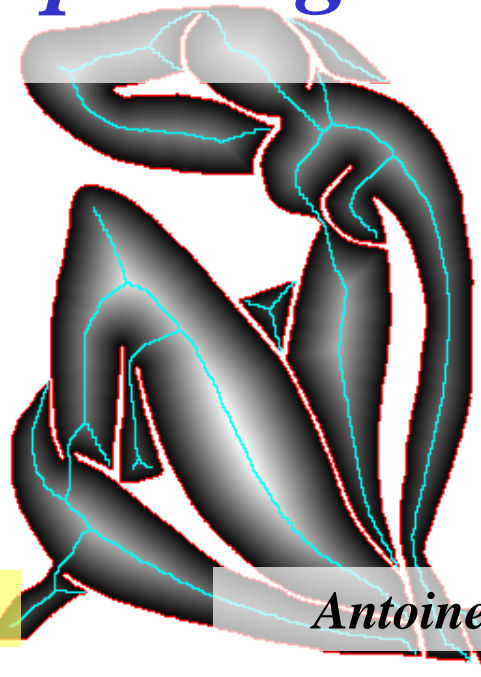




Cours de morphologie mathématique



ENSTA 2^{ème} année

Antoine MANZANERA – ENSTA/U2IS

Chapitre 3 : Filtrage morphologique – opérateurs connexes

- Filtres morphologiques.
- Ouvertures et fermetures algébriques.
- Analyse granulométrique.
- Filtres alternés séquentiels.
- Pyramides et espaces d'échelles morphologiques.
- Opérateurs connexes et applications de la géodésie
- Filtres connexes et F.A.S par reconstruction
- Invariance par changement de contraste et EDP

L'approche morphologique du filtrage



En traitement linéaire des images, filtrer, c'est *éliminer* certaines *composantes fréquentielles* des images.

Filtrage = Convolution



En morphologie mathématique, filtrer, c'est *simplifier* l'image en supprimant certaines structures géométriques (en général implicitement définies par un ou plusieurs éléments structurants).

Le filtre morphologique simplifie l'image en préservant la structure, mais il perd en général de l'information (→ Croissance).

Le filtre morphologique est stable et possède une classe d'invariance connue (→ Idempotence).



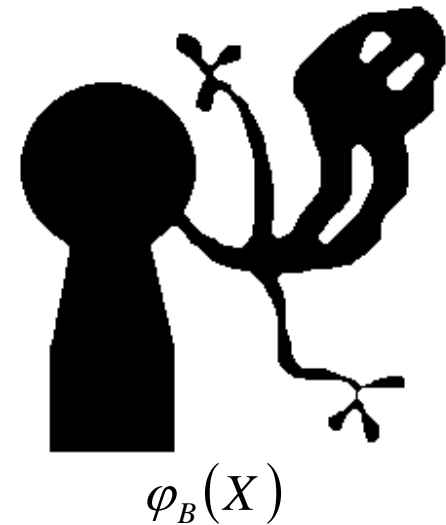
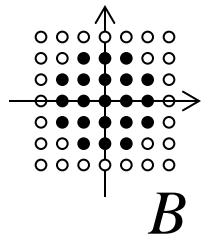
Rappel : ouvertures et fermetures morphologiques

l'ouverture morphologique de X par B.

$$\gamma_B(X) = \delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(X)) = (X \ominus \check{B}) \oplus B$$

la fermeture morphologique de X par B.

$$\varphi_B(X) = \varepsilon_{\check{B}}(\delta_B(X)) = (X \oplus \check{B}) \ominus B$$



CROISSANCE

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

IDEMPOTENCE

$$\begin{aligned} \gamma_B(\gamma_B(x)) &= \gamma_B(x) \\ \varphi_B(\varphi_B(x)) &= \varphi_B(x) \end{aligned}$$

EXTENSIVITE

L'ouverture est anti-extensive : $\gamma_B(x) \leq x$

La fermeture est extensive : $x \leq \varphi_B(x)$

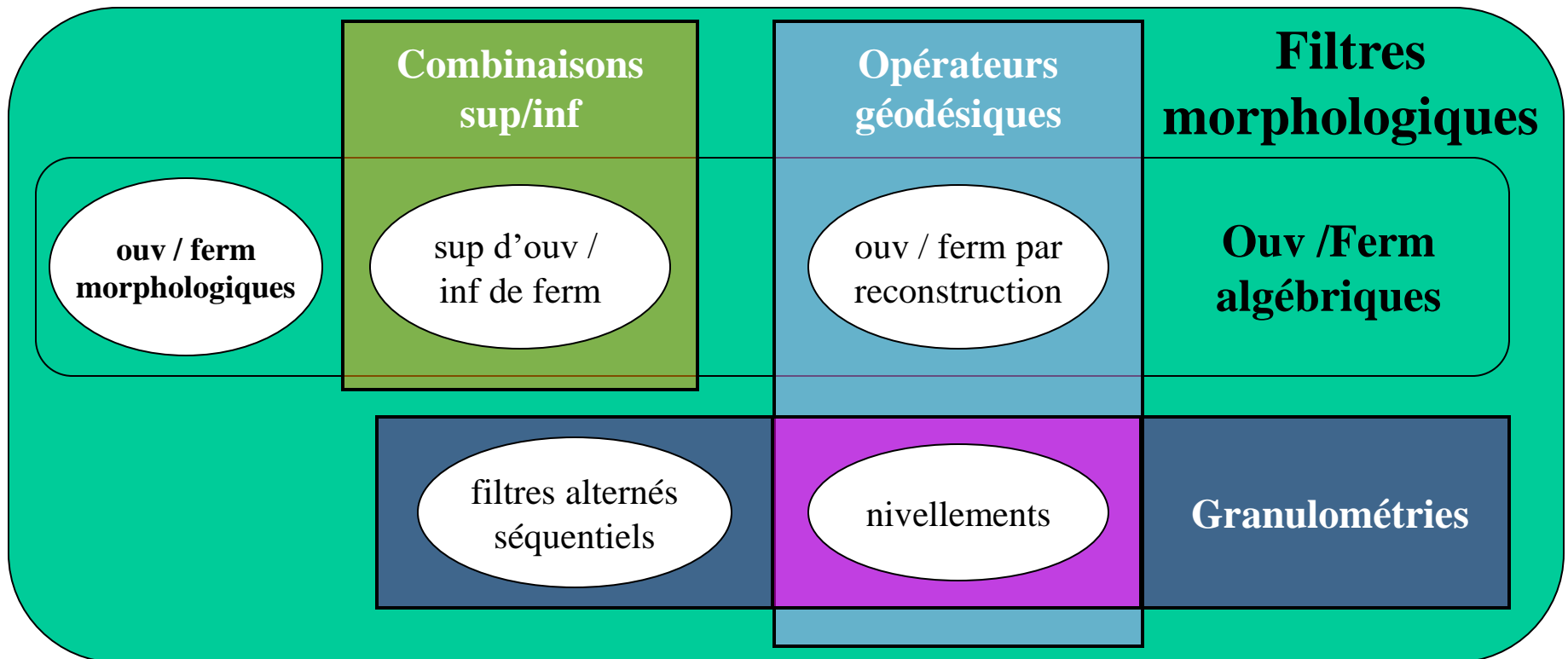
Filtres morphologiques

Un *filtre morphologique* est un opérateur ψ croissant et idempotent :

$$x \leq y \Rightarrow \psi(x) \leq \psi(y)$$

$$\psi(\psi(x)) = \psi(x)$$

On peut construire différentes familles de filtres morphologiques à partir des filtres de base, l'ouverture et la fermeture morphologiques :



Ouvertures et fermetures algébriques

Les ouvertures et fermetures algébriques généralisent les ouvertures et fermetures morphologiques.

- Une **ouverture algébrique** est un filtre morphologique anti-extensif.
- Une **fermeture algébrique** est un filtre morphologique extensif.

PROPRIETE

- Un sup d'ouvertures morphologiques est une ouverture algébrique
- Un inf de fermetures morphologiques est une fermeture algébrique

ex :

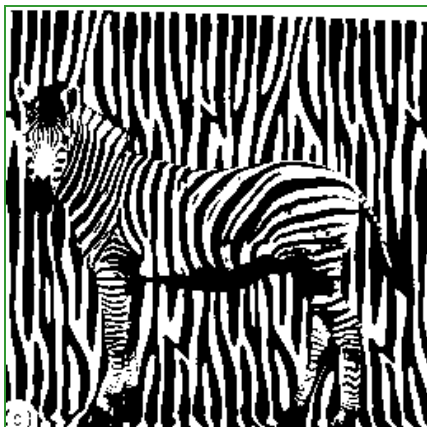
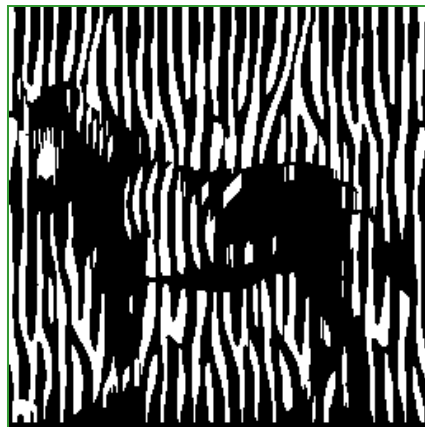


Image originale



Ouverture morphologique par un segment vertical



Ouverture morphologique par un segment horizontal



Ouverture algébrique par union des deux ensembles

Granulométries

L'analyse granulométrique est l'étude de la taille des objets fondée sur le principe du *tamissage* : sélection des objets par un ensemble de tamis de différentes tailles.

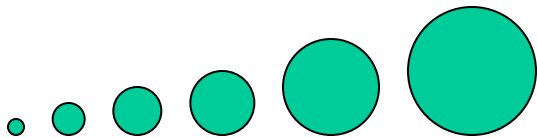
Formellement, une granulométrie peut être définie par une famille d'ouvertures :

$$(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0} \quad \text{telle que :}$$

$$0 \leq \lambda \leq \lambda' \Rightarrow \gamma_\lambda \gamma_{\lambda'} = \gamma_{\lambda'} \gamma_\lambda = \gamma_{\lambda'}$$

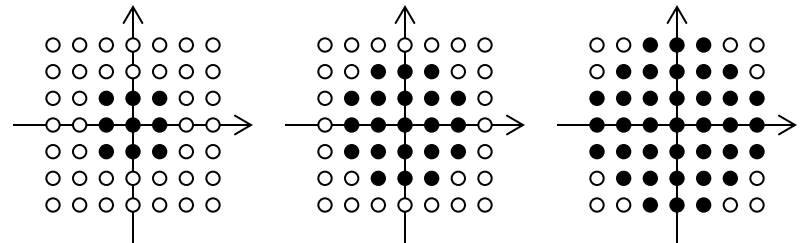
ex1 : $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}^+}$

Ouvertures par des boules euclidiennes de rayon λ



ex2 : $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}$

Ouvertures par une suite croissante de boules discrètes



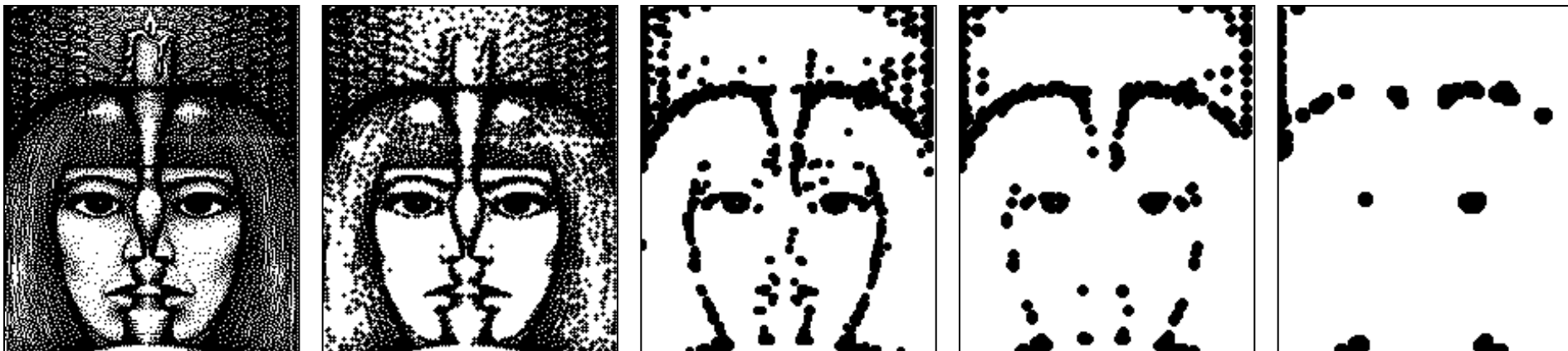
Granulométrie et anti-granulométrie

La famille des opérateurs duaux (fermetures de taille croissante) est une anti-granulométrie :

