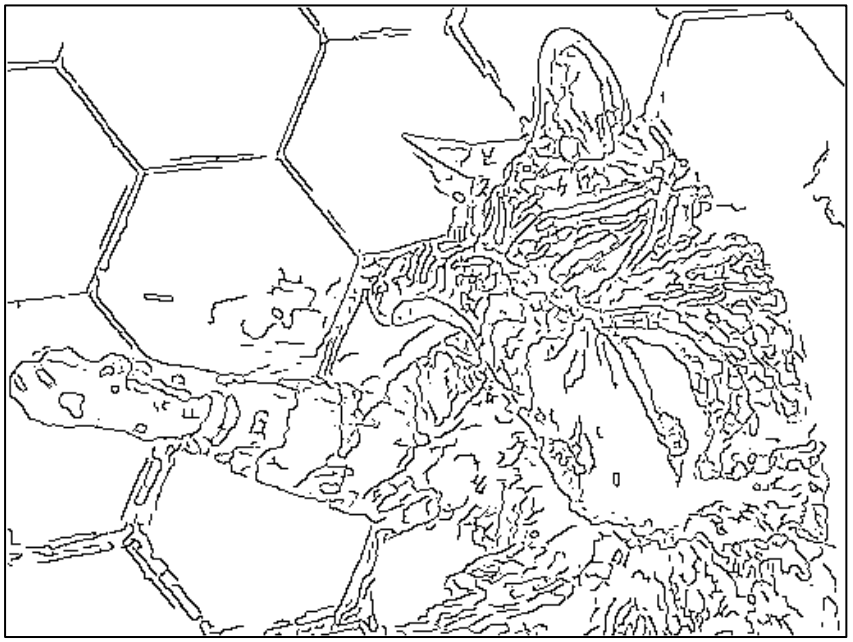
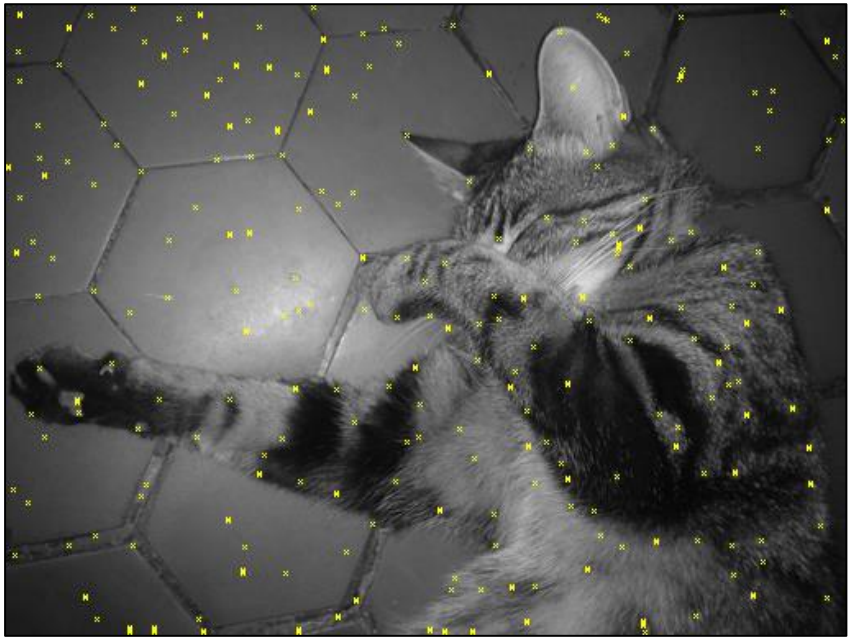
MI 204
Reconnaissance d'Images

Chapitre 2 : CARACTERISTIQUES MULTI-ECHELLES





Antoine Manzanera – ENSTA Paris / U2IS

Cours ENSTA 2e année MI 204 – Mineures Méca / SI et Info / IAC

CARACTERISTIQUES VISUELLES MULTI-ECHELLES

Les caractéristiques visuelles ont pour objectif de **représenter** les objets afin de faciliter leur **appariement** dans les images (séquences, paires, bases, modèles,…)

L'extraction de caractéristiques dans les images consiste à :

1) **Réduire le support** de la représentation dans les images à un sous-ensemble **significatif** et **parcimonieux**.
2) Calculer une **fonction décrivant** ce sous-ensemble de façon **discriminante**, **robuste** et **efficace**.

