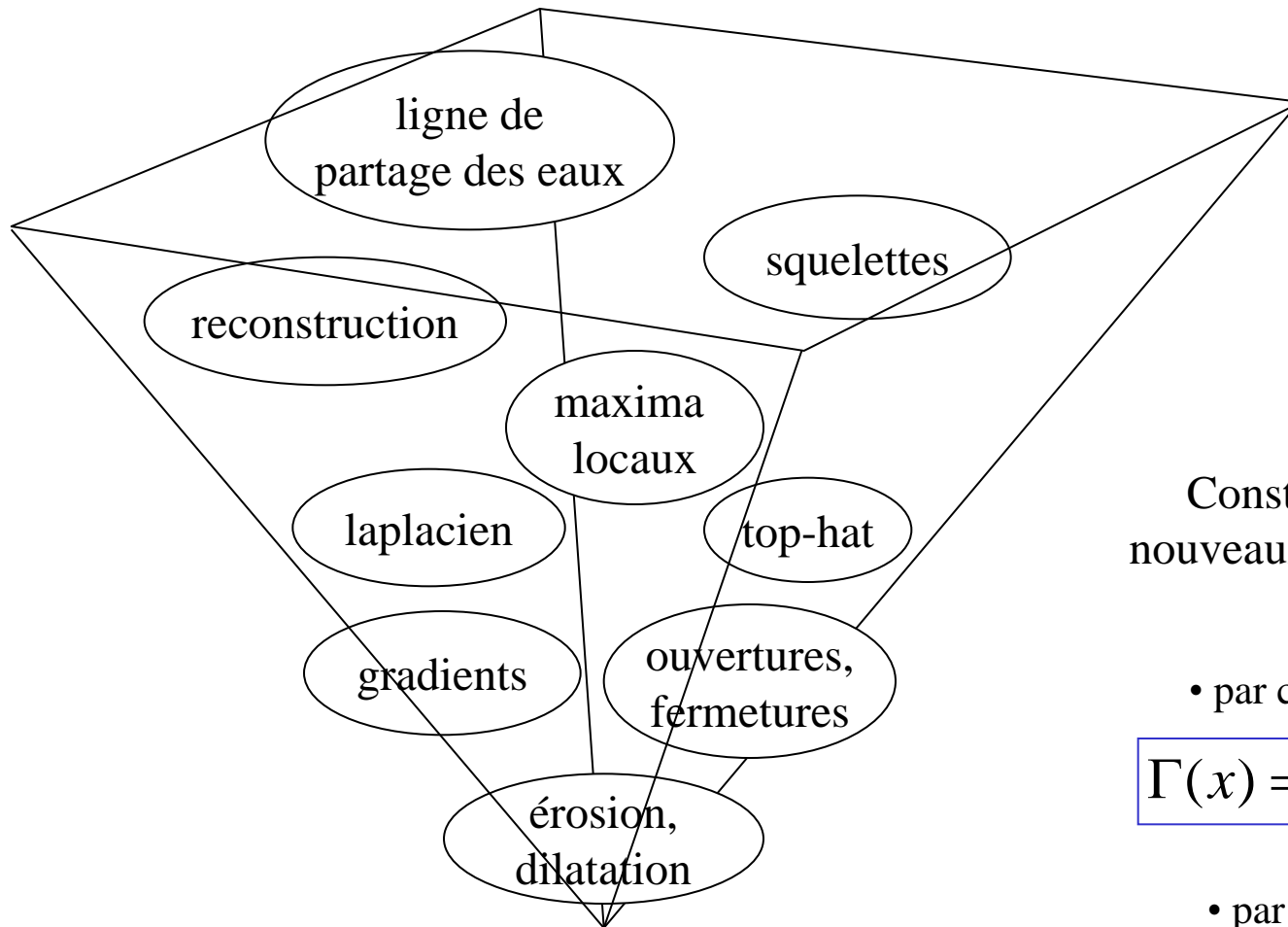
$$x \leq \Phi(x) \quad \textit{Extensivité}$$

$$\Phi(x) \leq x \quad \textit{Anti-extensivité}$$

$$\Phi(\Phi(x)) = \Phi(x) \quad \textit{Idempotence}$$

Construction des opérateurs de la morphologie mathématique

↑
complexité,
richesse des
propriétés



Construction de
nouveaux opérateurs :

- par composition

$$\Gamma(x) = \Phi(\Psi(x))$$

- par différence

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

Opérations de Minkowski dans \mathbf{R}^n

Définitions préliminaires

On se place ici dans E : l'ensemble des parties de \mathbf{R}^n

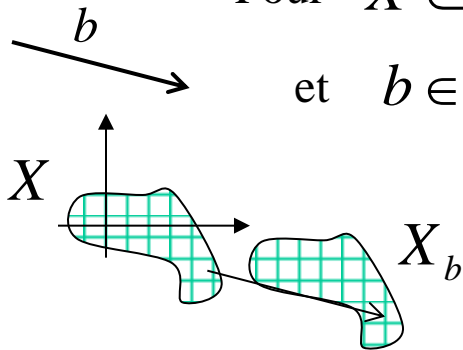
Pour $X \subset \mathbf{R}^n$

et $b \in \mathbf{R}^n$

on note

$$X_b = \{x + b; x \in X\}$$

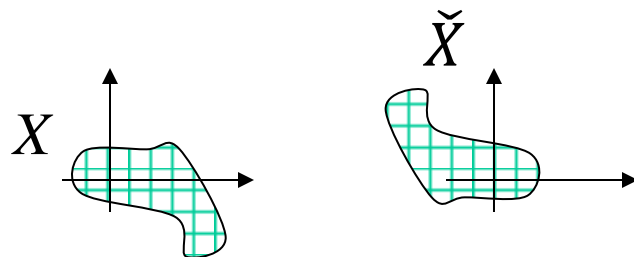
le *translaté* de X par b .



et on note

$$\check{X} = \{-x; x \in X\}$$

le *transposé* de X .

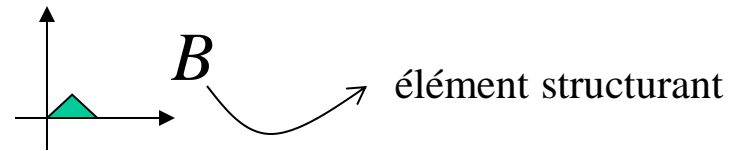


Rq: si X est symétrique alors $\check{X} = X$

L'addition de Minkowski

L'addition de Minkowski de X et B est définie par :

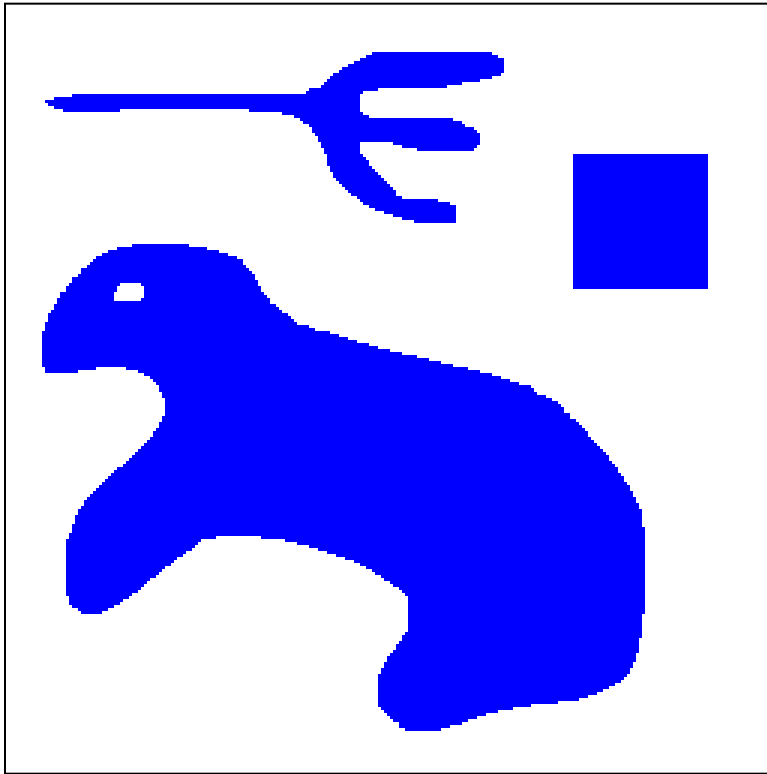
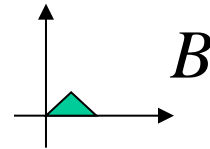
$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b$$



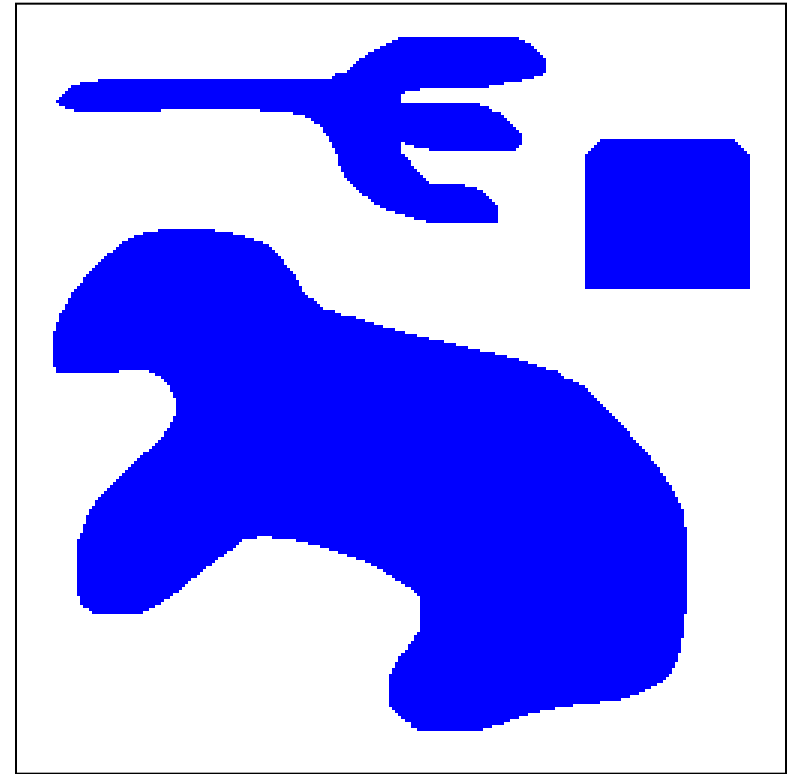
Rq : $X \oplus B = B \oplus X$

C'est le lieu géométrique des points de B_x lorsque x parcourt X

L'addition de Minkowski



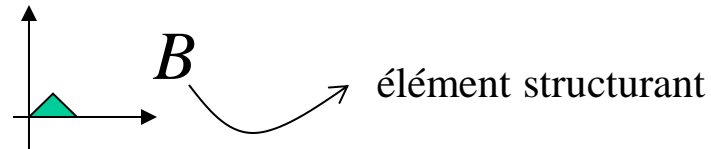
X



$X \oplus B$

La dilatation morphologique

La dilatation morphologique de X par B est définie par : $\delta_B(X) = X \oplus \check{B}$



$$\delta_B(X) = X \oplus \check{B} = \bigcup_{b \in \check{B}} X_b$$

$$= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B : z = x - b\}$$

$$= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B : z + b = x\}$$

$$= \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\}$$

$$\delta_B(X) = \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\}$$

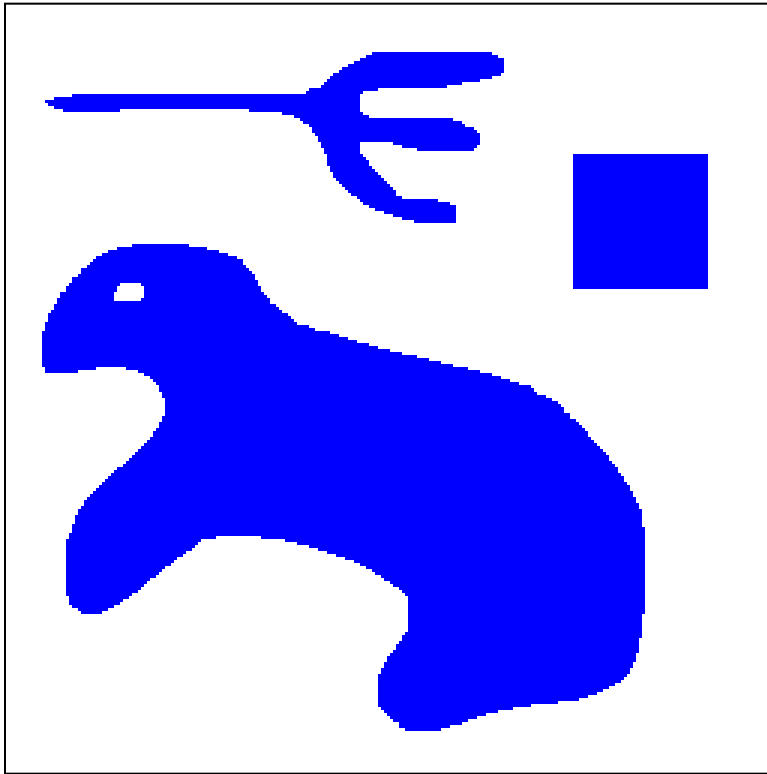
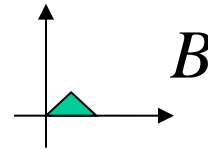
C'est le lieu géométrique
des points z tels que B_z
intersecte X