granulométrie



anti-granulométrie

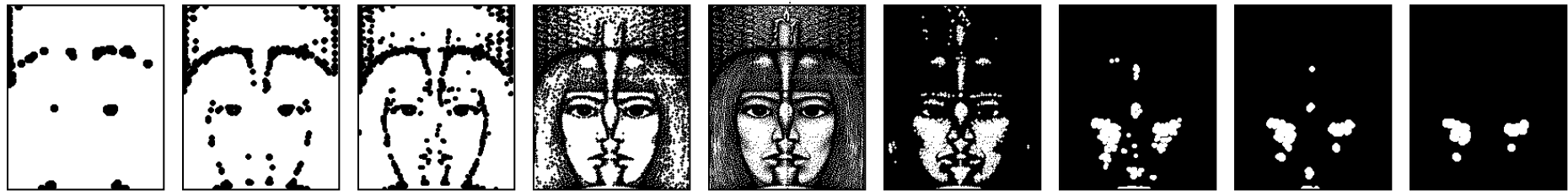
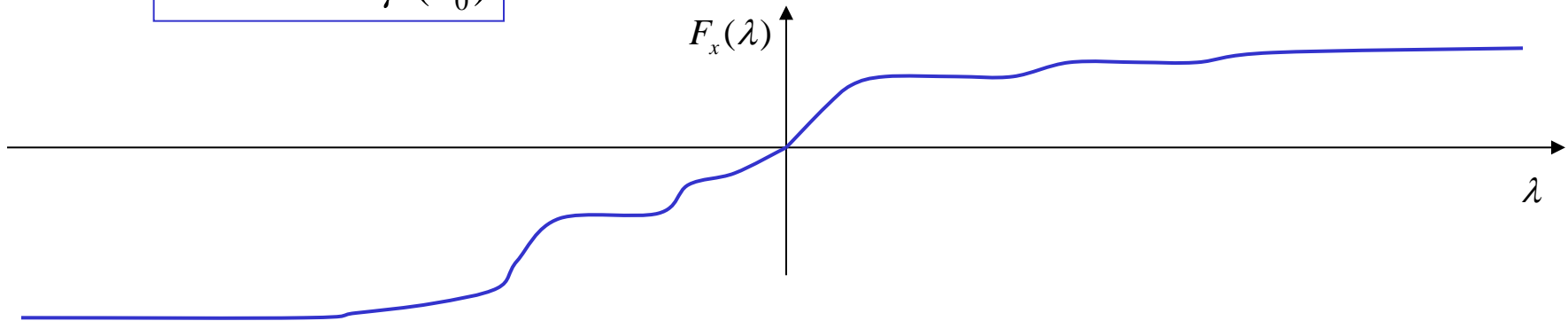


Fonction de distribution granulométrique

Soit μ une mesure bornée sur un treillis E (aire, intégrale...)

Pour $x \in E$, on note x_λ (resp. $x_{-\lambda}$) l'image de x par l'opérateur de granulométrie (resp. d'anti-granulométrie) d'indice λ .

On note $F_x(\lambda) = 1 - \frac{\mu(x_\lambda)}{\mu(x_0)}$ la fonction de distribution sur x de la granulométrie $(\mathcal{V}_\lambda)_\lambda$



anti-granulométrie

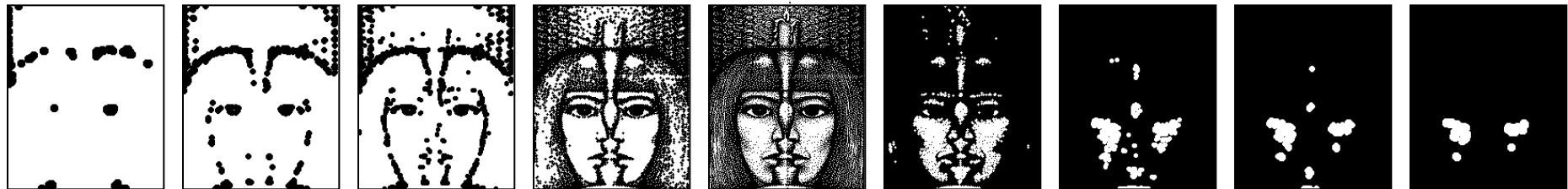
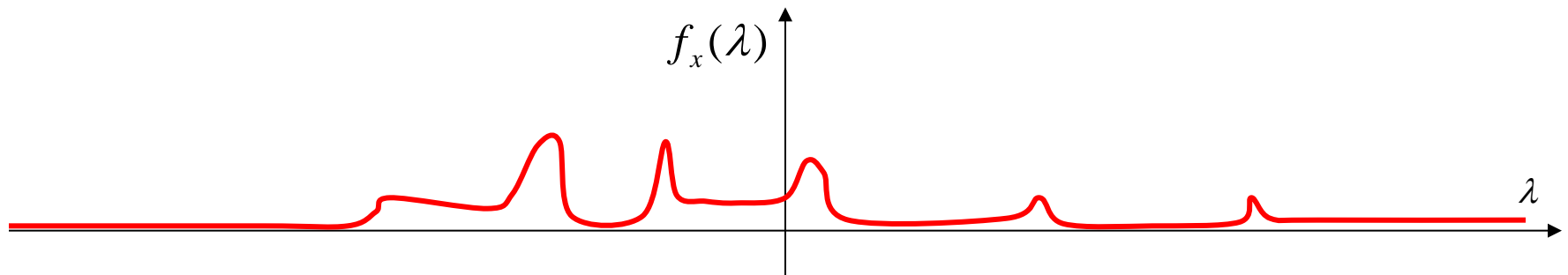
original

granulométrie

Spectre granulométrique

Le spectre granulométrique est la dérivée de la fonction de distribution granulométrique :

$$f_x(\lambda) = F'_x(\lambda)$$



anti-granulométrie

original

granulométrie

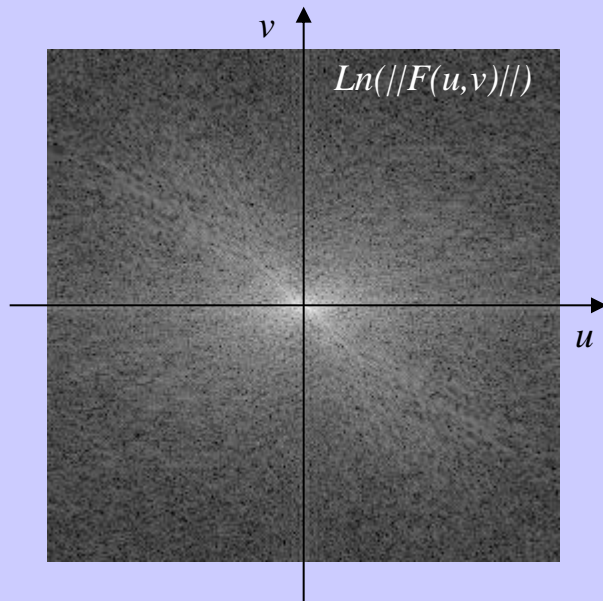
L'analyse granulométrique

→ Etude quantitative des images par la mesure de la contribution de chaque composante à l'image globale :

Traitement linéaire :

Transformée de Fourier

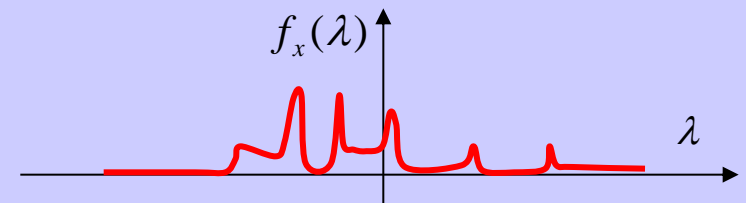
Composantes = sinusoides complexes



Morphologie mathématique :

Analyse granulométrique

Composantes = famille de boules



Historiquement : une des premières application de la morphologie mathématique était l'étude quantitative des sols poreux par analyse granulométrique de coupes microscopiques.

Construction des filtres alternés

L'ensemble des filtres sur un treillis complet E forme un treillis \mathfrak{F}

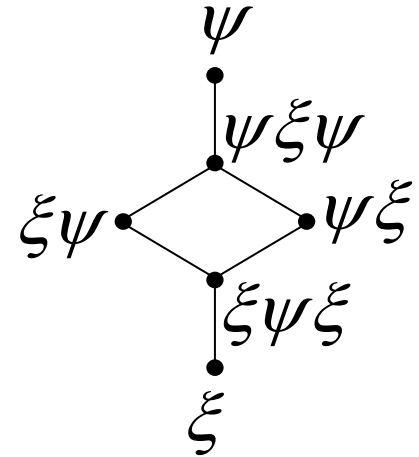
Théorème

Soient $\xi, \psi \in \mathfrak{F}$ tels que $\xi \leq \psi$

- L'ensemble ci-contre est un sous-treillis de \mathfrak{F} :
- De plus, on a l'équivalence :

$$\psi\xi \leq \xi\psi \Leftrightarrow \psi\xi\psi = \xi\psi \Leftrightarrow \xi\psi\xi = \psi\xi$$

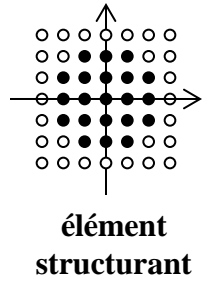
Matheron 1988



- dem : (1) filtres (idempotence) : $\xi\psi = \xi\xi\xi\psi \leq \xi\psi\xi\psi \leq \xi\psi\psi\psi = \xi\psi$
 $\xi\psi\xi = \xi\xi\xi\xi\psi\xi \leq \xi\psi\xi\xi\psi\xi \leq \xi\psi\psi\psi\psi\xi = \xi\psi\xi$
- (2) ordres : $\xi = \xi\xi\xi \leq \xi\psi\xi \leq \begin{matrix} \psi\psi\xi = \psi\xi = \psi\xi\xi \\ \xi\psi\psi = \xi\psi = \xi\xi\psi \end{matrix} \leq \psi\xi\psi \leq \psi\psi\psi = \psi$
- (3) plus petit majorant :
 soit ζ un filtre tel que $\zeta \geq \xi\psi$ et $\zeta \geq \psi\xi$ alors $\zeta = \zeta\zeta \geq \psi\xi\xi\psi = \psi\xi\psi$
- (4) équivalence : $\xi\psi = \psi\xi\psi \Rightarrow \xi\psi \geq \psi\xi\xi = \psi\xi$
 et $\psi\xi \leq \xi\psi \Rightarrow \psi\xi\psi \leq \xi\psi\psi = \xi\psi = \xi\xi\psi \leq \psi\xi\psi$

Exemple de filtres alternés

On prend : $\xi = \gamma$ (ouverture morphologique) $\psi = \varphi$ (fermeture morphologique)



Filtres alternés séquentiels

Soit $(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ une granulométrie, et $(\gamma_\lambda^* = \varphi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$

l'anti-granulométrie associée

Alors les opérateurs suivants :

$$\Theta_\lambda = \varphi_\lambda \gamma_\lambda \cdots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$$

$$\Xi_\lambda = \gamma_\lambda \varphi_\lambda \cdots \gamma_2 \varphi_2 \gamma_1 \varphi_1$$

sont des filtres, dits *filtres alternés séquentiels* associés à la granulométrie $(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0}$

Propriétés d'absorption :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \begin{cases} \Theta_{\lambda'} \Theta_\lambda = \Theta_{\lambda'} & \text{mais} & \Theta_\lambda \Theta_{\lambda'} \leq \Theta_{\lambda'} \\ \Xi_{\lambda'} \Xi_\lambda = \Xi_{\lambda'} & \text{mais} & \Xi_\lambda \Xi_{\lambda'} \leq \Xi_{\lambda'} \end{cases}$$

Filtres alternés séquentiels : démonstration des propriétés

Filtre morphologique (idempotence) :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \gamma_{\lambda'} \leq \gamma_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda'} \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \geq \gamma_{\lambda} \gamma_{\lambda} = \gamma_{\lambda} \geq \gamma_{\lambda'} \Rightarrow \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \geq \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \gamma_{\lambda} = \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'}$$

et $(*) \Rightarrow \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda} \varphi_{\lambda} = \varphi_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda'} \Rightarrow \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'} \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'}$

donc $\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda}$

d'où $\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 \geq \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 = \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$

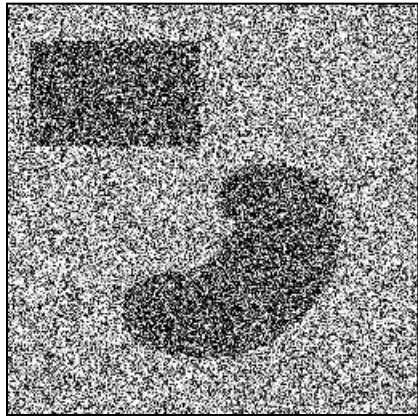
et $\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 \leq \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 = \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$

Propriétés d'absorption :

$$\begin{aligned} \Theta_{\lambda'} \Theta_{\lambda} &= (\varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \dots \varphi_{\lambda+1} \gamma_{\lambda+1}) (\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) (\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) \\ &= (\varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \dots \varphi_{\lambda+1} \gamma_{\lambda+1}) (\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) = \Theta_{\lambda'} \end{aligned}$$