La caractérisation **locale** est en général liée à la **géométrie** locale (différentielle).

La caractérisation **globale** est en général liée à une représentation **statistique**.

Le calcul multi-échelles permet de :

1) Fournir une **base formelle** correcte au calcul différentiel.
2) Etablir un **continuum** entre le local (géométrique) et le global (statistique).

ENSTA

IP PARIS

CARACTERISTIQUES MULTI-ECHELLES

Plan du cours :

- Introduction : qu'est-ce qu'une bonne primitive visuelle ?
- Bases de géométrie différentielle pour les images
- Du local au régional : les dérivées multi-échelles
- Détection de contours multi-échelles
- Points d'intérêt 1 : détecteur de Harris
- Points d'intérêt 2 : points SIFT
- Descripteurs locaux 1 : invariants de Hilbert
- Descripteurs locaux 2 : Histogrammes d'orientation
- Appariement de caractéristiques : métriques et structures de données
- Appariement de caractéristiques : du local vers le global

ENSTA

IP PARIS

QU'EST-CE QU'UNE BONNE PRIMITIVE VISUELLE ?

Objectif : mettre en correspondance des points / ensembles / images avec d'autres points / ensembles / classes / catégories visuelles.

Les propriétés souhaitées d'une bonne primitive sont :

- **Robustesse** : L'information visuelle doit être fidèlement représentées indépendamment des modifications qu'elle peut subir d'une instance à l'autre : distorsions géométriques, changements d'illumination, occultations, variations intra-classes…
- **Discrimination** : L'objet représenté doit se distinguer facilement des autres objets, en particulier de ceux qui l'environnent.
- **Efficacité** : le calcul de la primitive doit être rapide, et les descripteurs économes en taille mémoire…

Une primitive visuelle peut caractériser l'information image à plusieurs niveaux :

- **Local** : une primitive par point / région / courbe…
- **Global** : une primitive qui concerne l'ensemble de l'information…

ENSTA

IP PARIS

BASES DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE POUR LES IMAGES

La « géométrie locale » dans une image se décrit naturellement par des concepts de la géométrie différentielle : direction, courbure,…

Dans le modèle différentiel, l'image est assimilée à une fonction $I: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et différentiable.

Le comportement local de l'image autour de chaque point peut être prédit par ses dérivées locales (Formule de Taylor) :

$$I(x_0+\varepsilon, y_0+\eta) = \sum_{k=0}^{r}\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k-i)!i!}\varepsilon^{k-i}\eta^{i}\frac{\partial^k I}{\partial x^{k-i}\partial y^{i}}(x_0,y_0) + o\left((\varepsilon^2+\eta^2)^{r/2}\right)$$

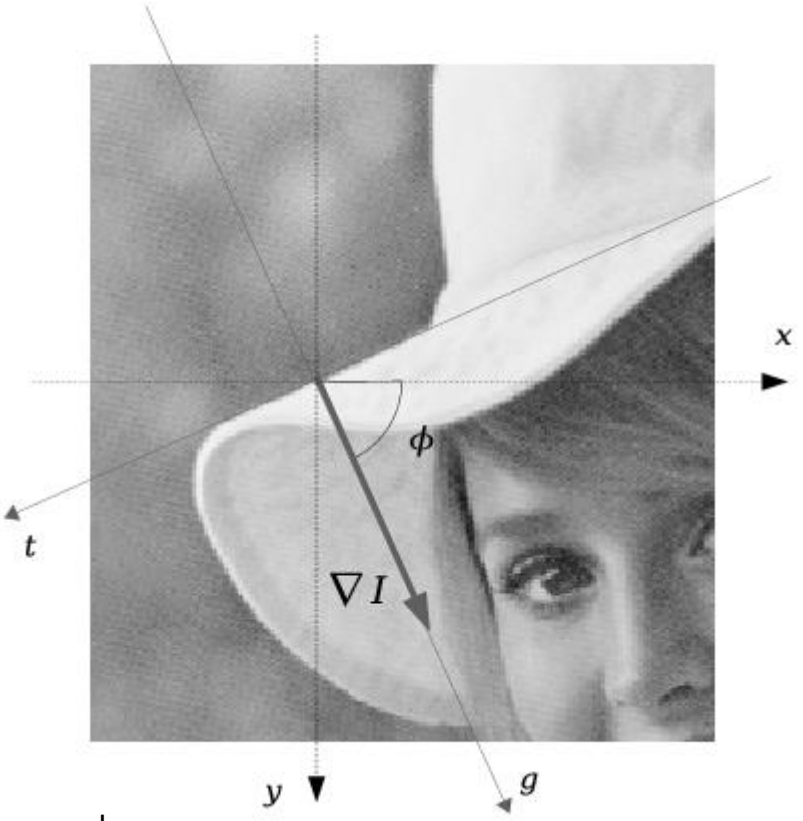
Dans les images discrètes, la notion de dérivabilité sera remplacée par la notion de régularité locale.