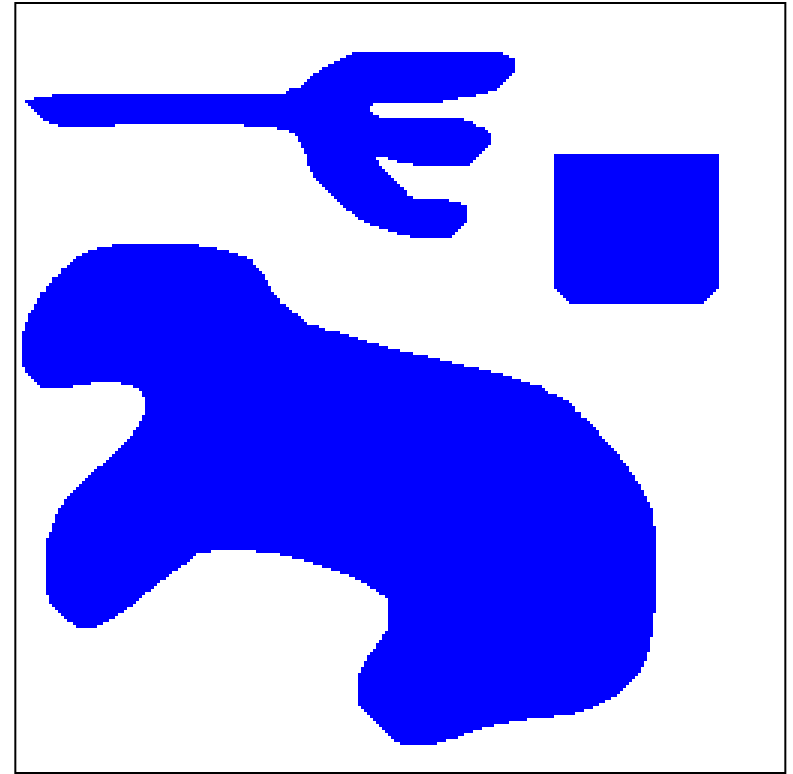
 X

 $\delta_B(X)$

La dilatation morphologique



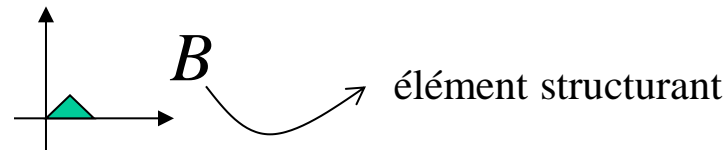
X



$\delta_B(X)$

L'érosion morphologique

L'érosion morphologique de X par B est définie par le principe de dualité : $\varepsilon_B(\overline{X}) = \overline{\delta_B(X)}$



$$\varepsilon_B(X) = \overline{\delta_B(\overline{X})} = \overline{\overline{X} \oplus \check{B}} = \overline{\bigcup_{b \in \check{B}} \overline{X}_b} = \bigcap_{b \in \check{B}} X_b$$

$$= X \ominus \check{B}$$

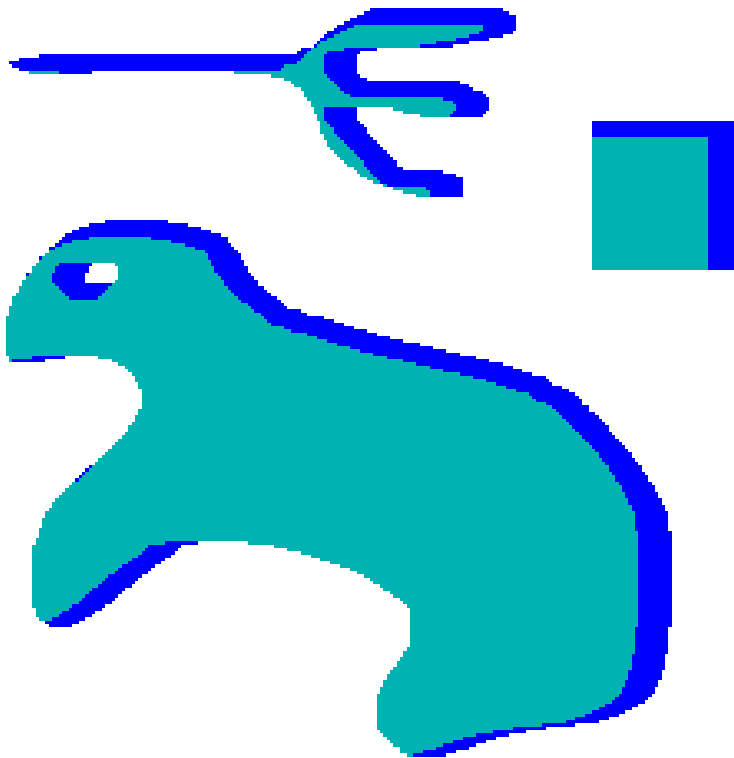
Soustraction
de Minkowski

$$\varepsilon_B(X) = \bigcap_{b \in \check{B}} X_b = \{z / \forall b \in B, \exists x \in X : z + b = x\}$$

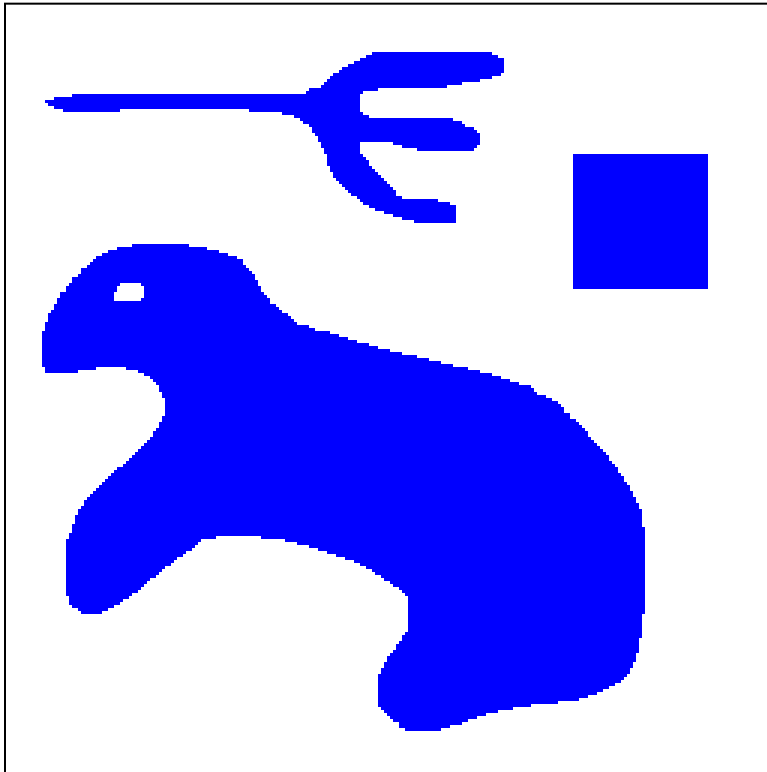
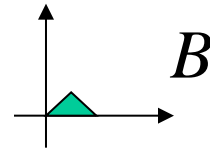
$$= \{z / B_z \subset X\}$$

$$\varepsilon_B(X) = \{z / B_z \subset X\}$$

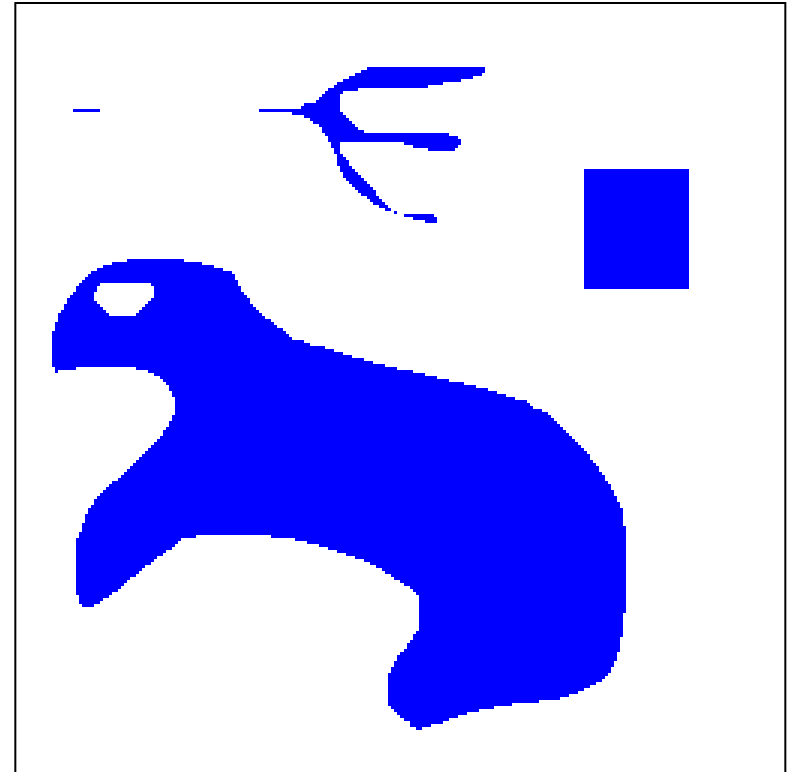
C'est le lieu géométrique
des points z tels que B_z
est inclus dans X



L'érosion morphologique



X



$\mathcal{E}_B(X)$

Propriétés algébriques des opérateurs de base

CROISSANCE

La dilatation et l'érosion sont des opérateurs *croissants*

$$X \subset Y \Rightarrow \delta_B(X) \subset \delta_B(Y)$$

$$X \subset Y \Rightarrow \varepsilon_B(X) \subset \varepsilon_B(Y)$$



L'érosion est *décroissante* par rapport à l'élément structurant : $B \subset B' \Rightarrow \varepsilon_B(X) \supset \varepsilon_{B'}(X)$

EXTENSIVITE

Si l'élément structurant B contient l'origine :

• La dilatation est *extensive*

$$X \subset \delta_B(X)$$

• L'érosion est *anti-extensive*

$$\varepsilon_B(X) \subset X$$

• La dilatation commute avec le *Sup*

$$\delta_B(X \cup Y) = \delta_B(X) \cup \delta_B(Y)$$

• L'érosion commute avec le *Inf*

$$\varepsilon_B(X \cap Y) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_B(Y)$$

On a les égalités :

$$\delta_{B \cup B'}(X) = \delta_B(X) \cup \delta_{B'}(X)$$

$$\varepsilon_{B \cup B'}(X) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_{B'}(X)$$



Mais
seulement les
inclusions :

$$\delta_B(X \cap Y) \subset \delta_B(X) \cap \delta_B(Y)$$

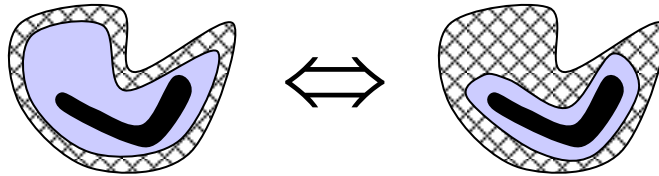
$$\varepsilon_B(X \cup Y) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_B(Y)$$

$$\delta_{B \cap B'}(X) \subset \delta_B(X) \cap \delta_{B'}(X)$$

$$\varepsilon_{B \cap B'}(X) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_{B'}(X)$$

Propriétés algébriques des opérateurs de base

PROPRIETE D'ADJONCTION



$$X \subset \varepsilon_B(Y) \Leftrightarrow \delta_{\bar{B}}(X) \subset Y$$

CAS DEGENERES

élément structurant vide

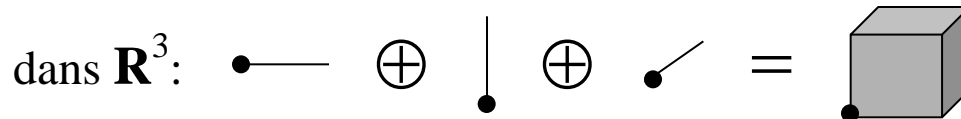
$$\varepsilon_{\emptyset}(X) = \mathbf{R}^n$$

$$\delta_{\emptyset}(X) = \emptyset$$

ASSOCIATIVITE DE LA DILATATION

Application : Polyèdres de Steiner dans \mathbf{R}^n :

ex:



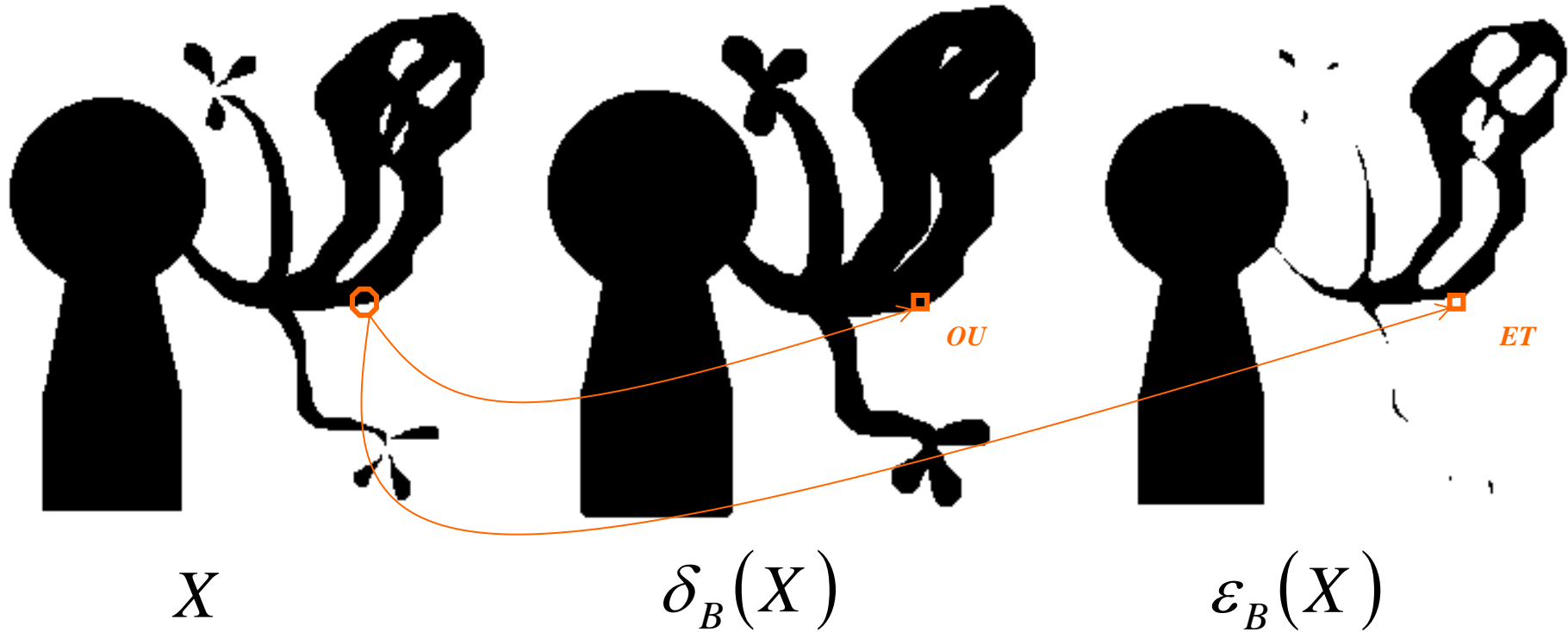
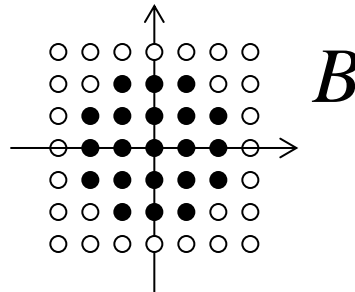
$$\delta_{B'}(\delta_B(X)) = \delta_{\delta_{B'}(B)}(X)$$

$$\varepsilon_{B'}(\varepsilon_B(X)) = \varepsilon_{\delta_{B'}(B)}(X)$$

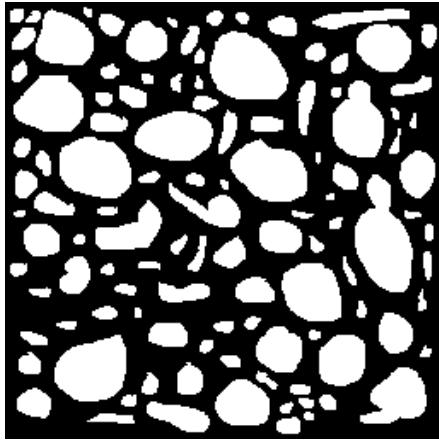
Décomposition des
éléments structurants
convexes en sommes
de segments

Application aux images binaires

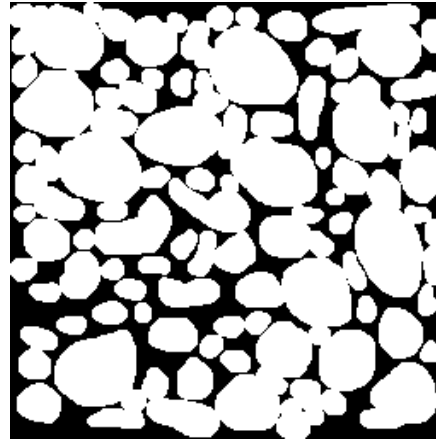
Le treillis est l'ensemble
des parties de \mathbf{Z}^2



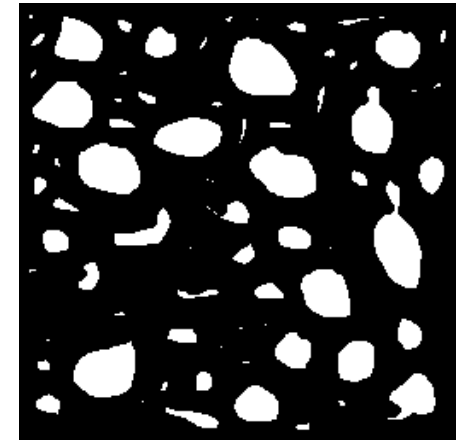
Conclusions sur les opérateurs de base



Originale



Dilatée



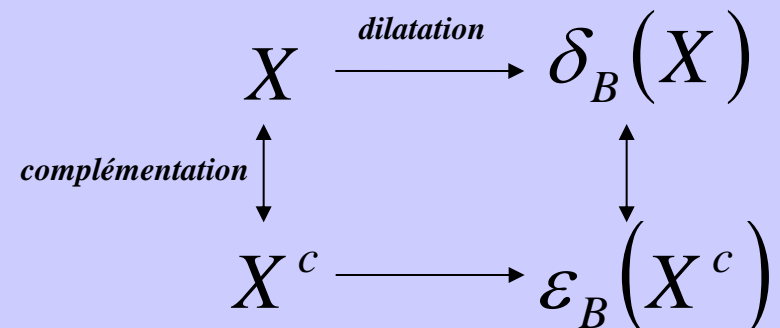
Erodée

- *La dilatation fait disparaître les petits trous et les petits détroits, et fait grossir les objets.*
- *L'érosion fait disparaître les petits objets et les petits isthmes, et amincit les objets restants.*



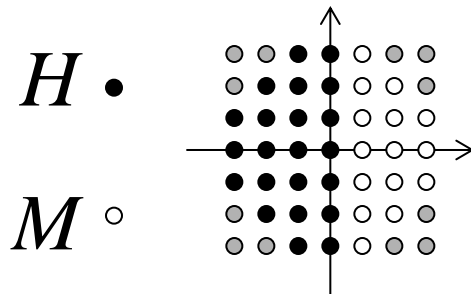
Dilatation et érosion sont des opérations *non réversibles*.

Dilatation et érosion sont des opérations *duales, pas inverses* !



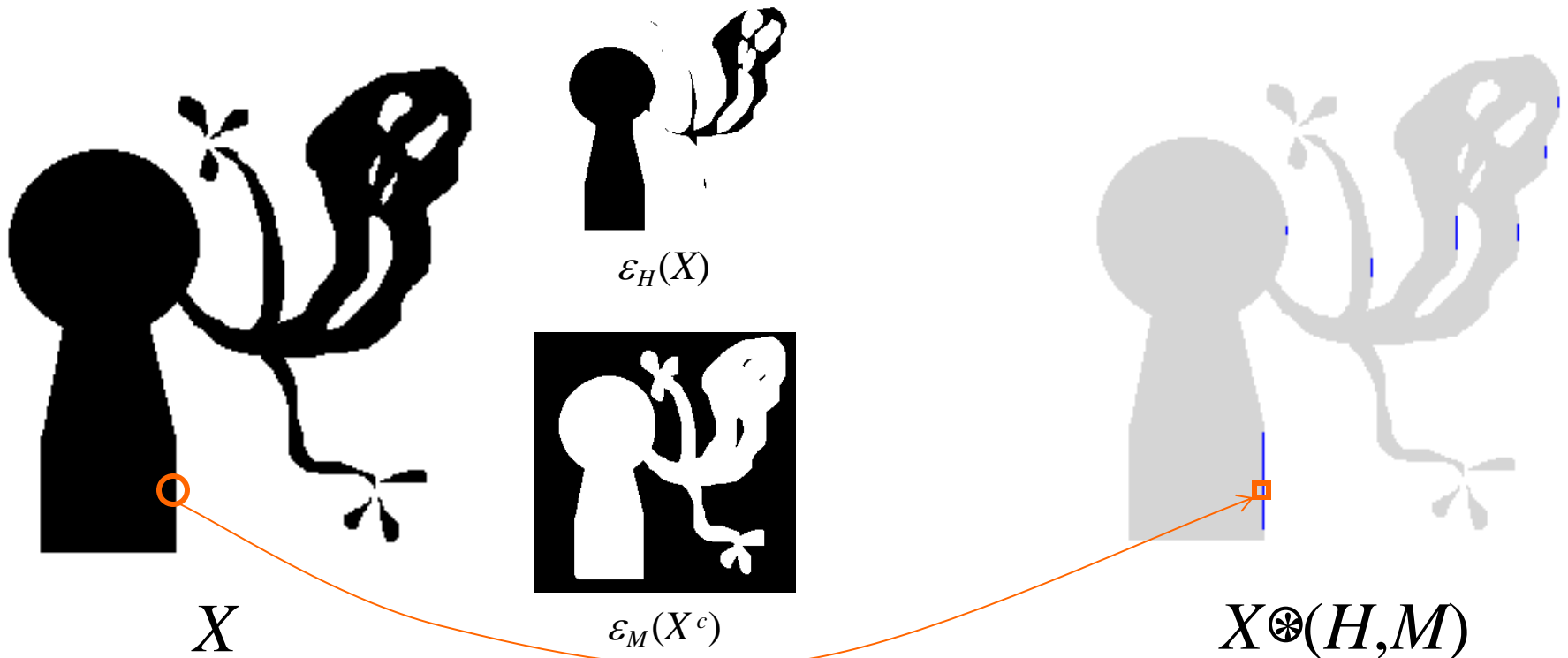
Transformées en tout-ou-rien

Les transformées en tout-ou-rien (*Hit-or-Miss Transform*) unifient et généralisent érosions et dilatations.



$$X \circledast (H, M) = \varepsilon_H(X) \cap \varepsilon_M(X^c)$$

Application : Recherche de configurations



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

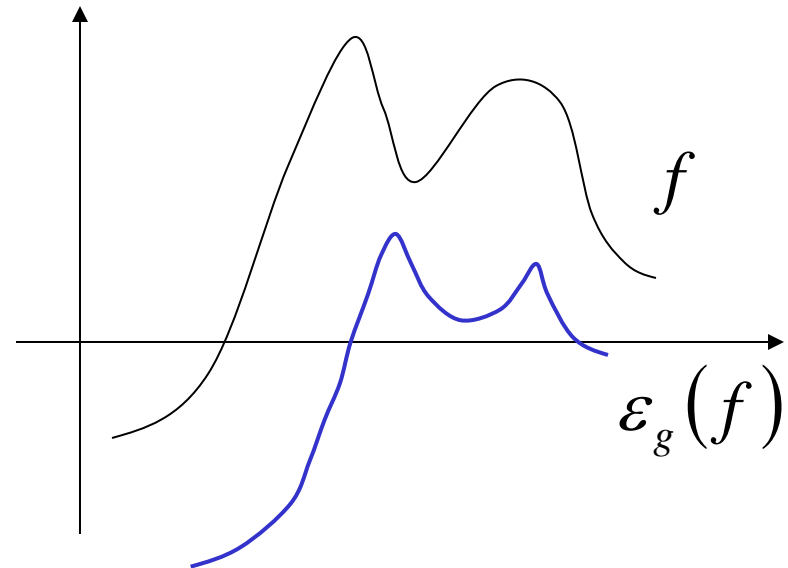
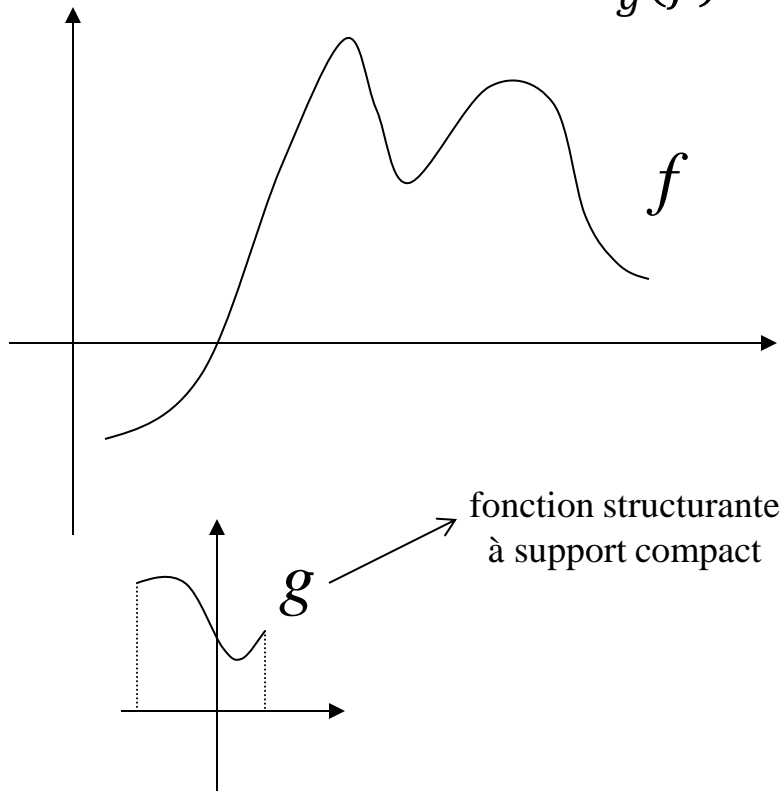
On se place à présent dans le cadre des fonctions : $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