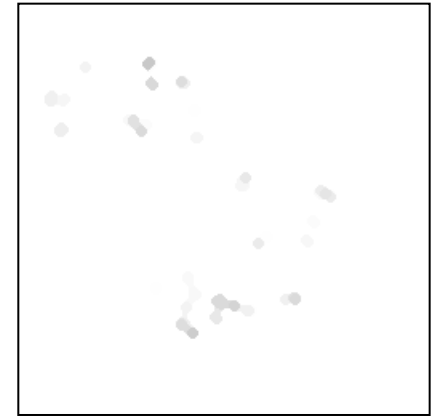
$$\begin{aligned} \Theta_{\lambda} \Theta_{\lambda'} &= (\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) (\varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \dots \varphi_{\lambda+1} \gamma_{\lambda+1}) (\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) \\ &\leq \Theta_{\lambda'} \end{aligned}$$

Application à la réduction du bruit

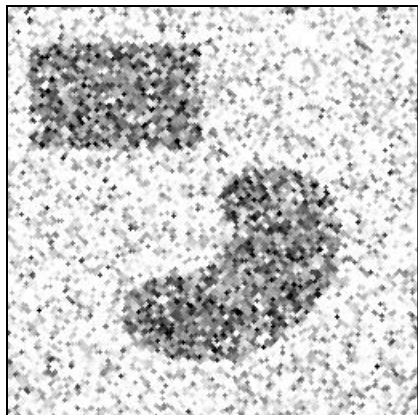


Original

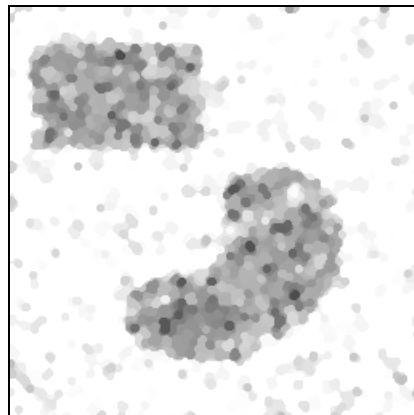
Les filtres alternés séquentiels conduisent à une bonne réduction du bruit grâce à une élimination progressive des pics et des creux de faible surface.



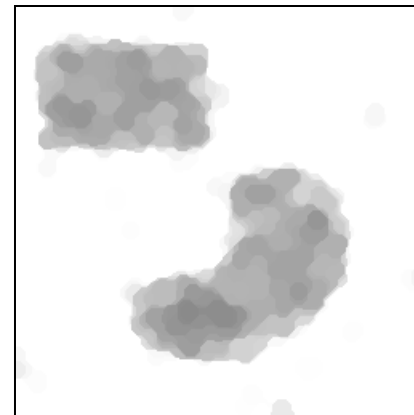
Application directe
du filtre alterné $\gamma_4 \phi_4$



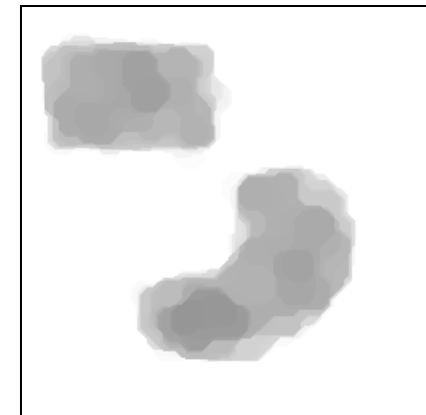
E_1



E_2

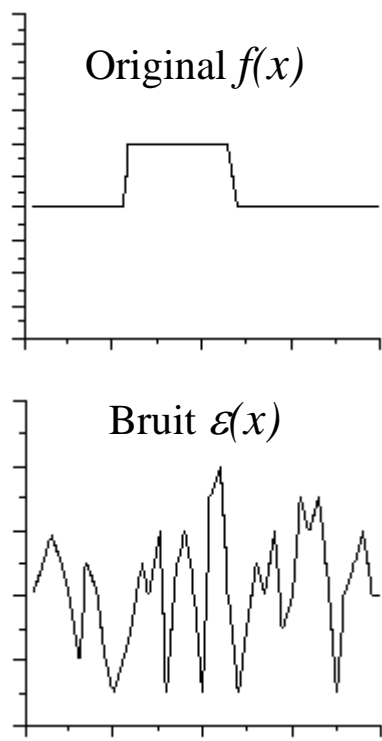


E_5

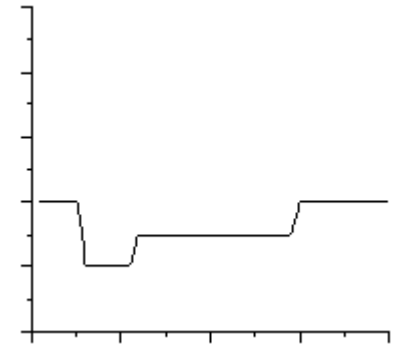
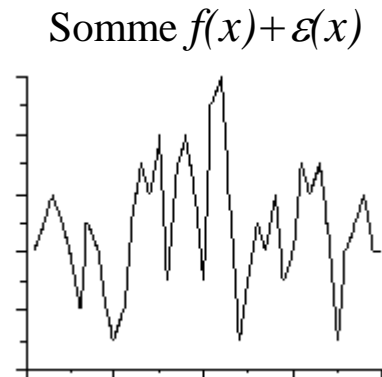


E_8

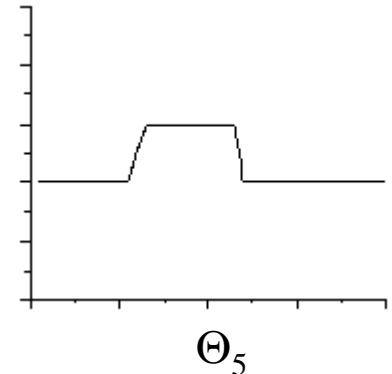
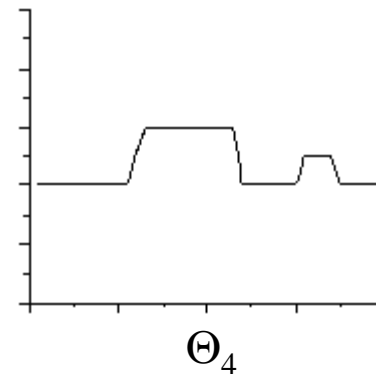
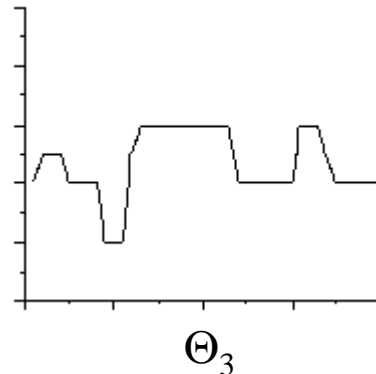
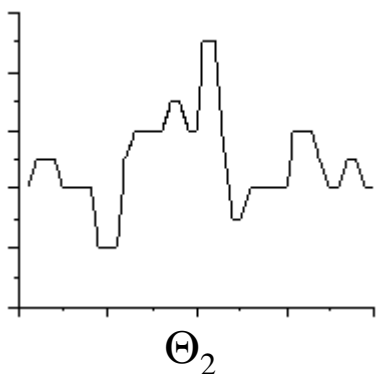
Application à la réduction du bruit



...en 1d :

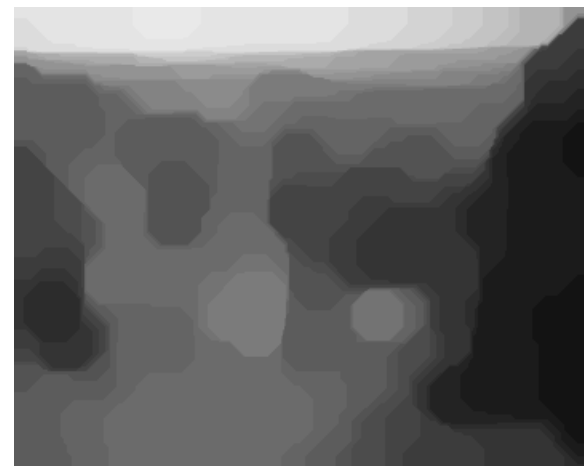
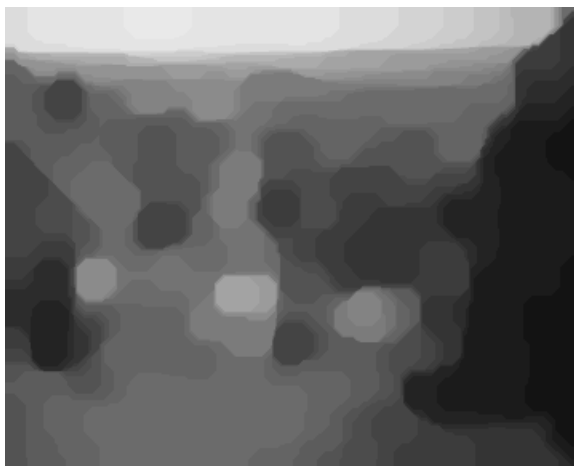
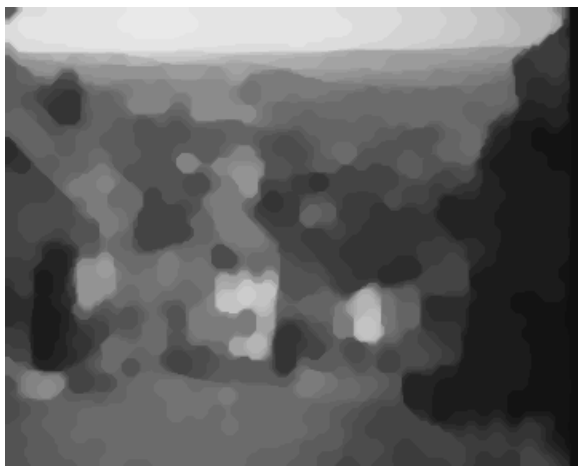


Application directe
du filtre alterné $\phi_5 \gamma_5$



Espace d'échelle morphologique

Une granulométrie induit un *espace d'échelle* (scale-space), qui fournit une représentation des images à différents niveaux de détail.



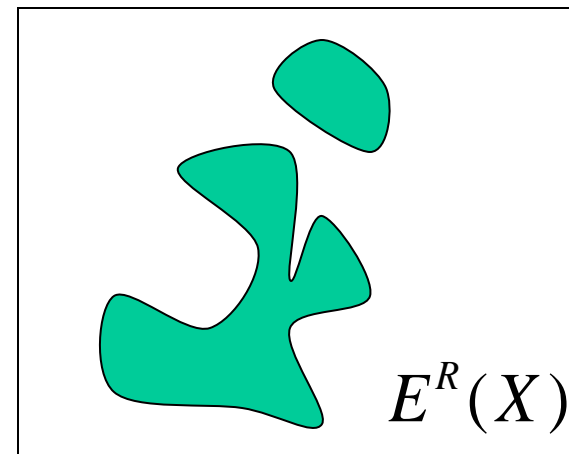
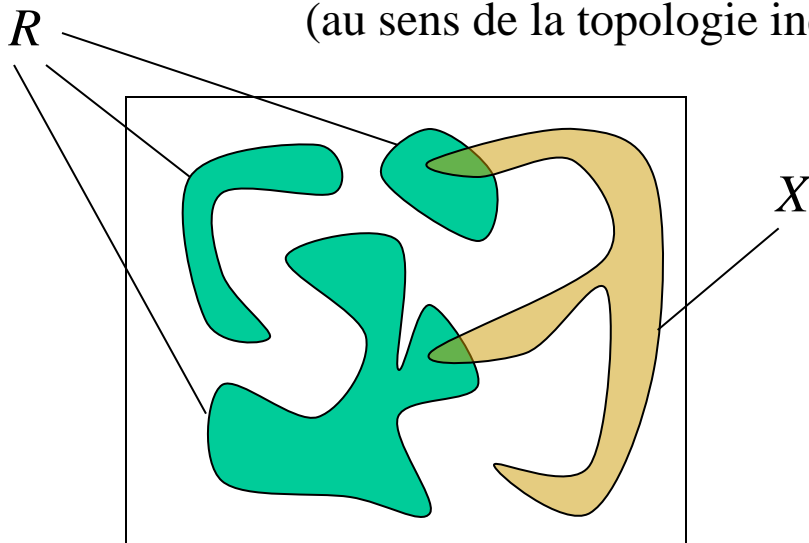
Retour à la reconstruction géodésique

posons
$$\begin{cases} (\delta_{B_1}^R)^0(X) = X \\ (\delta_{B_1}^R)^n(X) = \delta_{B_1}^R\left((\delta_{B_1}^R)^{n-1}(X)\right) \text{ pour } n > 0 \end{cases}$$

La reconstruction géodésique de X dans R est définie par :

$$E_{B_1}^R(X) = \sup_{n \geq 0} \left\{ (\delta_{B_1}^R)^n(X) \right\}$$

Dans le cadre ensembliste, c'est l'ensemble des composantes connexes (au sens de la topologie induite par B_1) de R qui intersectent X :



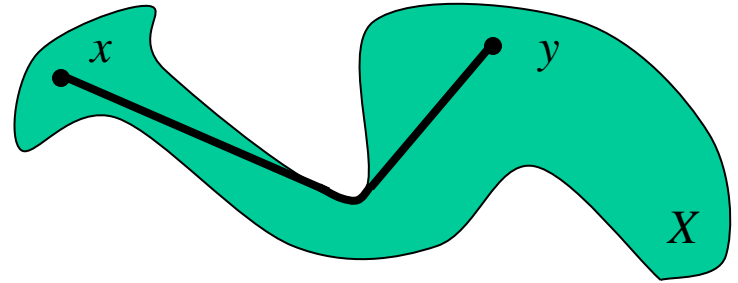
Mesures géodésiques

$$(x, y) \in X^2$$

La **distance géodésique**
entre x et y dans X :

$$d_X(x, y) = \min \left\{ n \geq 0; x \in (\delta_{B_1}^X)^n(\{y\}) \right\}$$

C'est la longueur du (ou des) plus court(s) chemin(s) **dans** X entre x et y .