Cette régularité pouvant être imposée explicitement par filtrage (convolution), l'estimation de la dérivée correspondra à une convolution, et sera toujours relative à une échelle (espaces d'échelles).

ORDRE 1 : GRADIENT ET ISOPHOTE

A l'ordre 1, la grandeur de base est le vecteur gradient :

$$\nabla I = \left(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}\right)^T$$



- Son argument, $\arg \nabla I$, correspond à la direction de plus grande pente.
- Sa norme, $\|\nabla I\|$, mesure le contraste local.
- Il permet de calculer la dérivée partielle dans toute direction du plan. Soit v un vecteur unitaire :

$$\frac{\partial I}{\partial v} = \nabla I . v^T$$

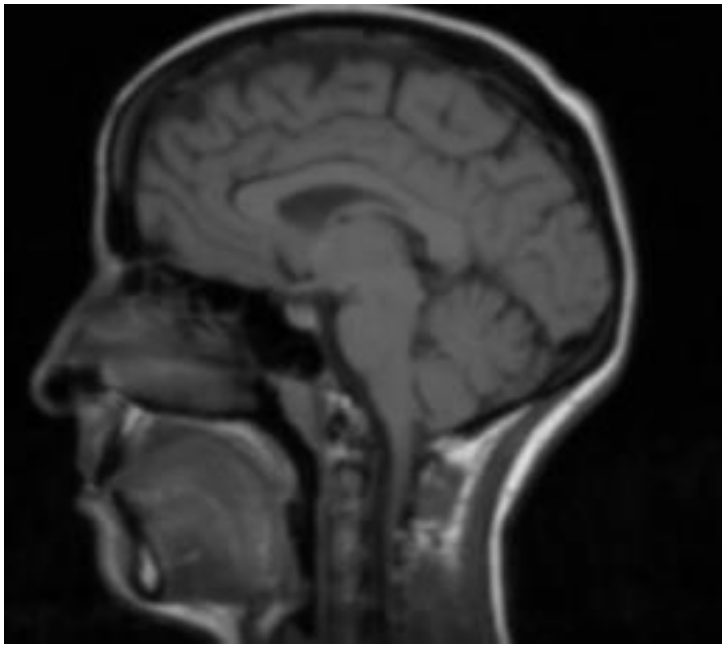
- Dans le repère local (*g*,*t*) avec $g = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}$ et $t = g^{\perp}$:

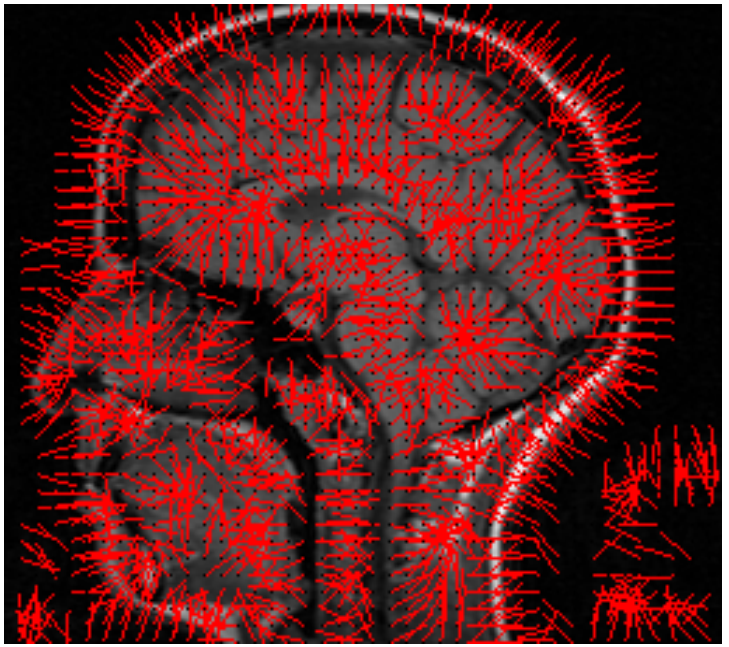
$\frac{\partial I}{\partial g} = \left|\|\nabla I\|\right|$ (direction principale) ; $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$ (isophote)