La dilatation et l'érosion fonctionnelles sont respectivement définies par :

$$\begin{aligned}\delta_g(f) &= f \oplus \check{g} \\ \varepsilon_g(f) &= f \ominus \check{g}\end{aligned}$$

$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) + g(y - x)\}$$

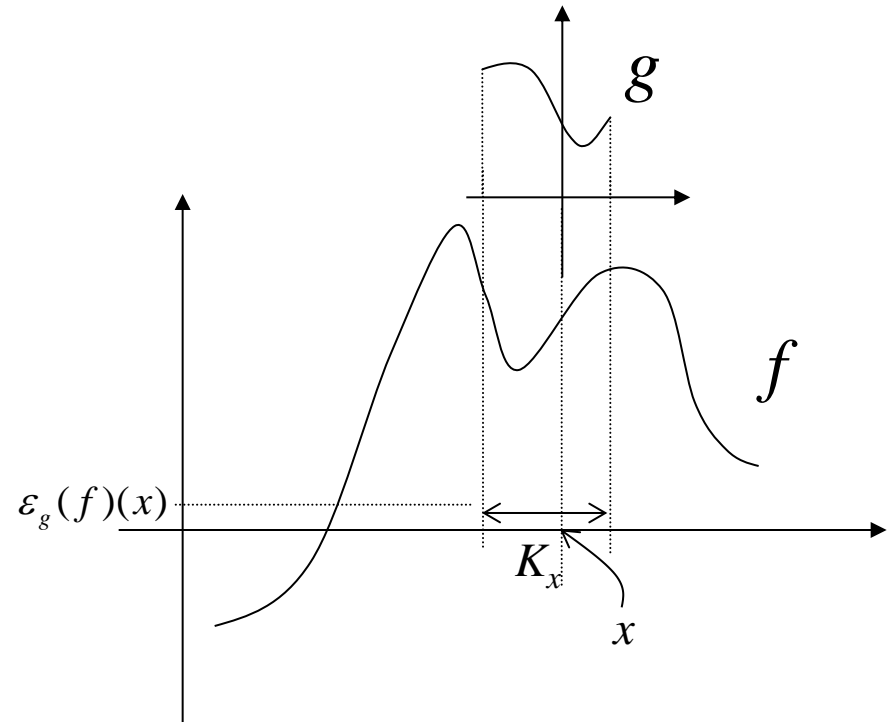
$$\varepsilon_g(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) - g(y - x)\}$$



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

Soit K le support de g

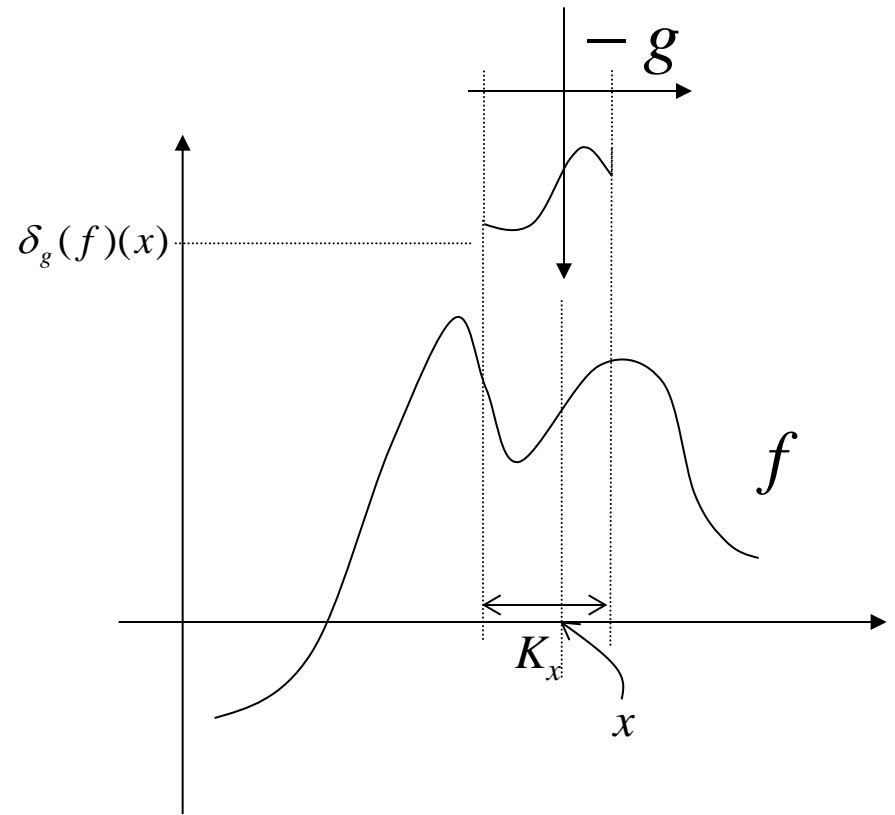
$$\begin{aligned}\varepsilon_g(f)(x) &= \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) - g(y - x)\} \\ &= \inf_{y - x \in K} \{f(y) - g(y - x)\} \\ &= \inf_{y \in K_x} \{f(y) - g(y - x)\}\end{aligned}$$



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

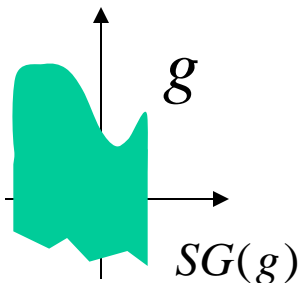
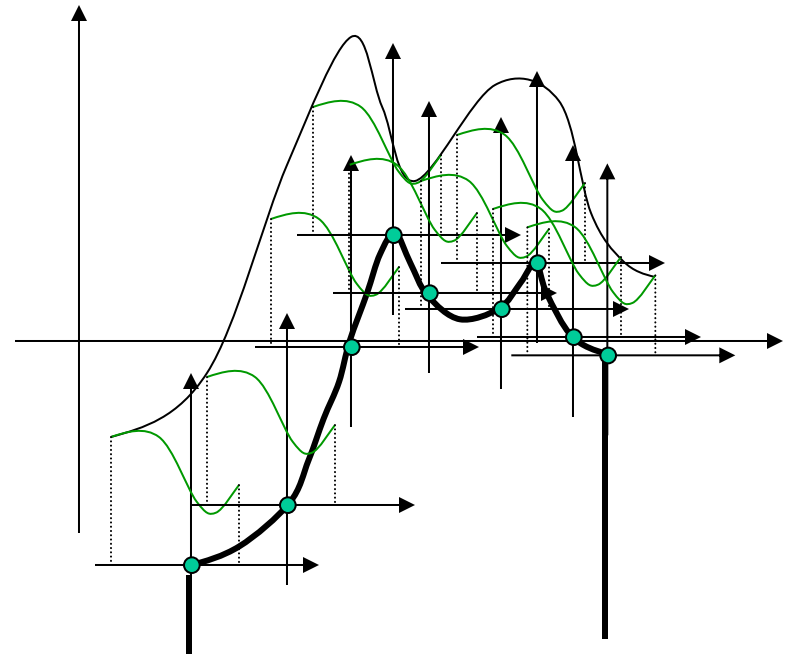
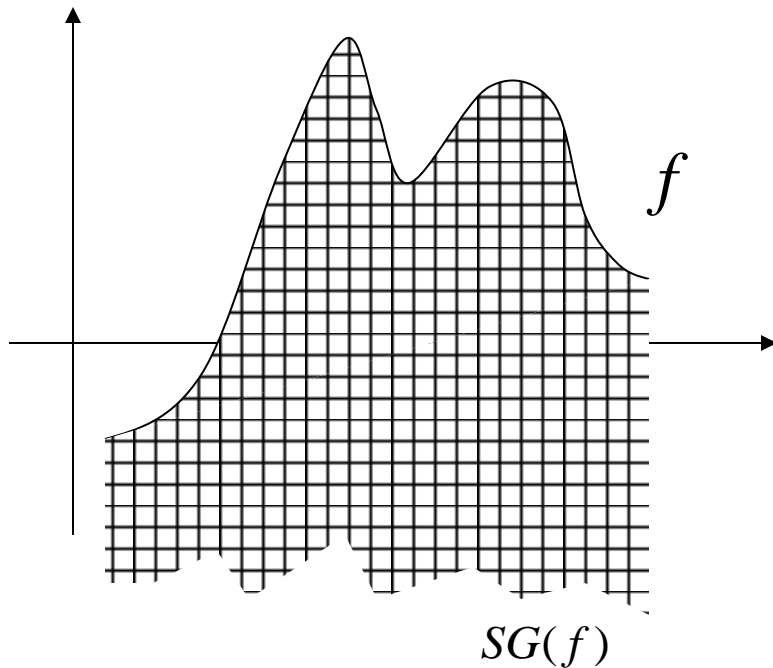
Soit K le support de g

$$\begin{aligned}\delta_g(f)(x) &= \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) + g(y - x)\} \\ &= \sup_{y - x \in K} \{f(y) + g(y - x)\} \\ &= \sup_{y \in K_x} \{f(y) + g(y - x)\}\end{aligned}$$



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

A toute fonction f on associe son *sous-graphe* : $SG(f) = \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{R}} / t \leq f(x)\}$



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

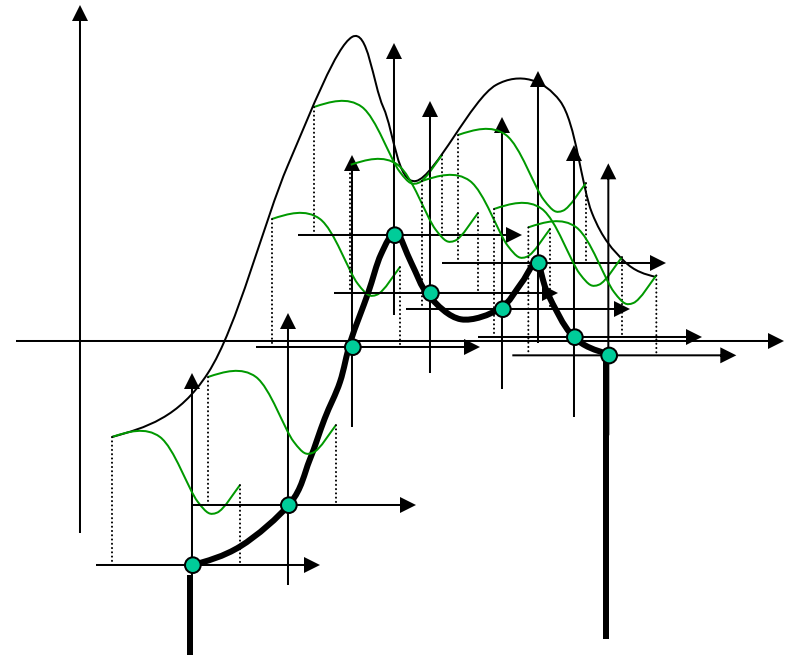
Interprétation ensembliste :

$$SG(\varepsilon_g(f)) = \mathbf{\epsilon}_{SG(g)}(SG(f))$$

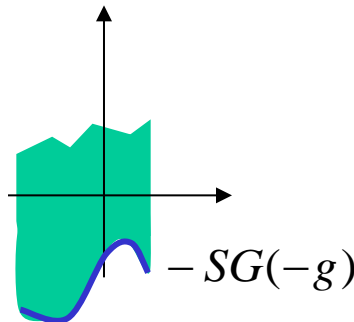
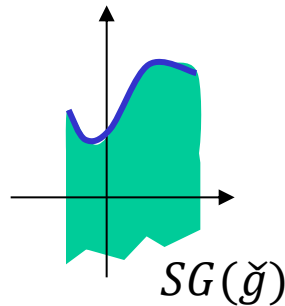
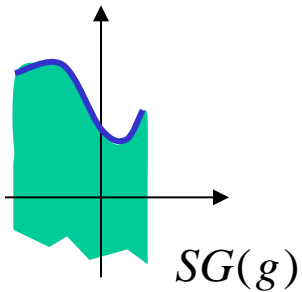
$$SG(\delta_g(f)) = \mathbf{\delta}_{-SG(-g)}(SG(f))$$

fonctionnel

ensembliste

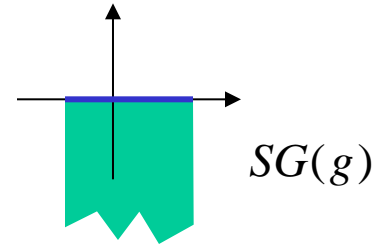


$-g \neq \check{g}$



Cas des éléments structurants plans

Élément structurant plan =
fonction structurante nulle sur un
support compact K



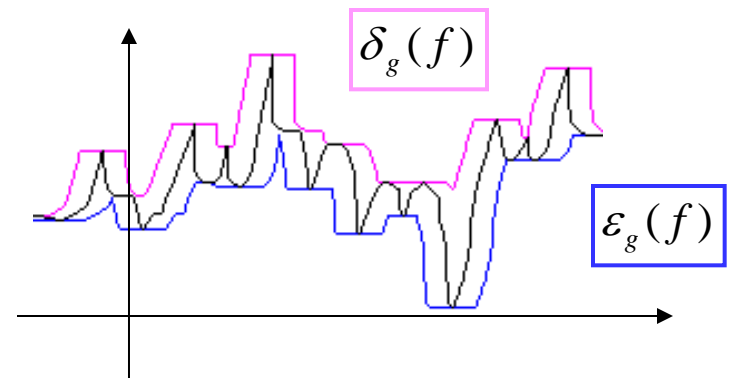
L'expression algébrique des
opérateurs de base devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_g(f)(x) &= \inf_{\substack{y \in \mathbf{R}^n \\ y-x \in K}} \{f(y)\} \\ &= \inf_{y \in K_x} \{f(y)\} \end{aligned}$$

ex:



$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in K_x} \{f(y)\}$$



Propriétés des opérateurs de base dans le cadre fonctionnel

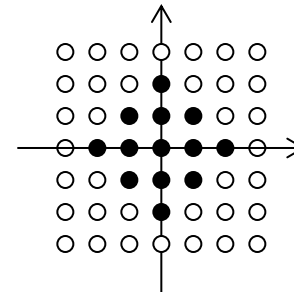
Identiques au cas ensembliste, en remplaçant :

$$\begin{array}{l} \cup \rightarrow \leq \\ \cup \rightarrow \vee \\ \cap \rightarrow \wedge \end{array}$$

$f \leq f' \Rightarrow \delta_g(f) \leq \delta_g(f')$ $f \leq f' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \leq \varepsilon_g(f')$ $g \leq g' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \geq \varepsilon_{g'}(f)$	<p>Si $O \in \text{Supp}(g)$:</p> $f \leq \delta_g(f)$ $\varepsilon_g(f) \leq f$	$\delta_g(f \vee f') = \delta_g(f) \vee \delta_g(f')$ $\varepsilon_g(f \wedge f') = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_g(f')$
$\delta_{g \vee g'}(f) = \delta_g(f) \vee \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_{g \vee g'}(f) = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_{g'}(f)$		$\delta_g(f \wedge f') \leq \delta_g(f) \wedge \delta_g(f')$ $\varepsilon_g(f \vee f') \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_g(f')$ $\delta_{g \wedge g'}(f) \leq \delta_g(f) \wedge \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_{g \wedge g'}(f) \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_{g'}(f)$
$f \leq \varepsilon_g(f') \Leftrightarrow \delta_{\check{g}}(f) \leq f'$		$\delta_{g'}(\delta_g(f)) = \delta_{\delta_{g'}(g)}(f)$ $\varepsilon_{g'}(\varepsilon_g(f)) = \varepsilon_{\delta_{g'}(g)}(f)$

Application aux images numériques

Le treillis est l'ensemble
des fonctions de \mathbf{Z}^2 dans
 \mathbf{Z}

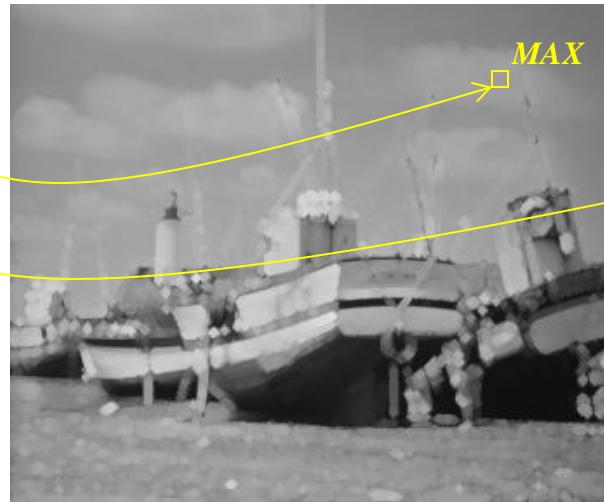


B

élément
structurant plan
 \cong
ensemble



X



$\delta_B(X)$



$\varepsilon_B(X)$

Premiers opérateurs par différence

Opérateur par différence :

Cas ensembliste

$$\Lambda(X) = \Phi(X) \setminus \Psi(X)$$

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

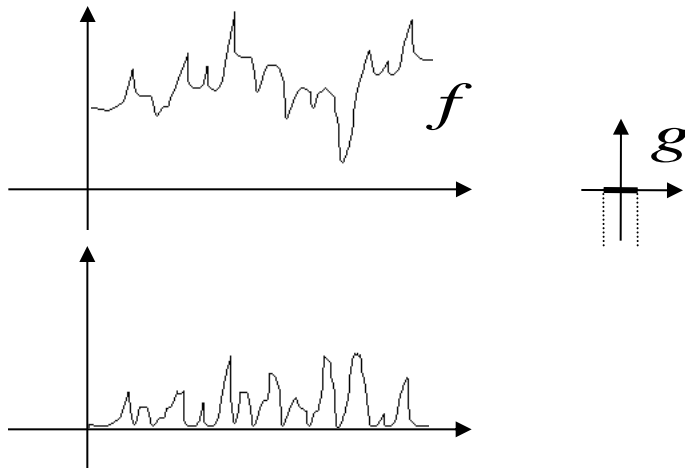
Cas fonctionnel

$$\Lambda(f) = \Phi(f) - \Psi(f)$$

Gradient intérieur

$$g_y^-(x)$$

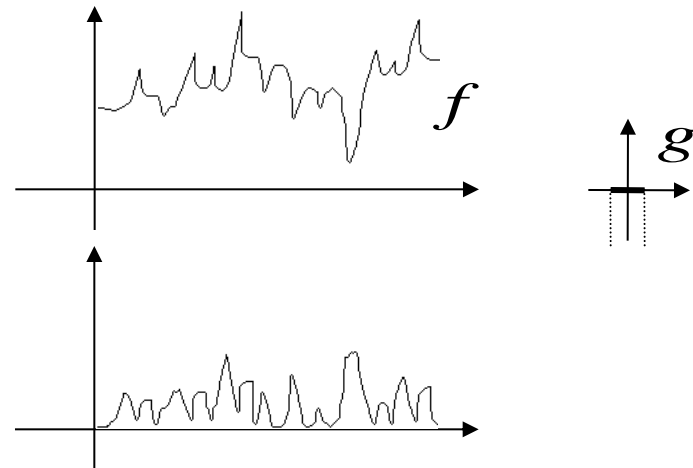
$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



Gradient extérieur

$$g_y^+(x)$$

$$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = x$$

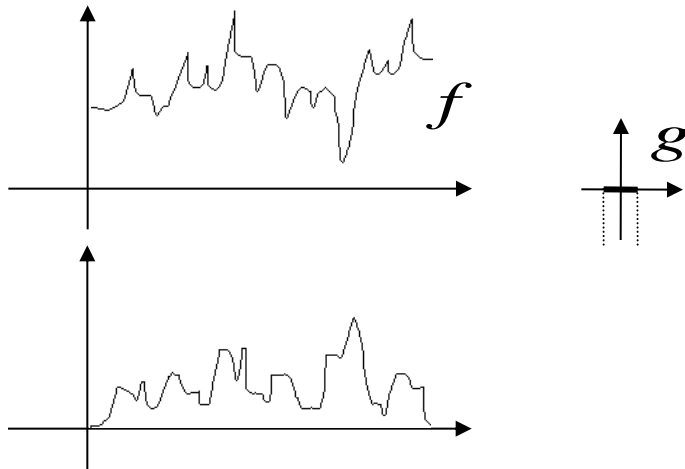


Premiers opérateurs par différence

Gradient morphologique (symétrisée)

$$g_y^m(x)$$

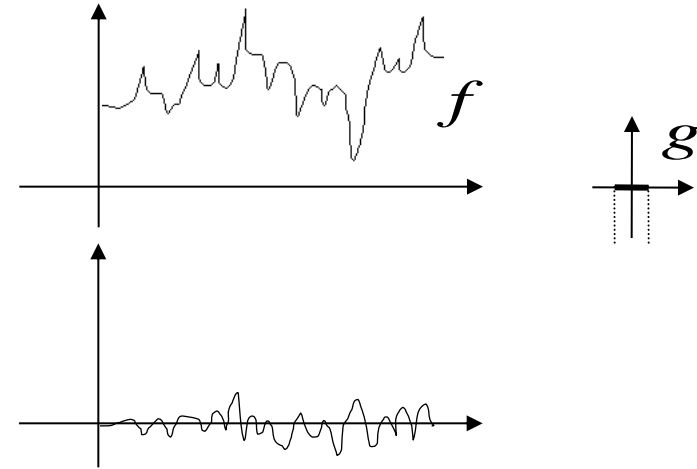
$$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



Laplacien morphologique

$$\lambda_y(x)$$

$$\Phi(x) = g_y^+(x) \quad \Psi(x) = g_y^-(x)$$

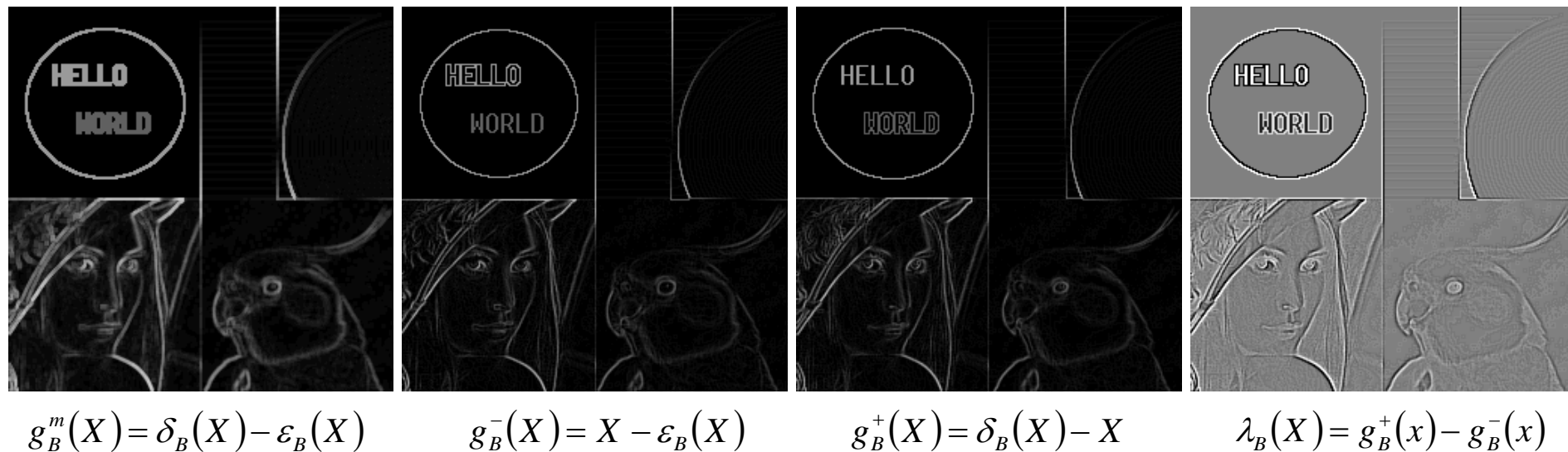
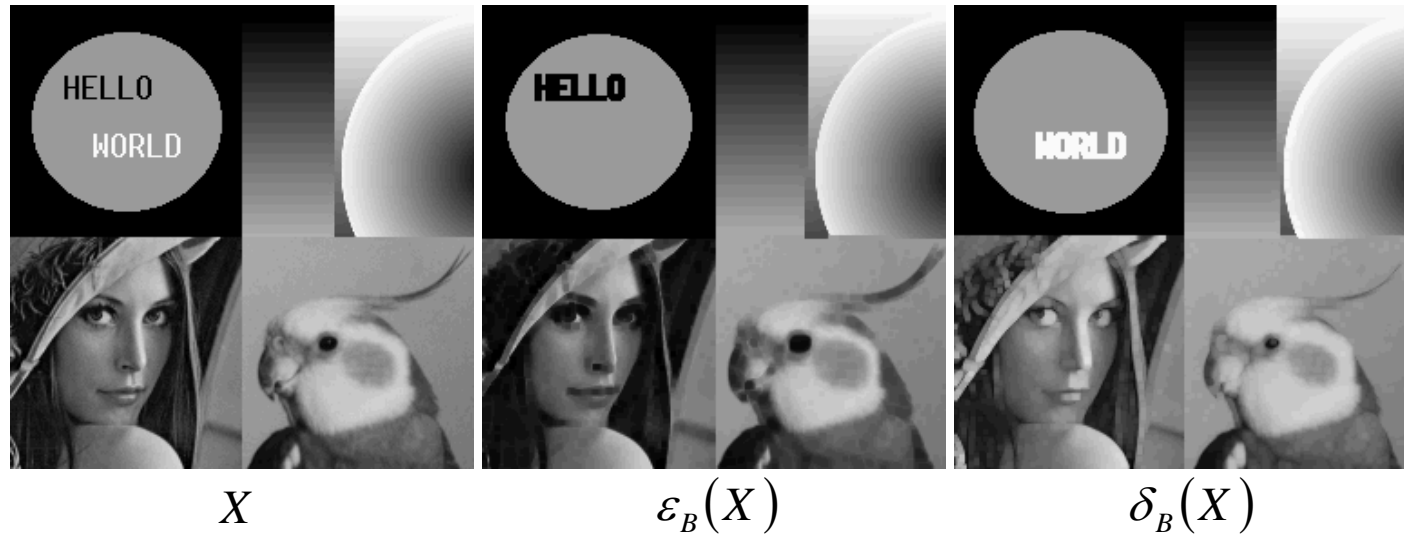