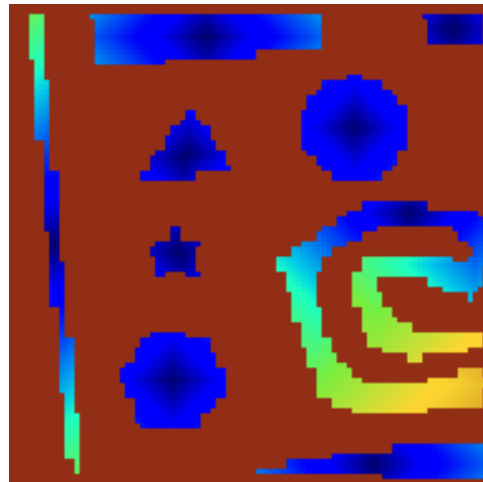


Soit X une
composante
connexe.

La **fonction de
propagation** de X :

$$\Pi_X: X \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto \max_{y \in X} d_X(x, y)$$



Soit X une composante
connexe.

Le **diamètre géodésique** de X :

$$\begin{aligned} \Delta_X &= \max_{x \in X} \Pi_X(x) \\ &= \max_{(x,y) \in X^2} d_X(x, y) \end{aligned}$$

Etiquetage des composantes connexes

La première application de la reconstruction géodésique est l'analyse individuelle de particules, qui consiste à extraire les composantes connexes l'une après l'autre par reconstruction du premier pixel rencontré lors d'un balayage video :



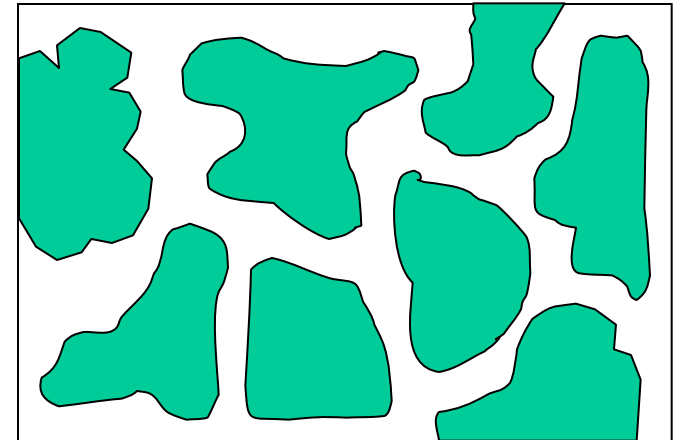
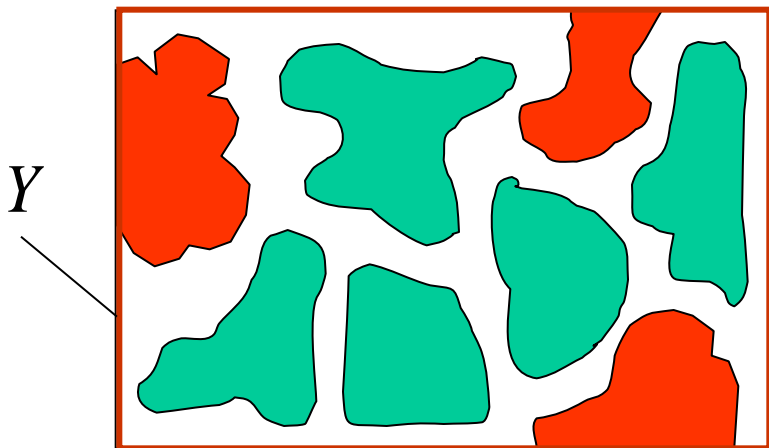
Image binaire



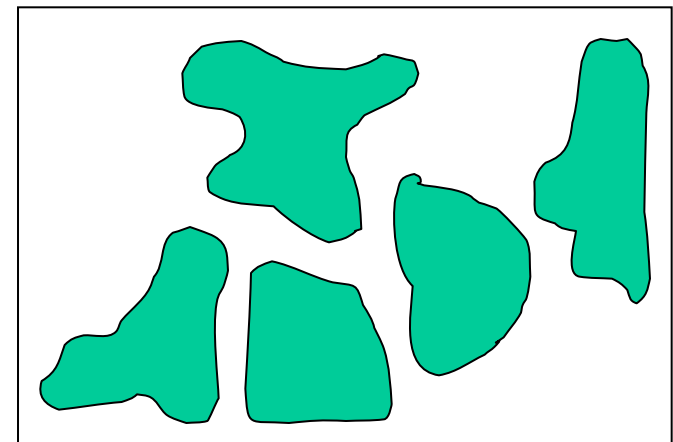
Etiquetage des composantes connexes

Suppression des objets touchant le bord de l'image

La suppression des objets touchant le bord de l'image binaire X s'obtient par différence avec la reconstruction du bord dans X :



X

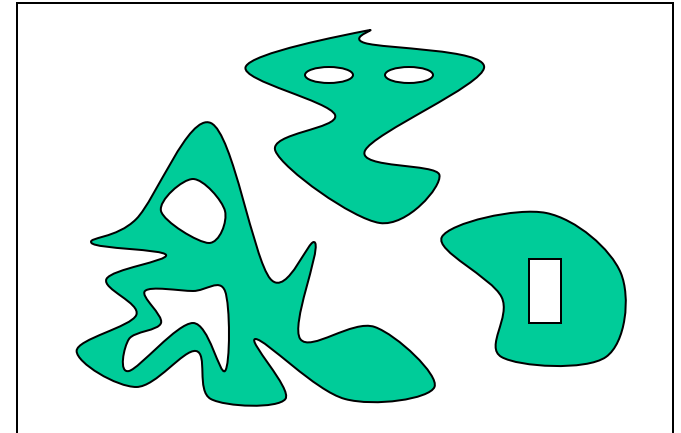
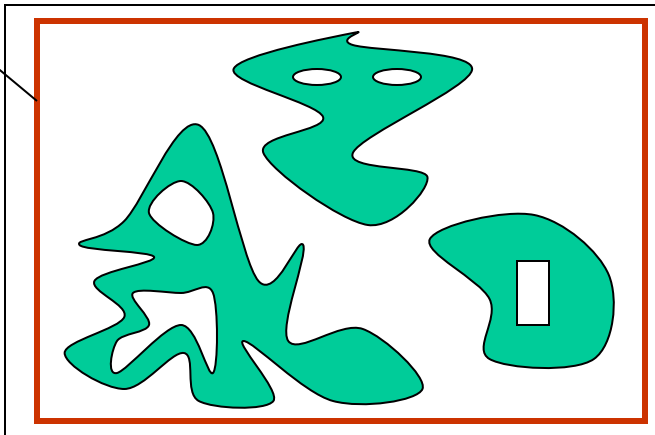


$X \setminus E^X(Y)$

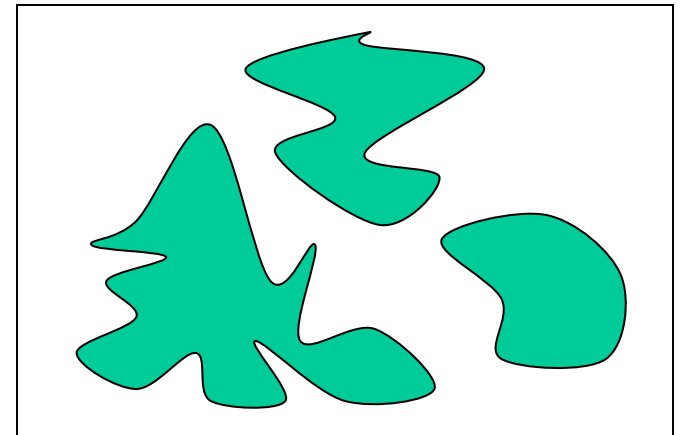
Bouchage de trous

Le bouchage de trous dans l'image binaire (bidimensionnelle !) X s'obtient par complément de la reconstruction dans X^c d'un ensemble qui n'intersecte pas X :

Y



X



$(E^{X^c}(Y))^c$

Seuillage par hystérésis



I



I_h



I_b



$E^{I_b}(I_h)$

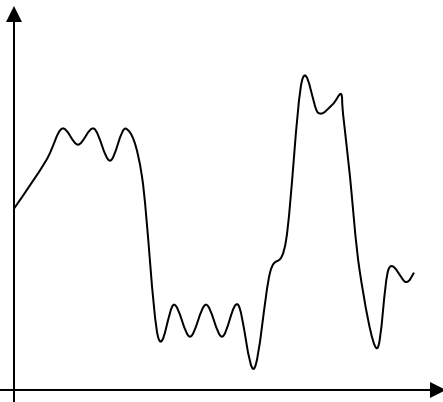
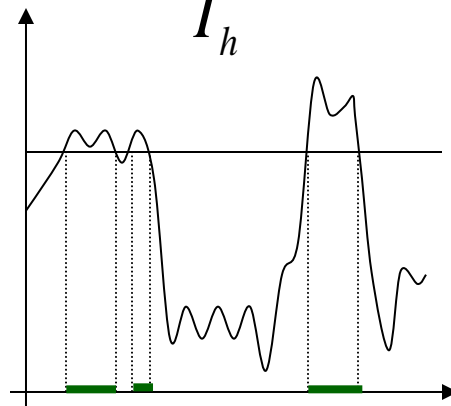
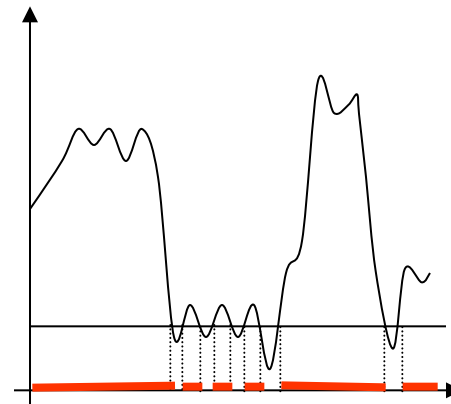


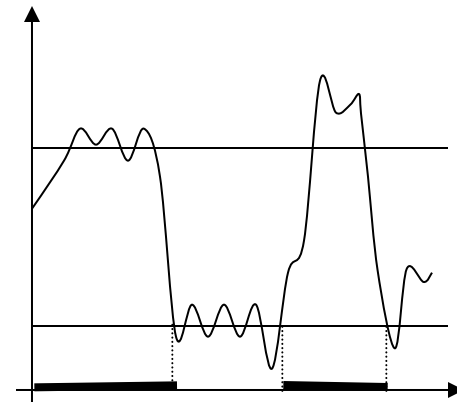
Image en niveaux de gris



Seuil haut



Seuil bas



Seuil par hystérésis

Connexions généralisées

En faisant varier la taille des éléments structurants utilisés dans les reconstructions, on obtient une hiérarchie de voisinages, et donc une topologie à divers degrés de détails :