GRANDEURS DIFFERENTIELLES D'ORDRE 1

original

I



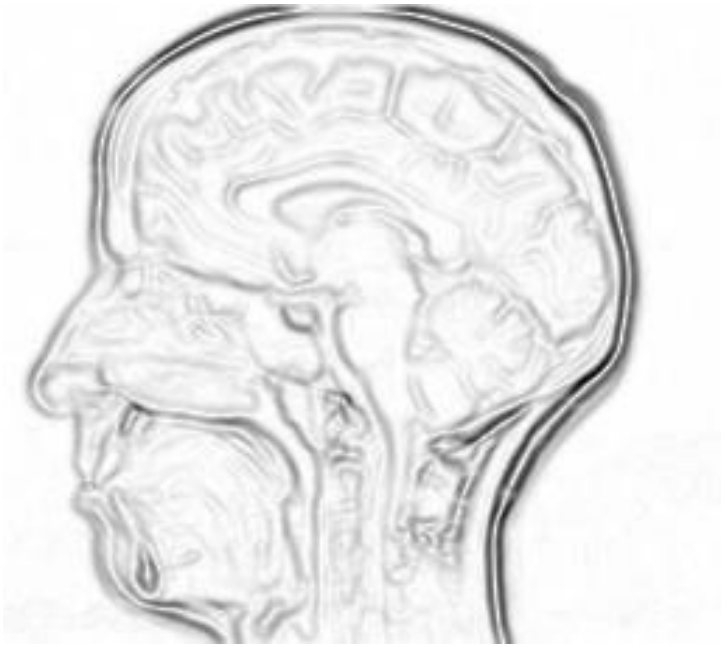


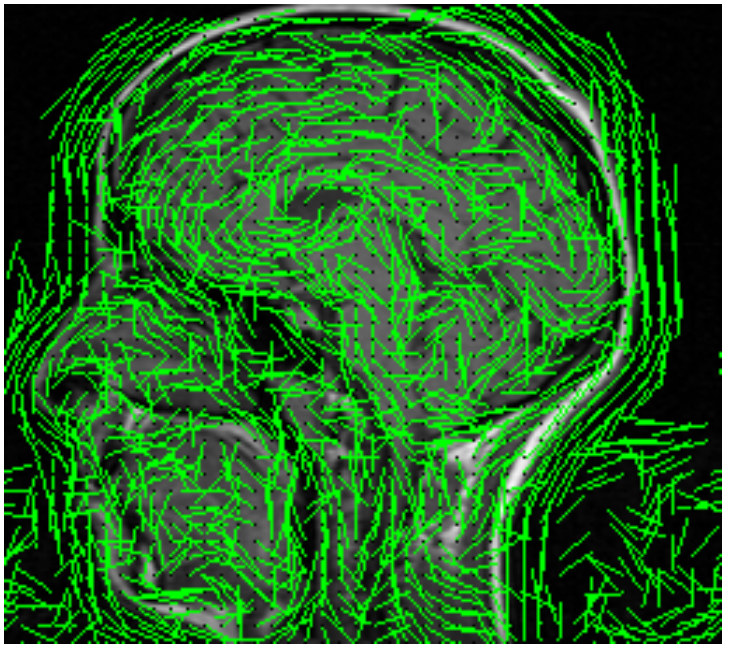
direction du gradient

$\arg \nabla I$

norme du gradient

$\|\nabla I\|$





direction de l'isophote

$\arg \nabla I^{\perp}$

ENSTA

IP PARIS

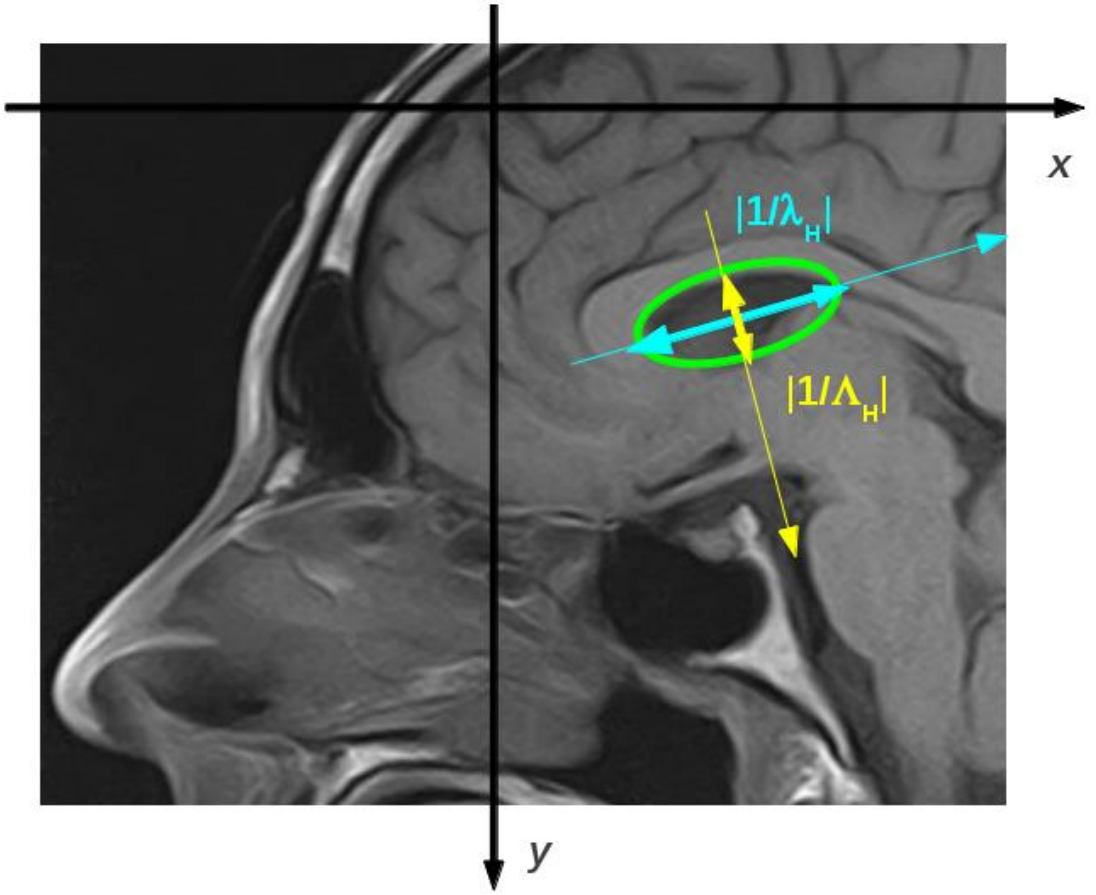
ORDRE 2 : HESSIENNE ET COURBURE

A l'ordre 2, la grandeur de base est la matrice hessienne :

- Ses vecteurs propres (resp. ses valeurs propres Λ_H et λ_H) correspondent aux directions (resp. intensités) de courbure principale.