Rq : dans le cas de fonctions de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} , en prenant pour élément structurant une boule euclidienne centrée sur l'origine, le gradient morphologique et le laplacien morphologique tendent respectivement vers le module du gradient et le laplacien euclidiens lorsqu'ils sont définis, quand le rayon de la boule tend vers zéro :

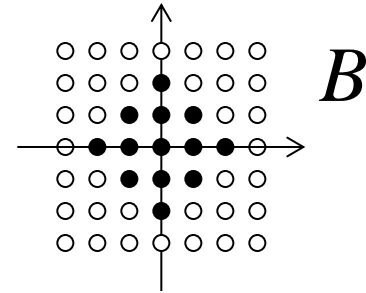
$$\|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}(u, v)\right)^2}$$

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(u, v) + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(u, v)$$

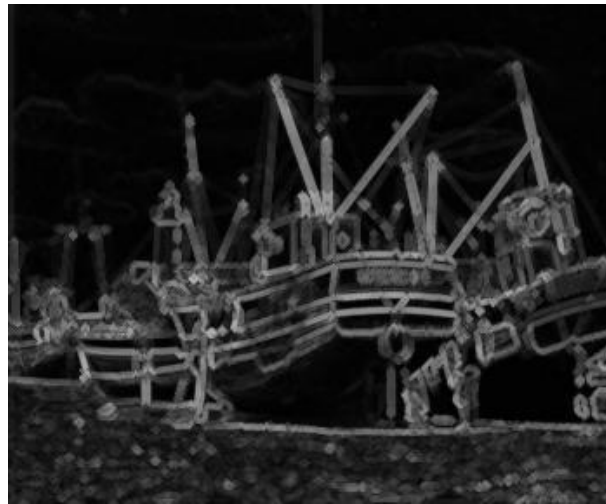
Gradients et laplacien : images numériques



Gradients et laplacien : images numériques



X



$g_B^m(X)$

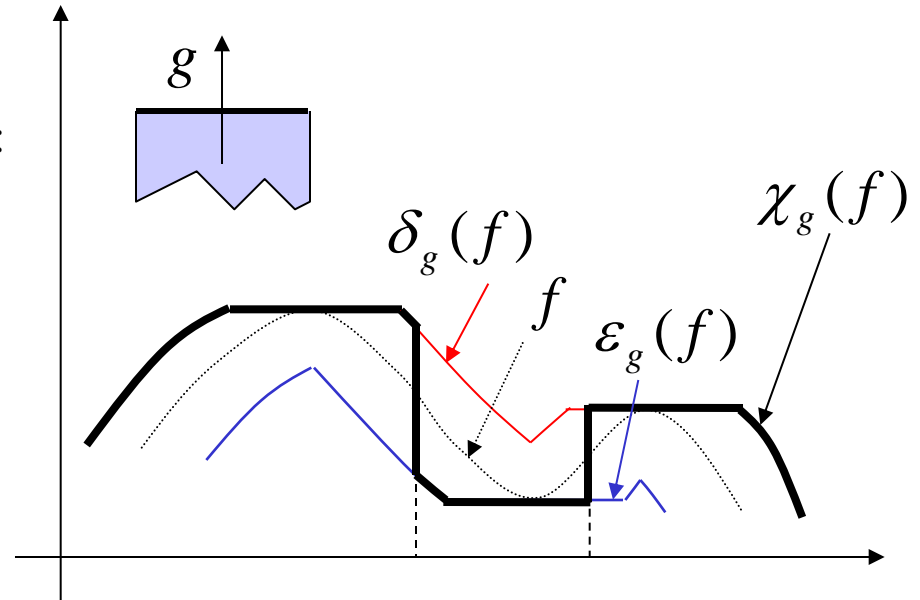


$\lambda_B(X)$

Augmentation de contraste morphologique

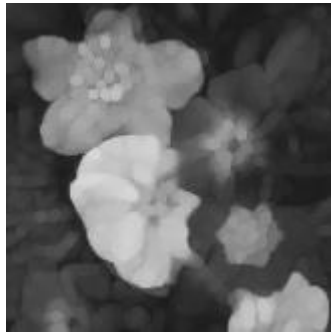
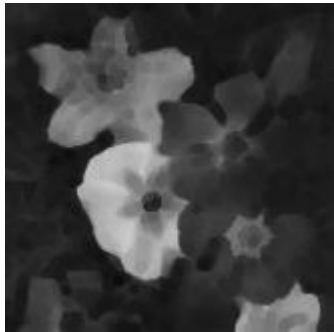
Le filtre rehausseur de contraste est défini par :

$$\begin{cases} \chi_g(f) = \delta_g(f) & \text{si } (\delta_g(f) - f) < (f - \varepsilon_g(f)) \\ \chi_g(f) = \varepsilon_g(f) & \text{si } (\delta_g(f) - f) > (f - \varepsilon_g(f)) \end{cases}$$



erodé

dilaté



$\varepsilon_g(f)$

$\delta_g(f)$

image originale

image rehaussée

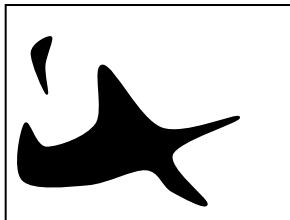


f

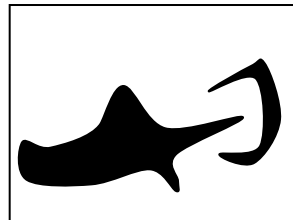
$\chi_g(f)$

Ouvertures et fermetures morphologiques

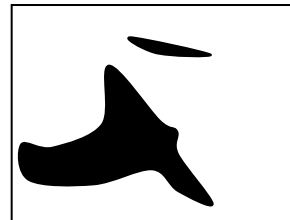
Problème Min/Max : étant donné $Y \in E$, $B \in E$,
trouver le plus petit $X \in E$ tel que : $Y = \varepsilon_B(X)$



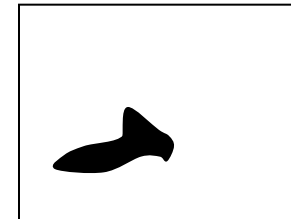
X_1



X_2



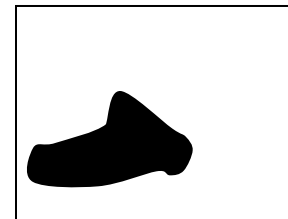
X_3



$$\begin{aligned} Y &= \varepsilon_B(X_1) \\ &= \varepsilon_B(X_2) \\ &= \varepsilon_B(X_3) \end{aligned}$$

REPONSE : C'est le dilaté de Y par le transposé de B :

$$\delta_{\check{B}}(Y) = Y \oplus B$$



On note :

$$\gamma_B(X) = \delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(X)) = (X \ominus \check{B}) \oplus B$$

l'ouverture morphologique de X par B .

et son dual :

$$\varphi_B(X) = \varepsilon_{\check{B}}(\delta_B(X)) = (X \oplus \check{B}) \ominus B$$

la fermeture morphologique de X par B .

Propriétés algébriques des ouvertures et fermetures

CROISSANCE

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

IDEMPOTENCE

$$\gamma_B(\gamma_B(x)) = \gamma_B(x)$$

$$\varphi_B(\varphi_B(x)) = \varphi_B(x)$$

dém: $\delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(x)) \leq x \leq \varepsilon_{\check{B}}(\delta_B(x))$

donc $\delta_{\check{B}}\varepsilon_B \leq id_E \leq \varepsilon_{\check{B}}\delta_B$

\downarrow et $\delta_B\varepsilon_{\check{B}} \leq id_E \leq \varepsilon_B\delta_{\check{B}}$

$\varepsilon_B\delta_{\check{B}}\varepsilon_B \leq \varepsilon_B$

\downarrow

$\varepsilon_B \leq \varepsilon_B\delta_{\check{B}}\varepsilon_B$

donc $\varepsilon_B = \varepsilon_B\delta_{\check{B}}\varepsilon_B$

et donc $\delta_{\check{B}}\varepsilon_B = \delta_{\check{B}}\varepsilon_B\delta_{\check{B}}\varepsilon_B$

EXTENSIVITE

L'ouverture est anti-extensive : $\gamma_B(x) \leq x$

La fermeture est extensive : $x \leq \varphi_B(x)$

dém:

Dans la propriété d'adjonction :

$$x \leq \varepsilon_B(y) \Leftrightarrow \delta_{\check{B}}(x) \leq y$$

$x = \varepsilon_B(y)$ donne $\delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(y)) \leq y$

et $y = \delta_B(x)$ donne $x \leq \varepsilon_{\check{B}}(\delta_B(x))$

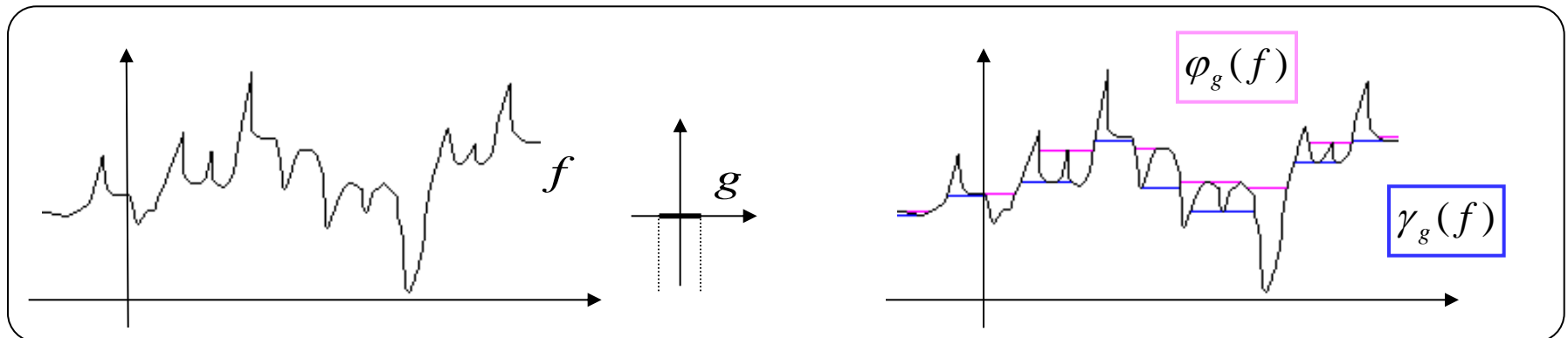
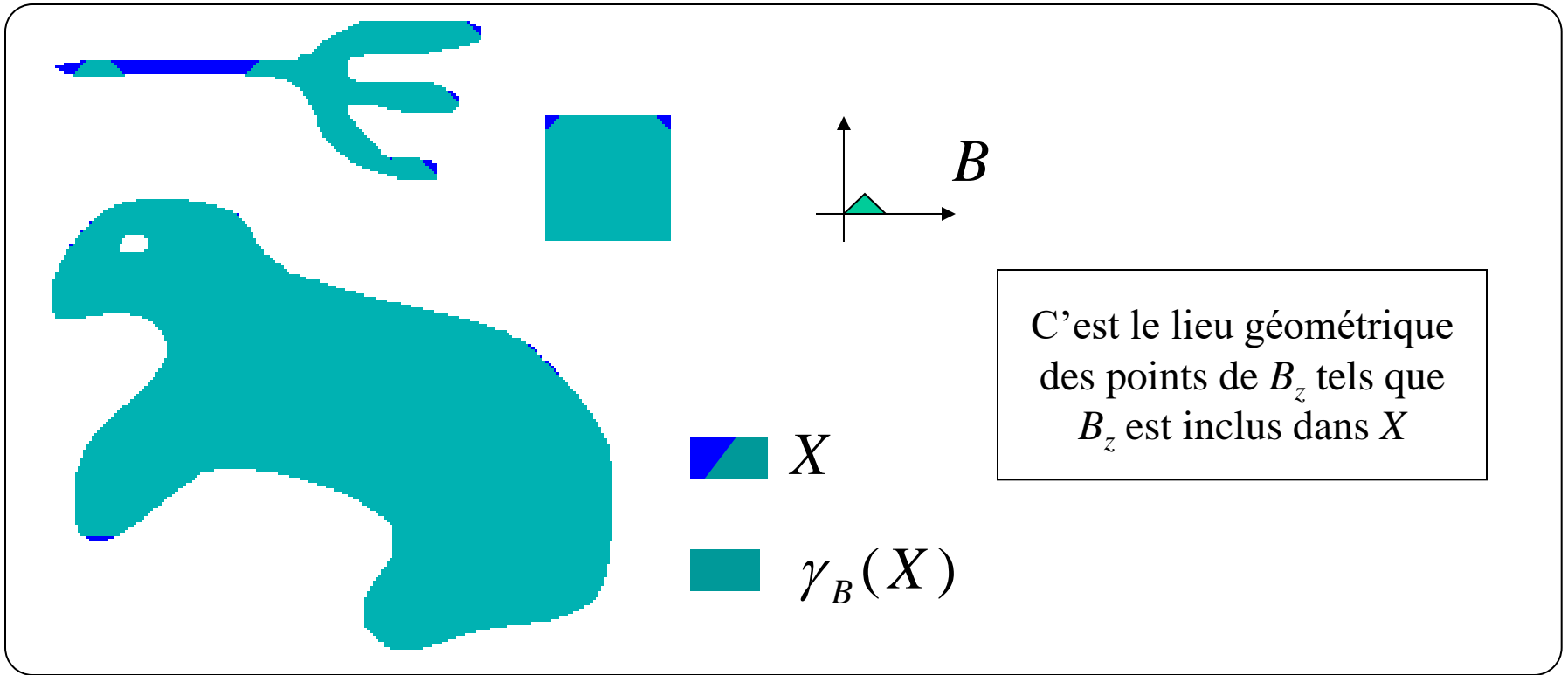
PROPRIETE MIN/MAX