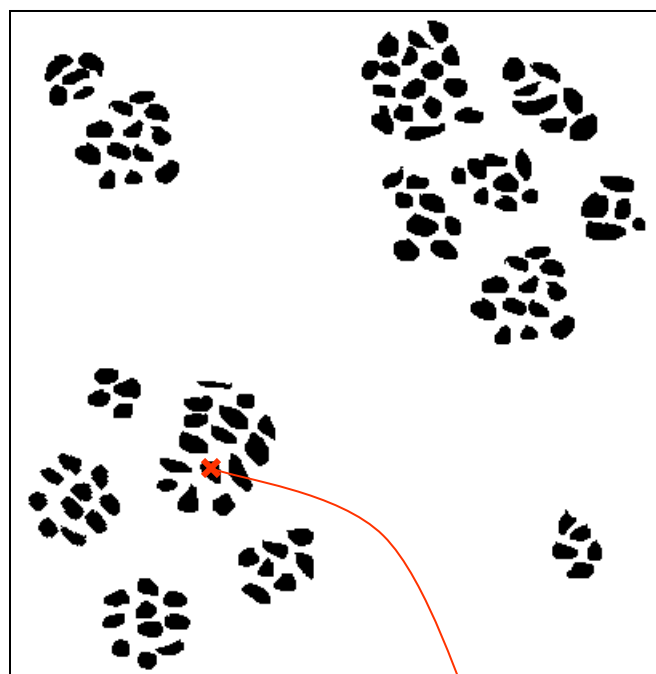


Image X

Marqueur Y

$$E_{B_1}^X(Y)$$

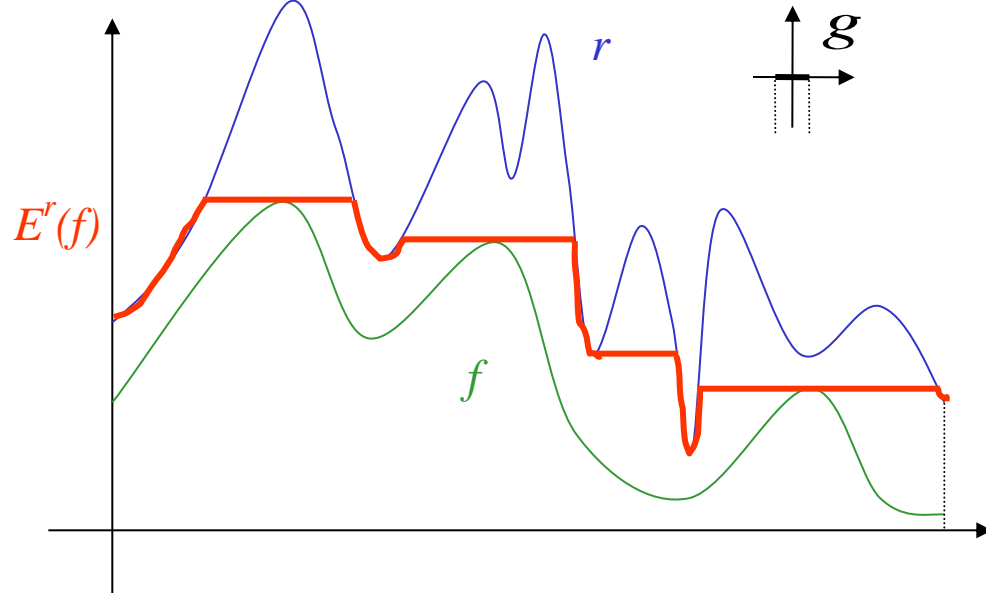
$$E_{B_5}^X(Y)$$

$$E_{B_{20}}^X(Y)$$

Reconstruction fonctionnelle

La dilatation géodésique de f dans r :

$$\delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r$$



La reconstruction géodésique de f dans r :

$$E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_g^r)^n(f) \}$$

Extrema régionaux

La notion d'extremum régional joue un rôle important pour les image numériques, en particulier dans le calcul des opérateurs géodésiques. Il s'agit de « plateaux », au bord desquels on ne peut que descendre (pour les maxima régionaux), ou monter (pour les minima régionaux) strictement.

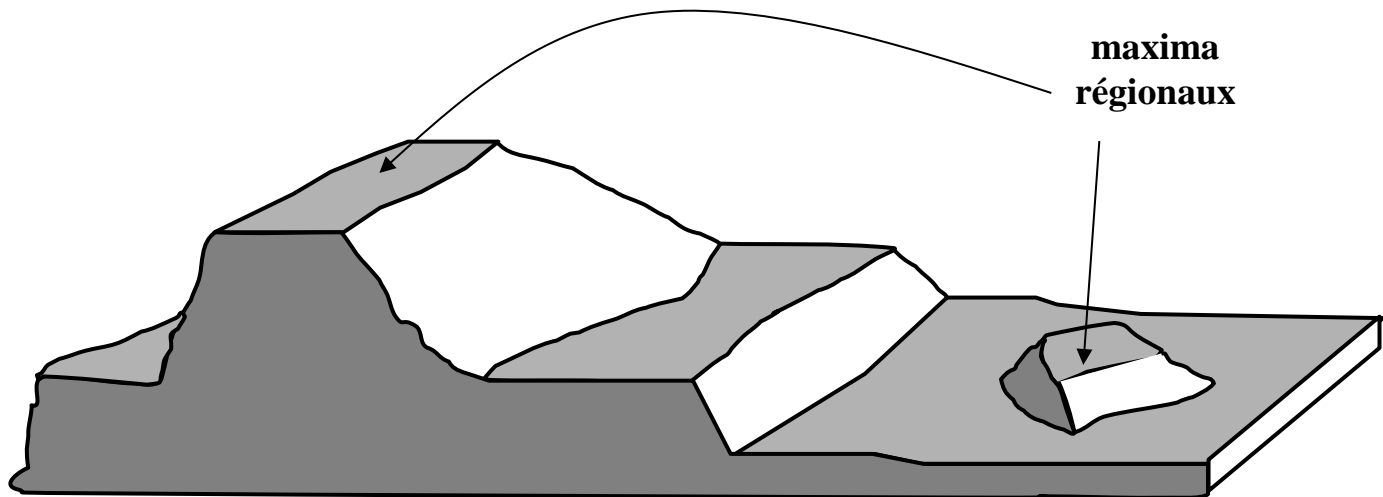
Soit f une fonction numérique.

$$f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{N}$$

$$SG_i(f) = \{x \in \mathbf{R}^n / f(x) \geq i\}$$

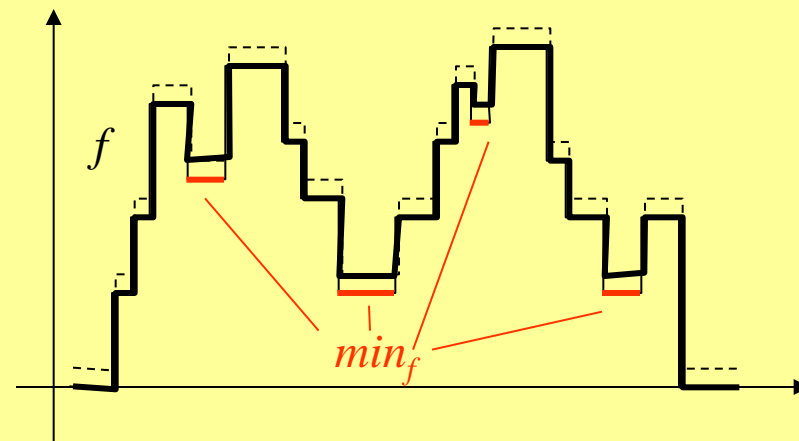
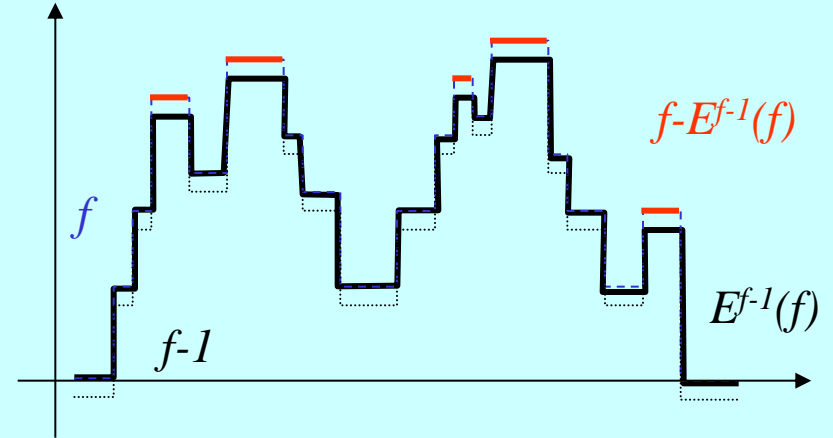
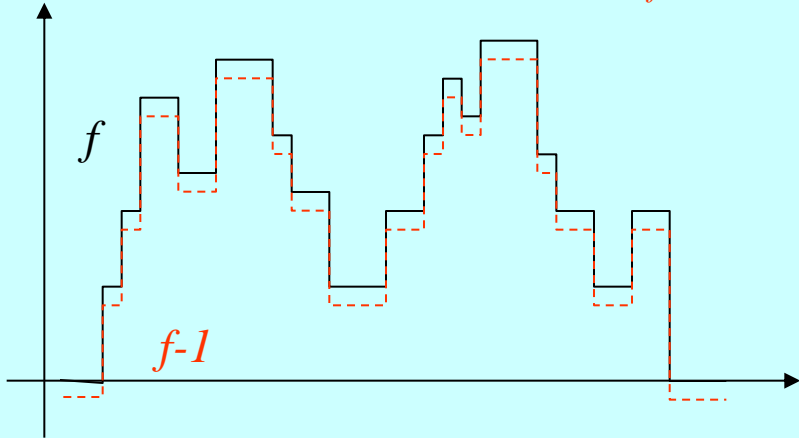
$$\max_f = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{SG_i(f) \setminus (E^{SG_i(f)}(SG_{i+1}(f)))\}$$

Un point x appartient à un maximum régional du graphe de f lorsqu'on ne peut pas atteindre un point y tel que $f(y) > f(x)$ sans redescendre strictement :

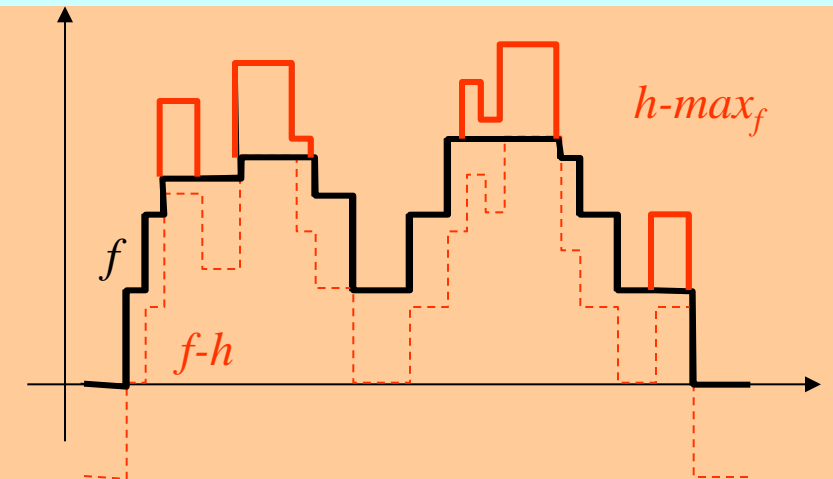


Calcul des maxima régionaux

Les maxima régionaux d'une fonction numérique f peuvent se calculer à partir de la reconstruction de $f-1$ sous f : $\max_f = f - E^{f-1}(f)$



Minima régionaux : par dualité



Généralisation : h-extrema régionaux

Erodés ultimes

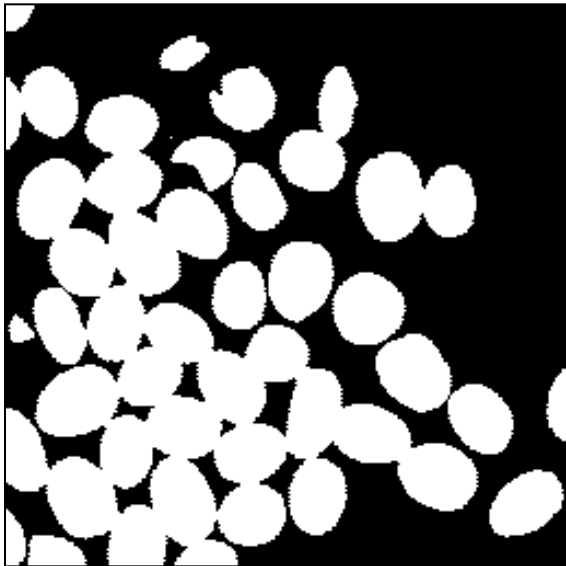
Les maxima régionaux de la transformée en distance correspondent aux composantes connexes qui disparaissent lors d'érosions successives.

$$\begin{aligned} SG_i(F_X^d) &= \{x \in \mathbf{R}^n / F_X^d(x) \geq i\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}^n / d(x, X^c) \geq i\} \\ &= \varepsilon_{B_i}(X) \end{aligned}$$

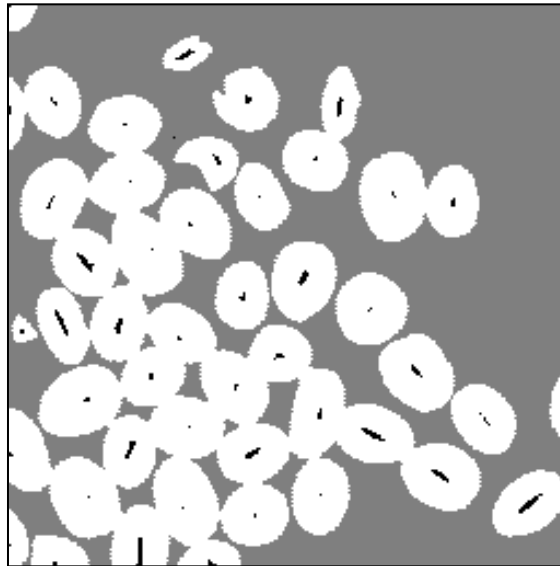
F_X^d la transformée en distance d de l'ensemble X .