- Sa norme de Frobénius, $\|\mathrm{H_I}\|_F$, mesure l'intensité de la courbure globale.

$$H_I = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$



ORDRE 2 : HESSIENNE ET COURBURE

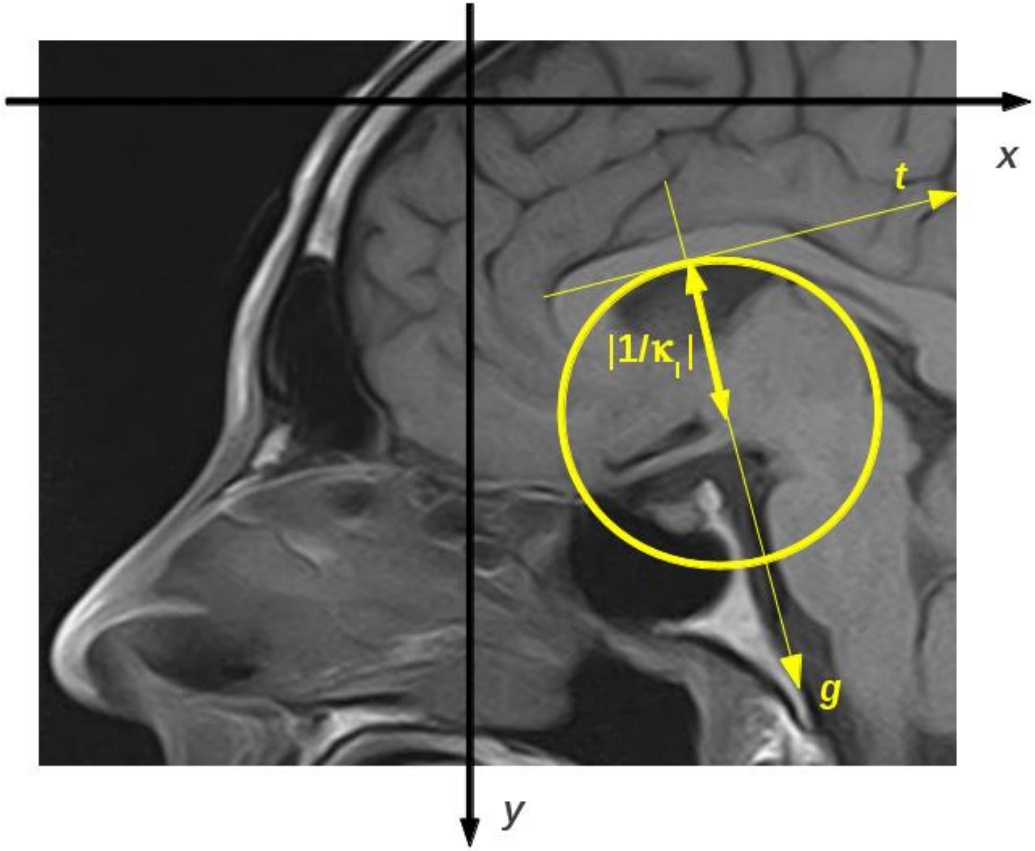
- Soit *u* et *v* deux vecteurs unitaires. La dérivée seconde selon u et v se calcule par :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial u \partial v} = u^T H_I v$$

- En particulier la courbure de l'isophote est liée à l'inverse du rayon du cercle osculateur au contour :

$$\kappa_I = -\frac{I_{tt}}{I_g} = -\frac{I_{xx}I_y^2 - 2I_xI_yI_{xy} + I_{yy}I_x^2}{\|\nabla I\|^3}$$