Soient x, x' , et y tels que :

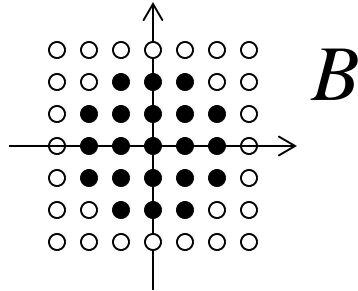
$$\begin{cases} y = \varepsilon_B(x) = \varepsilon_B(x') \\ \text{et} \\ x = \delta_{\check{B}}(y) \end{cases}$$

alors $x = \delta_{\check{B}}(y) = \delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(x))$
 $= \delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(x')) = \gamma_B(x') \leq x'$

Ouvertures et fermetures : ensembles et fonctions



Ouvertures et fermetures : images binaires



- l'ouverture élimine les petites composantes, et ouvre les petits isthmes.
- la fermeture bouche les petites trous, et ferme les petits détroits.



X

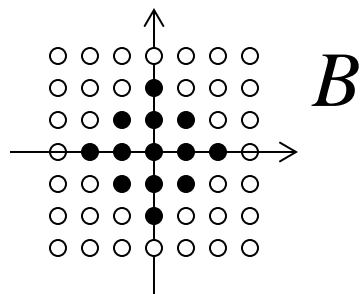


$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

Ouvertures et fermetures : images numériques



$\varepsilon_B(X)$



$\delta_B(X)$



X



$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

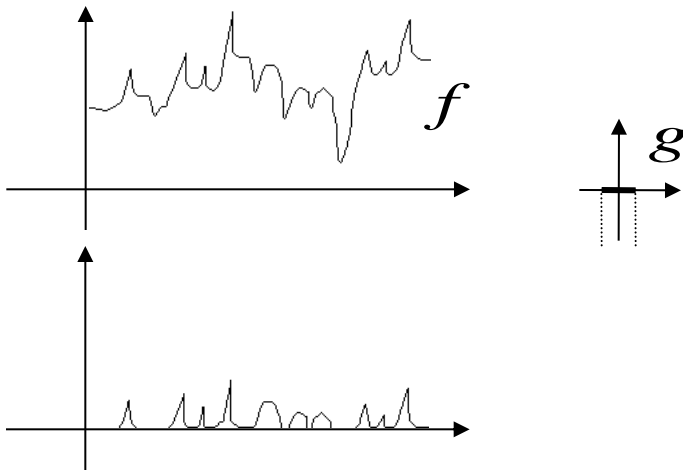
Opérateurs obtenus par différence d'ouvertures et fermetures

Opérateur par différence :

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

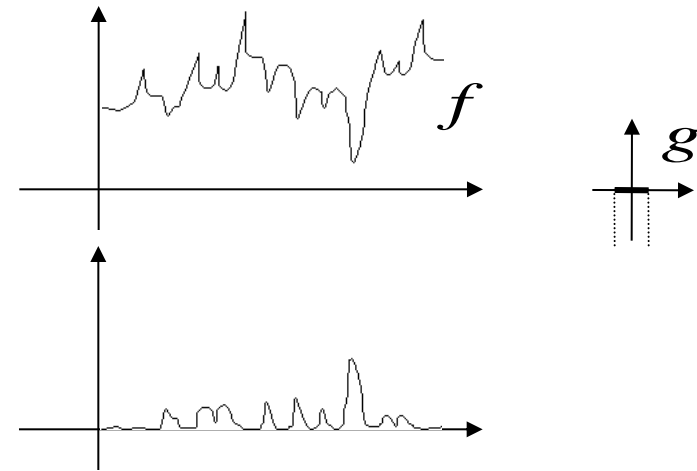
Top-hat

$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \gamma_y(x)$$

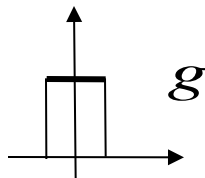


Top-hat conjugué

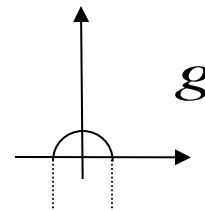
$$\Phi(x) = \varphi_y(x) \quad \Psi(x) = x$$



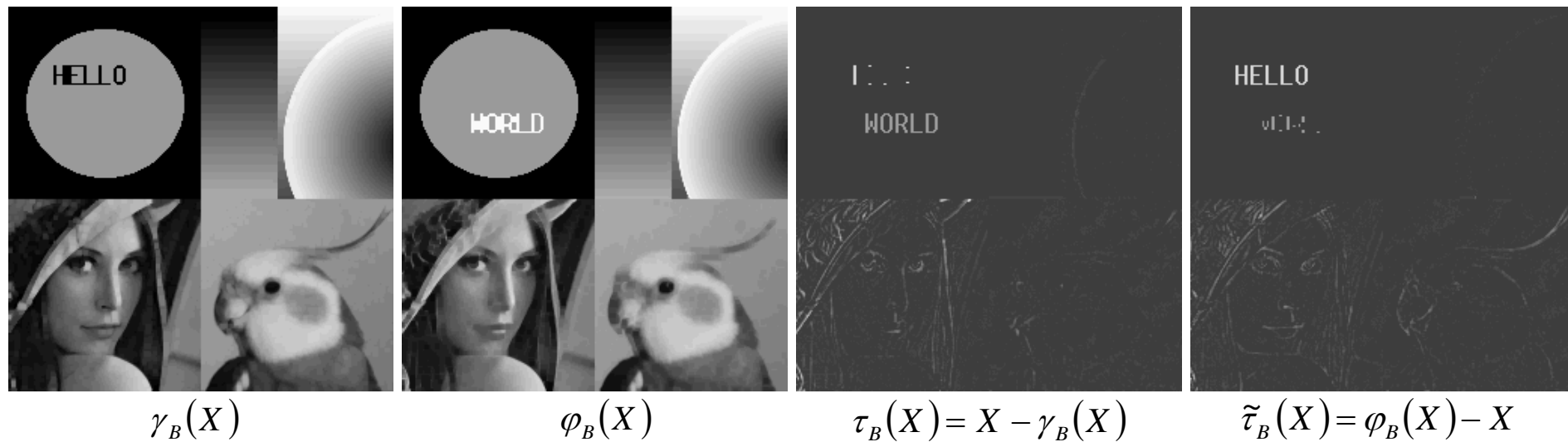
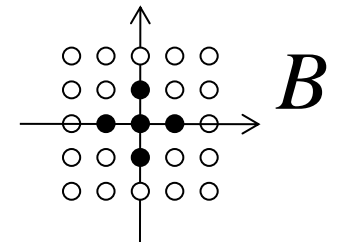
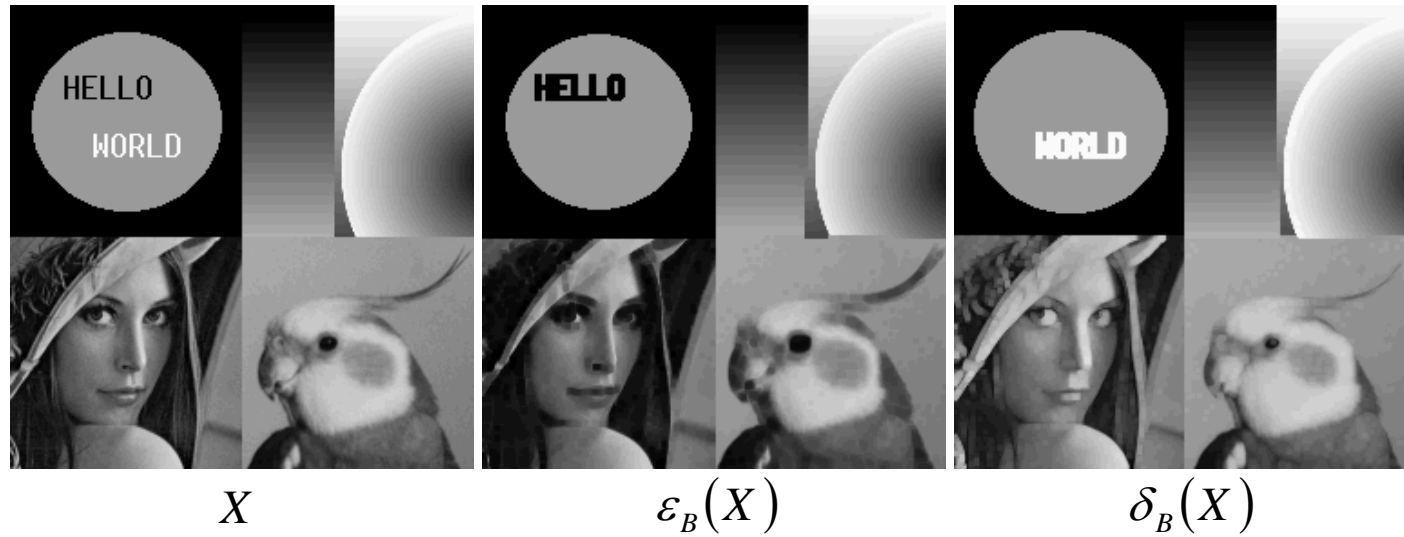
Top-hat



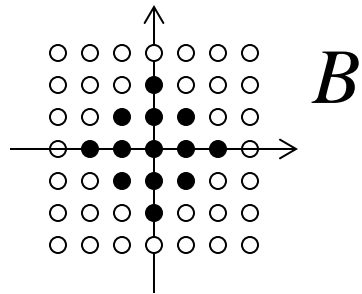
Rolling ball



Top Hat : images numériques



Top Hat : images numériques



$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$



X



$\tau_B(X)$



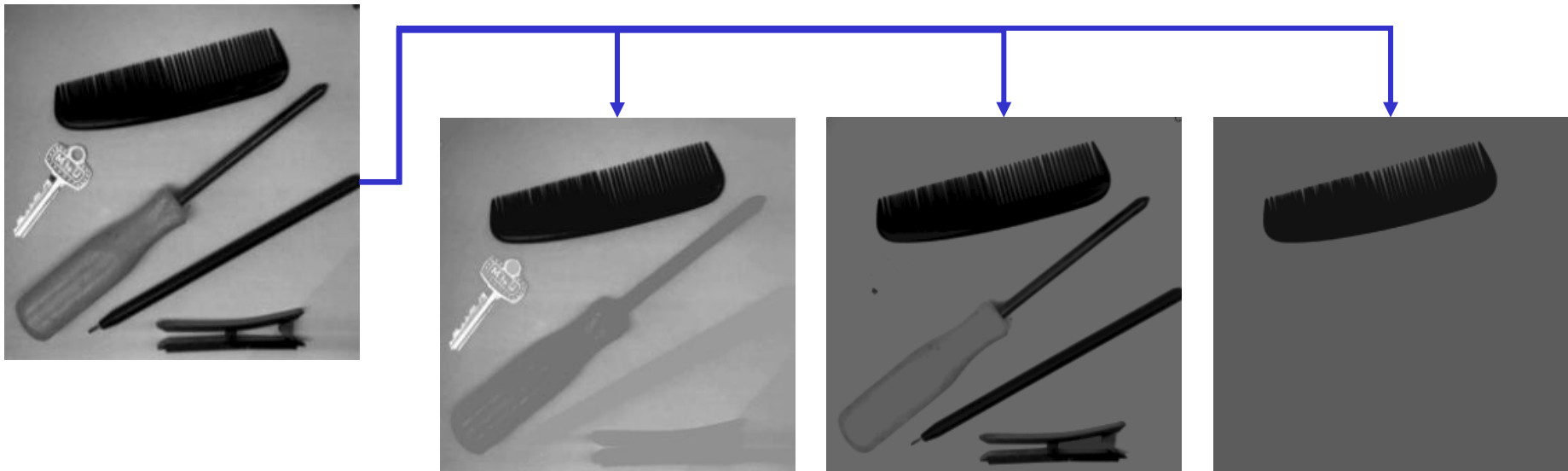
$\tilde{\tau}_B(X)$

Introduction aux opérations géodésiques

Objectif sous-jacent : l'analyse individuelle des « objets » d'une image.