$$\max_{F_X^d} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{SG_i(F_X^d) \setminus (E^{SG_i(F_X^d)}(SG_{i+1}(F_X^d)))\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\varepsilon_{B_i}(X) \setminus (E^{\varepsilon_{B_i}(X)}(\varepsilon_{B_{i+1}}(X)))\}$$

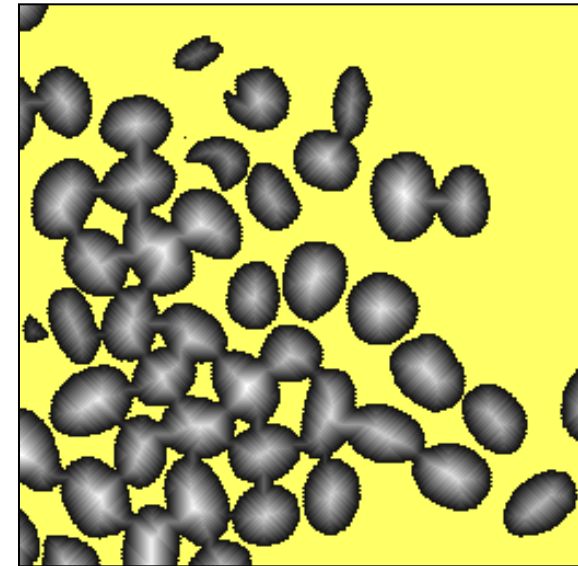
Application : singularisation de particules se recouvrant partiellement :



original



érodés ultimes (en noir)



transformée en distance

Ouvertures et fermetures par reconstruction

La reconstruction géodésique est un filtre morphologique :

$$x \leq y \Rightarrow E^r(x) \leq E^r(y) \qquad E^r(E^r(x)) = E^r(x)$$

Si ξ (resp. ψ) est un opérateur anti-extensif (resp. extensif)

alors l'opérateur : $E^x(\xi(x))$ (resp. $(E^{x^c}((\psi(x))^c))^c$)

est une ouverture (resp. fermeture) algébrique.

Cas particulier important : $\xi = \gamma$ (ouverture) et $\psi = \phi$ (fermeture) :

ouverture par reconstruction :

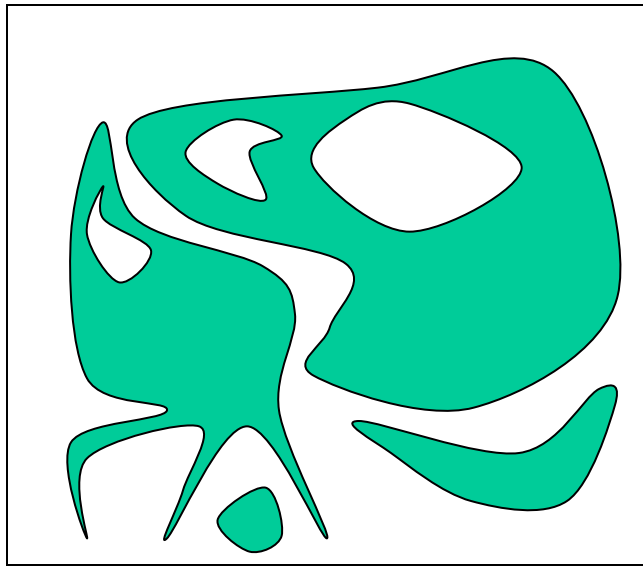
$$E^x(\gamma(x))$$

fermeture par reconstruction :

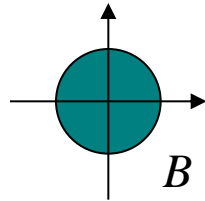
$$(E^{x^c}((\phi(x))^c))^c$$

Ouvertures et fermetures par reconstruction

L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :

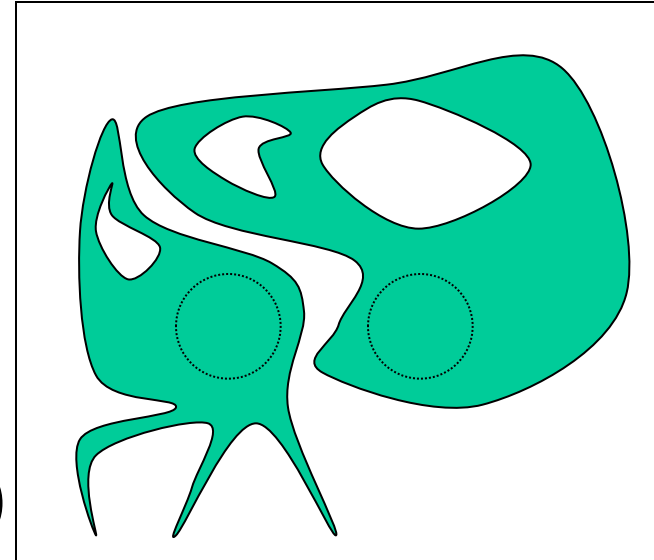


X



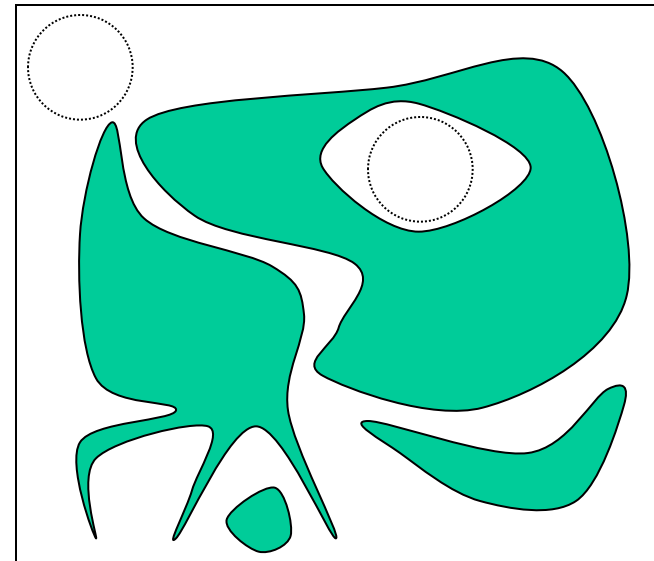
ouverture par reconstruction

$$E^X(\gamma_B(X))$$



fermeture par reconstruction

$$\left(E^{X^c} \left(\left(\varphi_B(X) \right)^c \right) \right)^c$$

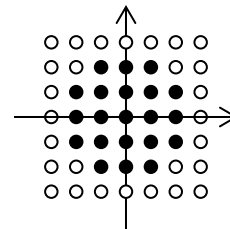


La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

Ouvertures et fermetures par reconstruction

Par extension, les ouvertures et fermetures par reconstruction éliminent les petites structures en préservant les contours des images numériques :

élément structurant
de l'ouverture
morphologique :



original



ouverture par reconstruction



fermeture par reconstruction

Nivellements – Définitions

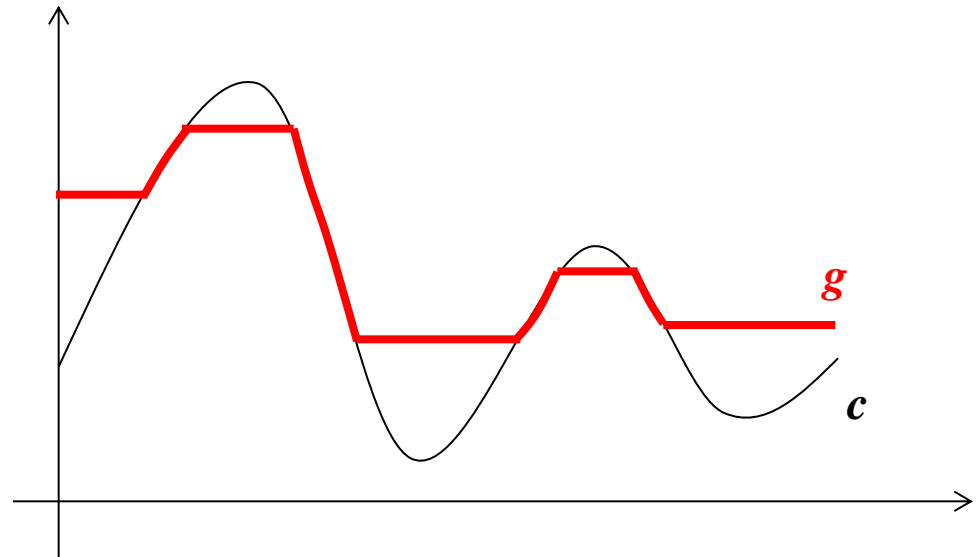
Soit (V, E) un graphe avec $E \subset \wp_2(V)$.

$c : V \rightarrow \mathbb{N}$

$g : V \rightarrow \mathbb{N}$

g est un **nivellement** de c pour $(V, E) \Leftrightarrow \forall \{u, v\} \in E, g(u) < g(v) \Rightarrow \begin{cases} g(u) \geq c(u) \\ \text{et} \\ g(v) \leq c(v) \end{cases}$

Remarque : Il y a de nombreuses exemples de nivellement d'images : seuillage, saturation, clamping,...

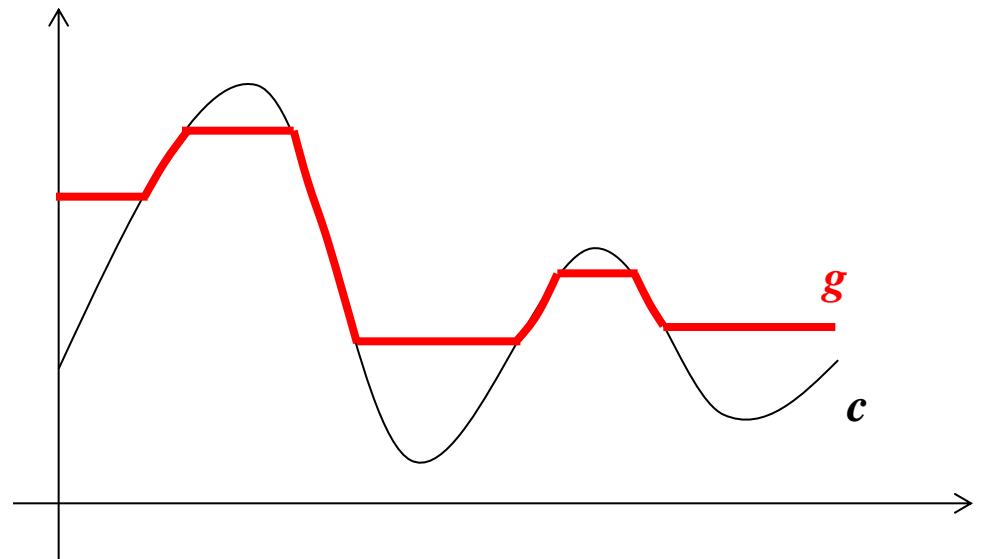


[Meyer 98]

Nivellements – Définitions

(Conséquences)

1. $g \leq c$ est un *nivellement inférieur* de $c \Leftrightarrow \forall \{u, v\} \in E, g(u) < g(v) \Rightarrow g(u) = c(u)$
2. $g \geq c$ est un *nivellement supérieur* de $c \Leftrightarrow \forall \{u, v\} \in E, g(u) < g(v) \Rightarrow g(v) = c(v)$



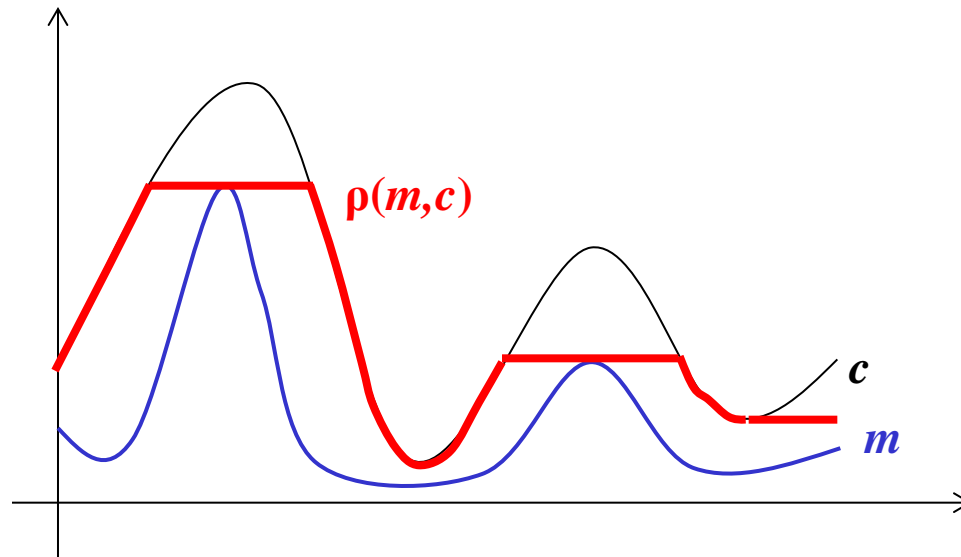
Nivellements et reconstructions

Propriété :

$$m : V \rightarrow \mathbb{N}$$

$$c : V \rightarrow \mathbb{N}, m \leq c$$

La **reconstruction** de m dans c est le plus petit nivellement (inférieur) ρ de c tel que :
 $m \leq \rho \leq c$



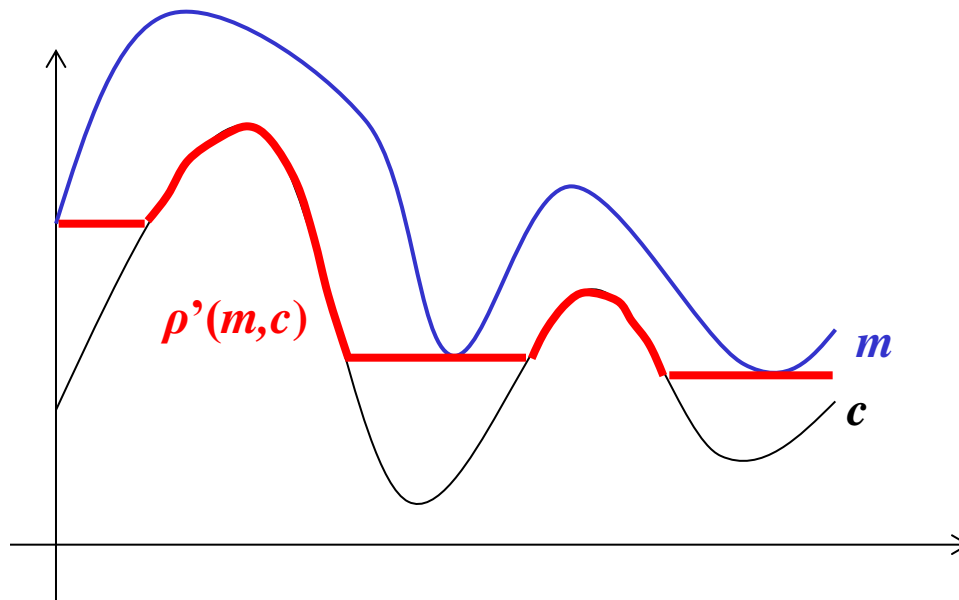
Nivellements et reconstructions

Définition :

Si $m \leq c$, on peut de même définir la **reconstruction duale** de m dans c comme *le plus grand nivellement* (supérieur) ρ' de c tel que : $c \leq \rho' \leq m$

Propriété (dualité): Si g est à valeur dans $[0, M]$, soit $\tilde{g} = M - g$ (involution de g).

Si m et c sont à valeur dans $[0, M]$, alors $\rho'(m, c) = \rho(\widetilde{m}, \widetilde{c})$



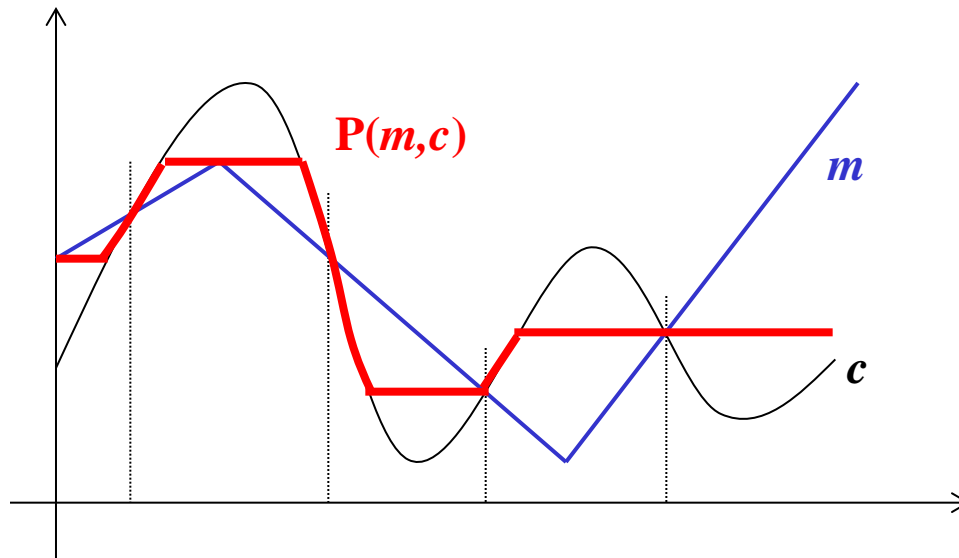
Nivellements et reconstructions

Définition : $m : V \rightarrow \mathbb{N}, c : V \rightarrow \mathbb{N}$

La *reconstruction mixte* de m dans c est définie par :

$$P(m, c) = \rho(m_{\leq}, c_{\leq}) \vee \rho'(m_{\geq}, c_{\geq})$$

avec $m_{\leq} = m \cdot 1_{\{m \leq c\}}, c_{\leq} = c \cdot 1_{\{m \leq c\}}, m_{\geq} = m \cdot 1_{\{m \geq c\}}, c_{\geq} = c \cdot 1_{\{m \geq c\}}$

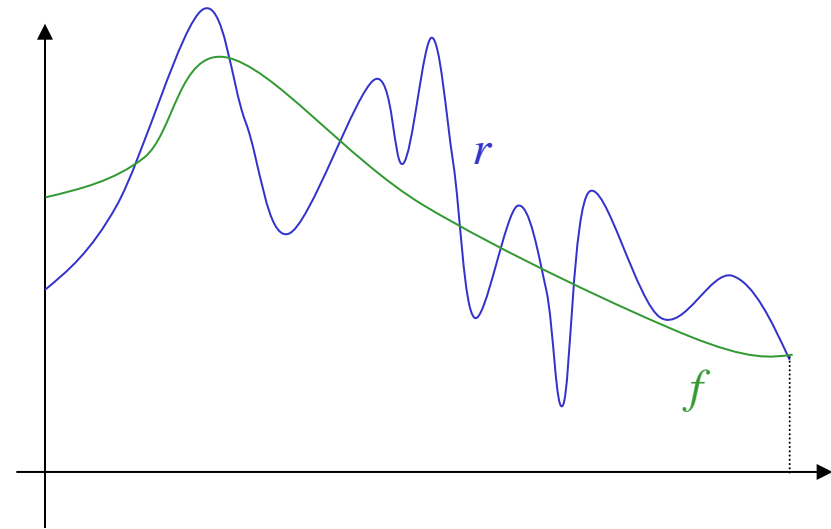


Nivellements : reconstruction mixte

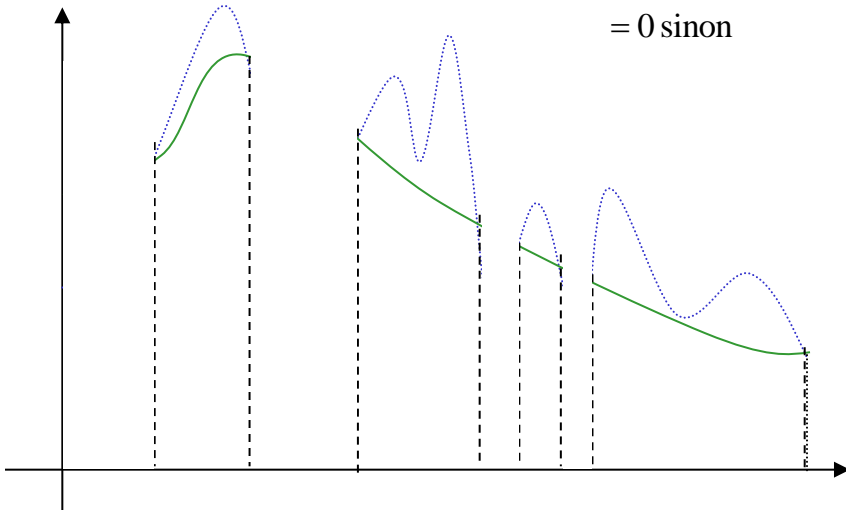
Cas où la fonction marqueur f et la fonction de référence r ne sont pas ordonnées

On décompose f en deux fonctions :

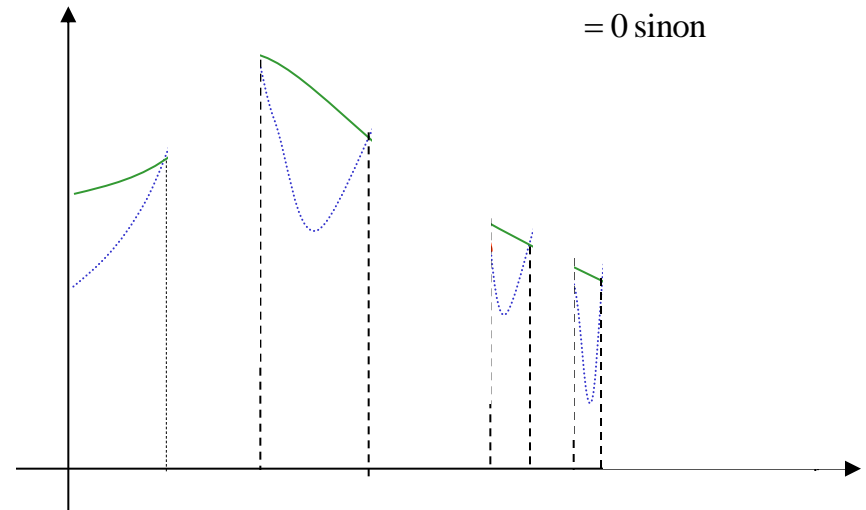
$$\begin{aligned} f &= f_- + f_+ \\ &= f_- \vee f_+ \end{aligned}$$



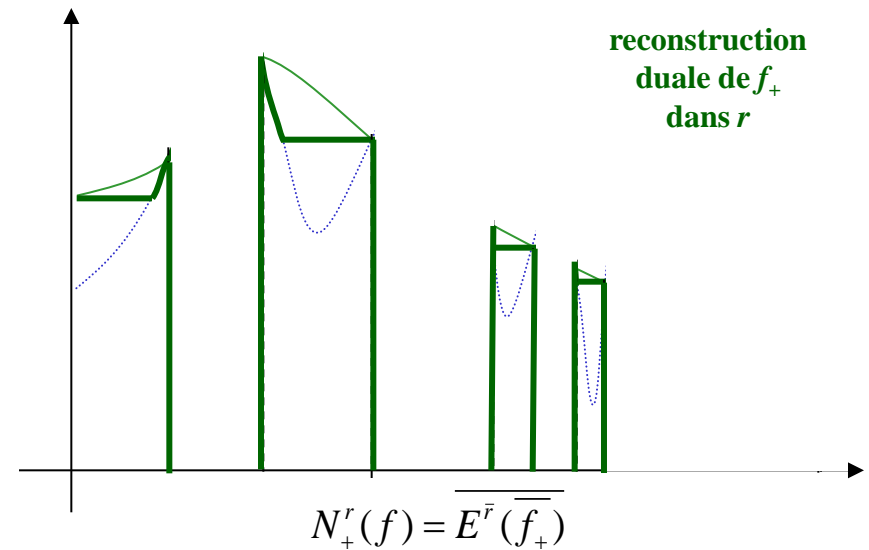
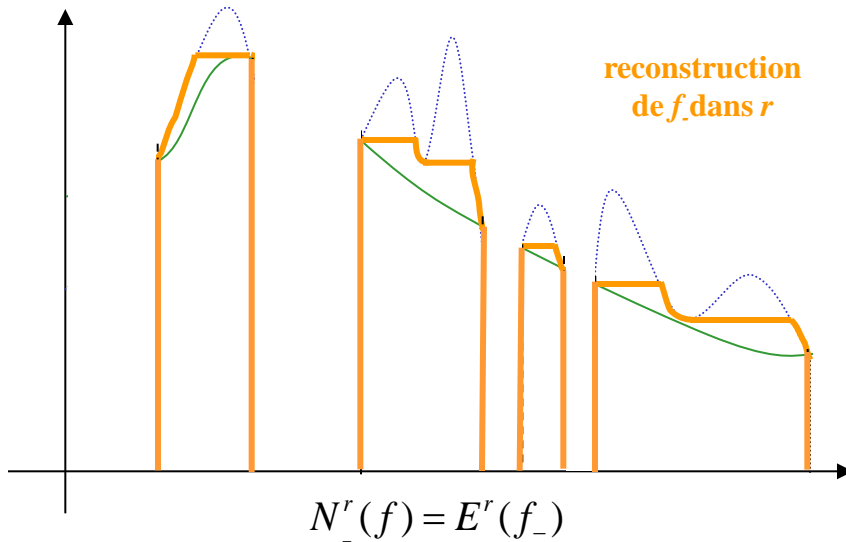
$$\begin{aligned} f_-(x) &= f(x) \text{ si } f(x) \leq r(x) \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$