En l'absence de données de plus haut niveau sémantique, l'objet dans une image est associé à une particule, correspondant en général à une composante connexe.

L'analyse individuelle des objets nécessite donc l'utilisation d'opérateurs (filtres) connexes, c'est-à-dire qui préserve les objets (une composante connexe est soit préservée, soit intégralement éliminée).



Opérations géodésiques

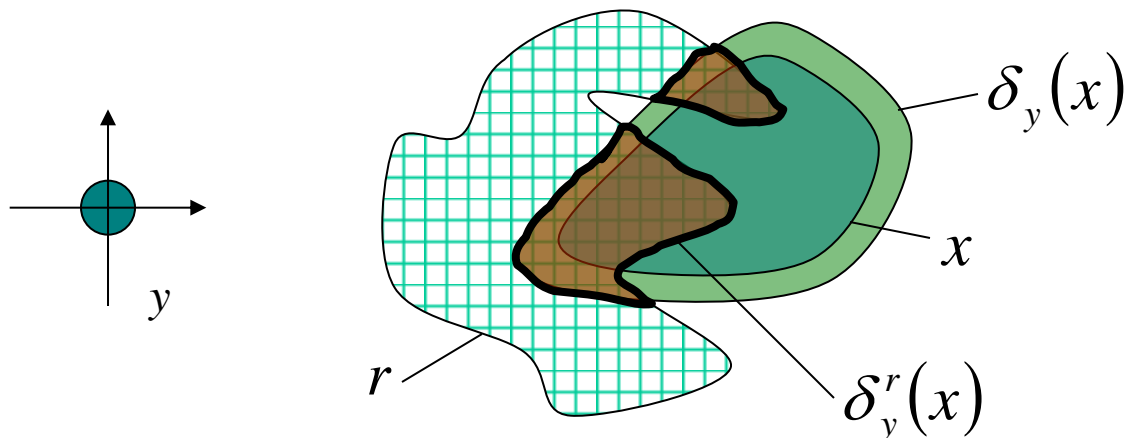
Les opérations géodésiques sont celles qui sont conditionnées par un élément de référence r du treillis. Elles sont définies à partir des opérations géodésiques de base :

la *dilatation géodésique* et la *reconstruction géodésique*.

Dans les opérations géodésiques, l'élément structurant représente le "voisinage élémentaire" de l'origine ; et définit donc la topologie sous-jacente.

La dilatation géodésique dans r :

$$\delta_y^r(x) = \delta_y(x) \wedge r$$



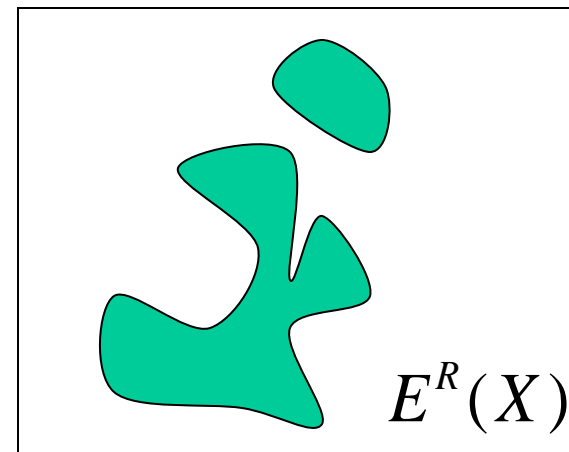
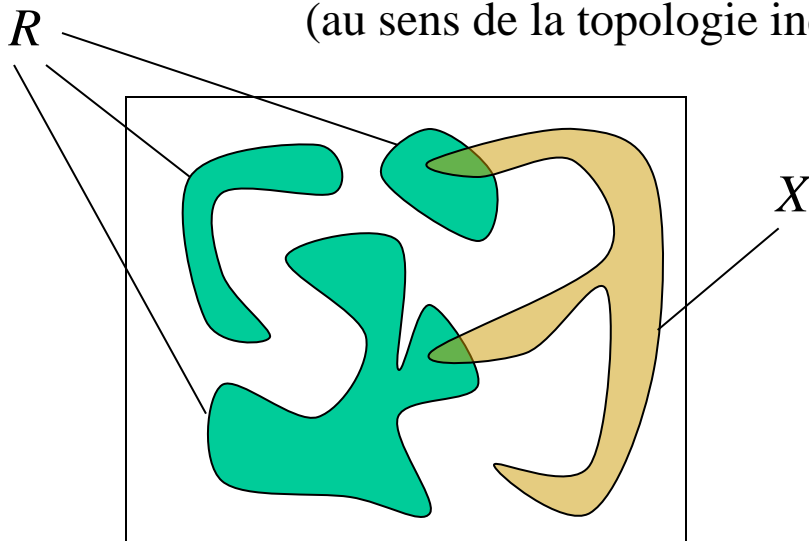
La reconstruction géodésique

posons
$$\begin{cases} (\delta_{B_1}^R)^0(X) = X \\ (\delta_{B_1}^R)^n(X) = \delta_{B_1}^R\left((\delta_{B_1}^R)^{n-1}(X)\right) \text{ pour } n > 0 \end{cases}$$

La reconstruction géodésique de X dans R est définie par :

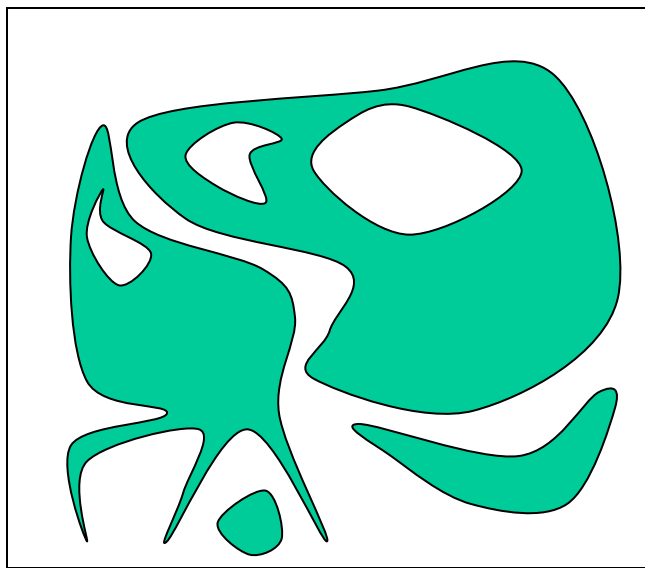
$$E_{B_1}^R(X) = \sup_{n \geq 0} \left\{ (\delta_{B_1}^R)^n(X) \right\}$$

Dans le cadre ensembliste, c'est l'ensemble des composantes connexes (au sens de la topologie induite par B_1) de R qui intersectent X :

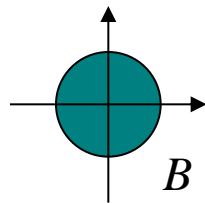


Ouvertures et fermetures par reconstruction

L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :

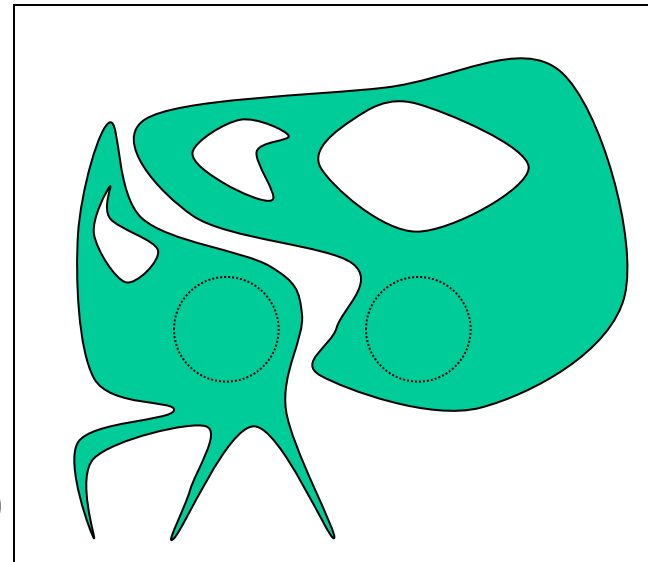


X



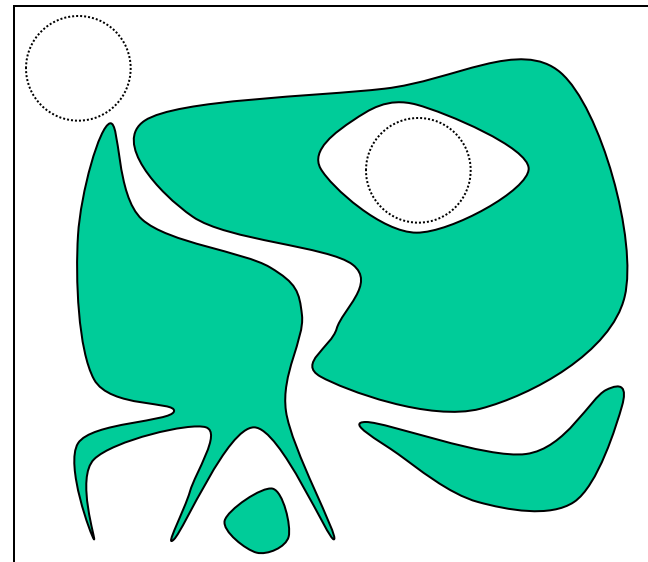
ouverture par reconstruction

$$E^X(\gamma_B(X))$$



fermeture par reconstruction

$$\left(E^{X^c} \left(\left(\varphi_B(X) \right)^c \right) \right)^c$$

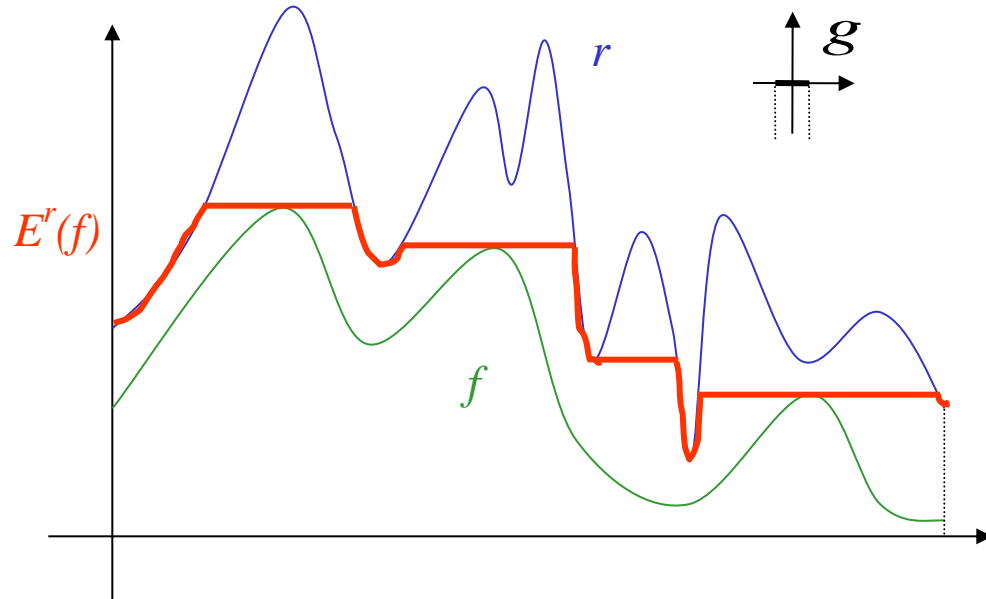


La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

Reconstruction fonctionnelle

La dilatation géodésique de f dans r :

$$\delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r$$



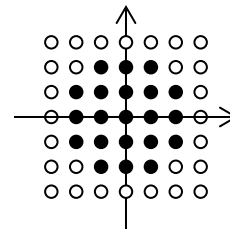
La reconstruction géodésique de f dans r :

$$E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_g^r)^n(f) \}$$

Ouvertures et fermetures par reconstruction

Par extension, les ouvertures et fermetures par reconstruction éliminent les petites structures en préservant les contours des images numériques :

élément structurant
de l'ouverture
morphologique :



original



ouverture par reconstruction



fermeture par reconstruction

Premiers Opérateurs – Conclusion

A RETENIR POUR CE COURS :

- Principes de base : Notion de treillis complet – Erosion et Dilatation algébriques – Liens avec les opérateurs de Minkowski, Passage des treillis ensemblistes aux treillis fonctionnels.
- Opérateurs résiduels : Gradients et Laplacien, définition et liens avec les opérateurs différentiels. Opérateurs de sélection : exemple du contraste.
- Ouverture et Fermeture : Définitions, Propriétés géométriques. Opérateurs Top-Hat : à distinguer des gradients.
- Dilatation et reconstruction géodésiques : définitions.