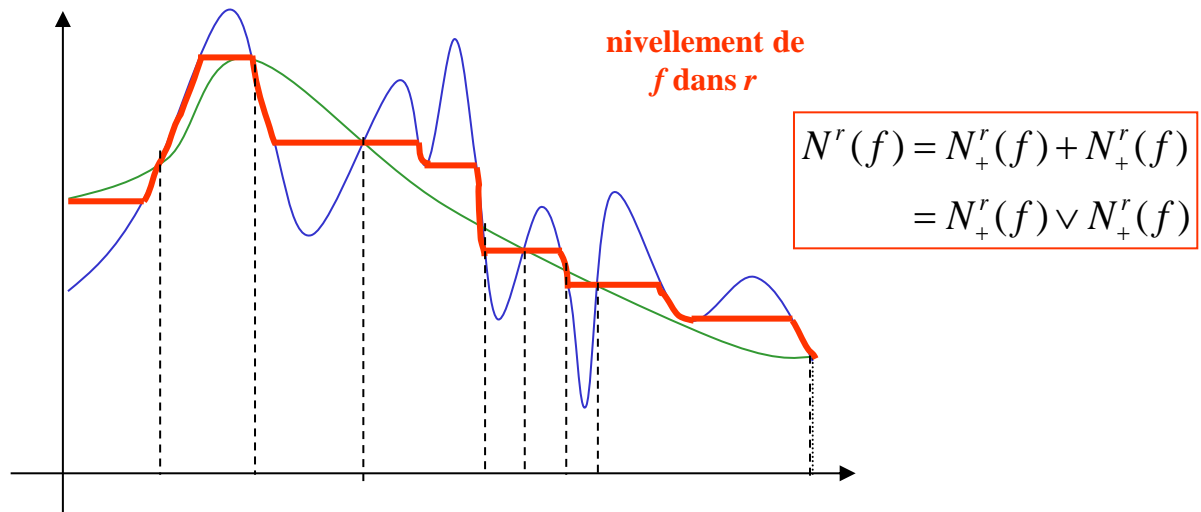
$$\begin{aligned} f_+(x) &= f(x) \text{ si } f(x) > r(x) \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$



Nivellements : reconstruction mixte



Les *nivellements* définissent des *opérateurs connexes*, qui simplifient l'image par *sélection* des ensembles de niveaux ou de leurs complémentaires :



Exemples de reconstructions mixtes



original



filtre gaussien



nivellement



filtre médian



nivellement

Nouvel espace d'échelles morphologique

Une granulométrie induit un espace d'échelle via les *filtres alternés séquentiels par reconstruction* (i.e. nivellement des filtres alternés séquentiels) :



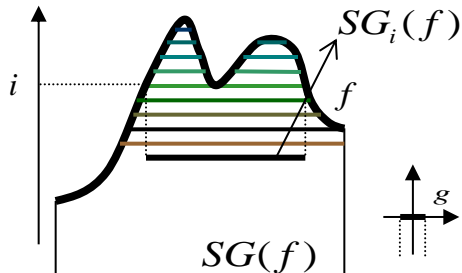
Opérations sur les ensembles de niveau

Par définition, la dilatation (resp. l'érosion) fonctionnelle par un élément structurant plan g peut être calculée à partir des dilatations (resp. érosions) des sections du sous-graphe (ensembles de niveau) par le support de g .



$$f \leftrightarrow SG(f)$$

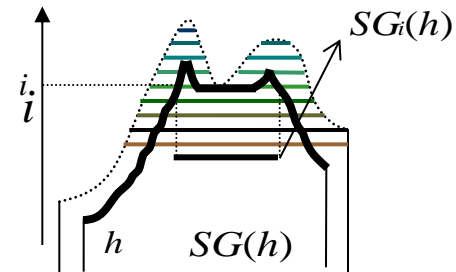
$$SG(f) = \bigcup_{i \in \mathbb{R}} SG_i(f) \times \{i\}$$



$$SG_i(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \geq i\}$$

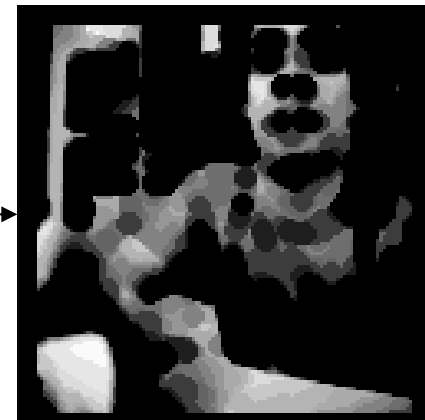


$$SG_i(h) = \varepsilon_{\text{supp}(g)}(SG_i(f))$$



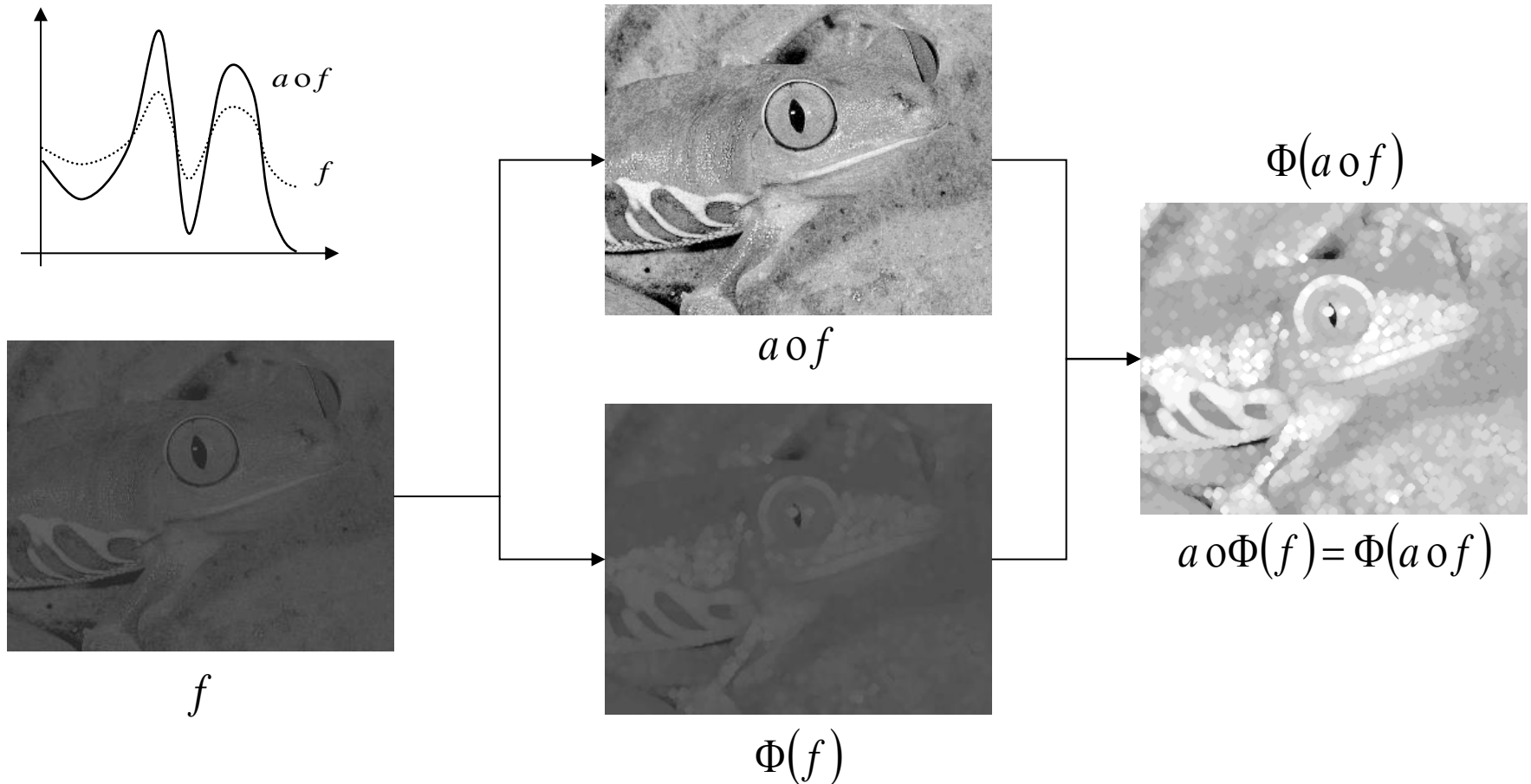
$$SG(h) = \bigcup_{i \in \mathbb{R}} SG_i(h) \times \{i\}$$

$$SG(h) \leftrightarrow h = \varepsilon_g(f)$$



Invariance par changement de contraste

Une conséquence de la propriété précédente est *l'invariance par changement de contraste* : les opérateurs morphologiques *commutent* avec les *anamorphoses*, c'est-à-dire les transformations croissantes des niveaux de gris :



Morphologie mathématique et EDP

Une transformation invariante par contraste (i.e. une transformation morphologique) doit respecter les relations d'inclusion (= ordre) des ensembles de niveau. On montre que cela correspond à un déplacement de lignes de niveau (i.e. frontière des ensembles de niveau) dans la direction de leur courbure, et proportionnellement au module du gradient. Exprimé en termes d'équations aux dérivées partielles (EDP), cela se traduit par une équation de la forme :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\| G(\text{curv}(I), t)$$

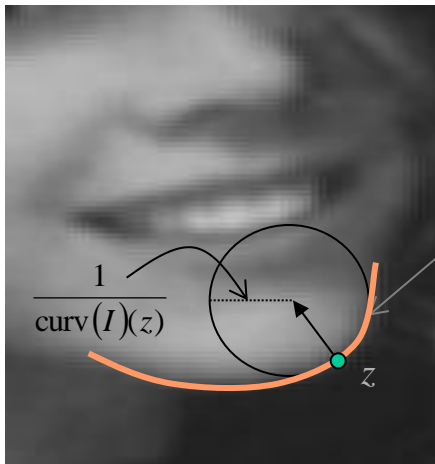
où l'on note $\begin{cases} I_x = \frac{\partial I}{\partial x} & I_{xx} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ I_y = \frac{\partial I}{\partial y} & I_{yy} = \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \\ & I_{xy} = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \end{cases}$

Avec : $\text{curv}(I) = \text{div}\left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}\right) = \frac{I_{xx}I_y^2 - 2I_{xy}I_xI_y + I_{yy}I_x^2}{(I_x^2 + I_y^2)^{3/2}}$

et avec $G(x,y)$ continue et croissante par rapport à x .

Dilatation : $G(x,y) = 1$; $\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\|$

Erosion : $G(x,y) = -1$; $\frac{\partial I}{\partial t} = -\|\nabla I\|$



La courbure de I au point z est égale à l'inverse du rayon du cercle osculateur à la courbe isophote en z , c'est-à-dire à la courbe de niveau :

$$I^{I(z)} = \{(x,y) / I(x,y) = I(z)\}$$

courbe isophote de valeur $I(z)$

L'intérêt du formalisme EDP est de fournir un cadre rigoureux aux transformations utilisant des éléments structurants infinitésimaux, mais également de généraliser les filtres (espaces d'échelles) morphologiques.

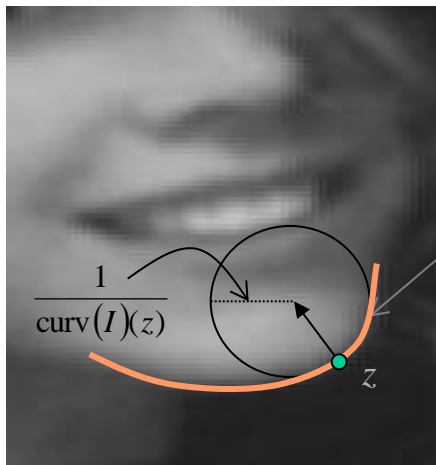
[Alvarez et al 92]

Espace d'échelle, EDP et filtrage morphologique

Le filtrage morphologique peut être exprimé dans le formalisme des Equations aux Dérivées Partielles (EDP). Ici la simplification progressive de l'image se traduit par un phénomène de diffusion. Le respect du principe d'invariance par changement de contraste implique la contrainte suivante sur la forme de l'équation :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\| G(\text{curv}(I), t)$$

avec $G(x,y)$ continue et croissante par rapport à x .



courbe isophote
de valeur $I(z)$

L'une des équations de diffusion invariante par changement de contraste la plus simple dans le formalisme EDP est la diffusion par courbure moyenne

$$(G(x,y) = x)$$



diffusion par courbure moyenne

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\| \text{curv}(I)$$

Filtres morphologiques – Conclusion

A RETENIR POUR CE COURS :

- Concepts de base : Définition d'un filtre morphologique, Principes de construction des différentes familles de filtres morphologiques.
- Ouvertures et Fermetures algébriques.
- Granulométries et analyse quantitative.
- Filtres alternés : limitation des filtres alternés duaux, filtres alternés séquentiels, applications.
- Filtres connexes et autres applications de la reconstruction géodésique.
- Liens entre morphologie et Equations aux Dérivées Partielles : Intérêt et Principe d'unification.