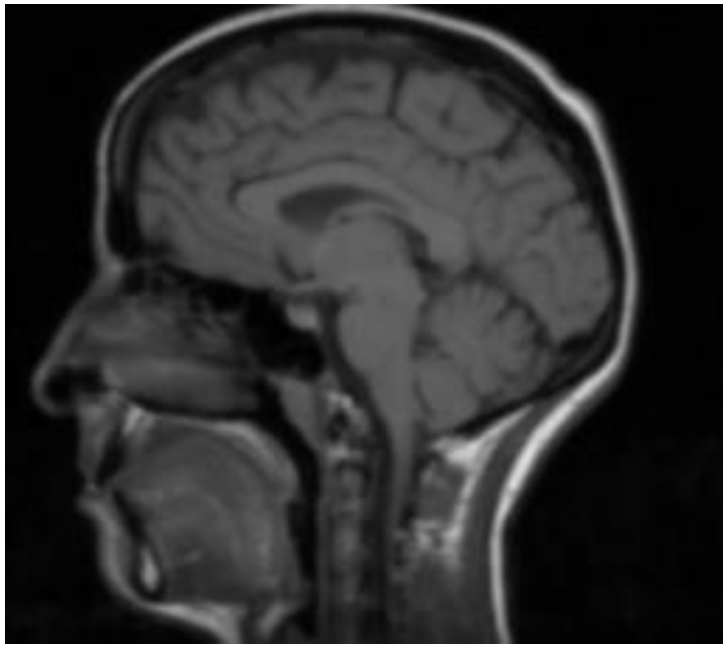
(Notations :
$I_u = \frac{\partial I}{\partial u}; I_{uv} = \frac{\partial^2 I}{\partial u \partial v}$, etc.)

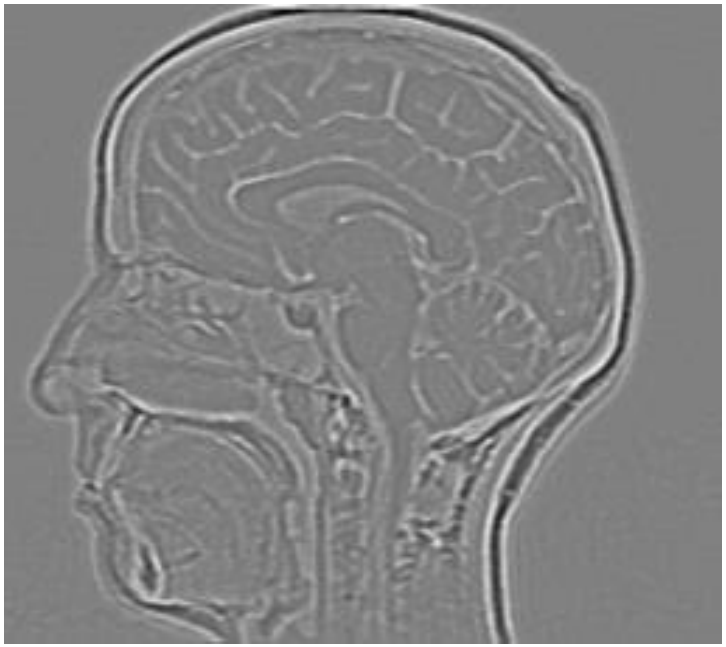


GRANDEURS DIFFERENTIELLES D'ORDRE 2

original

I



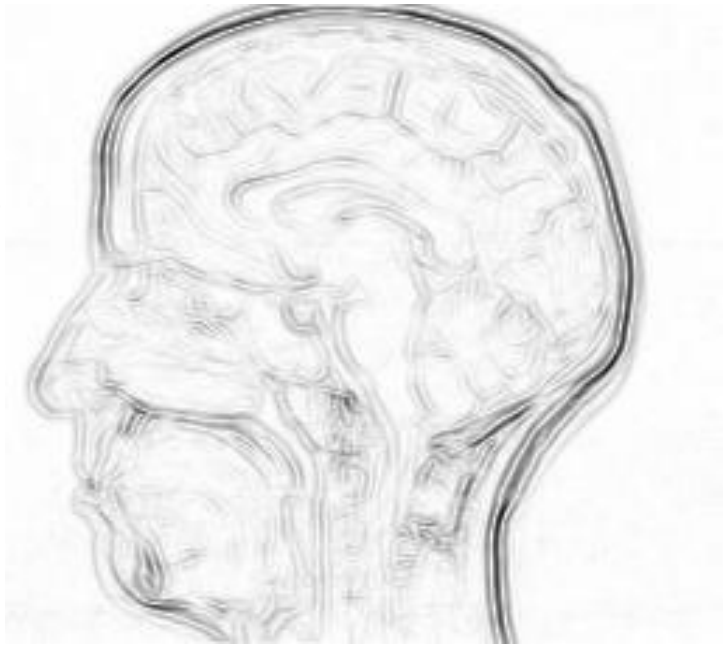


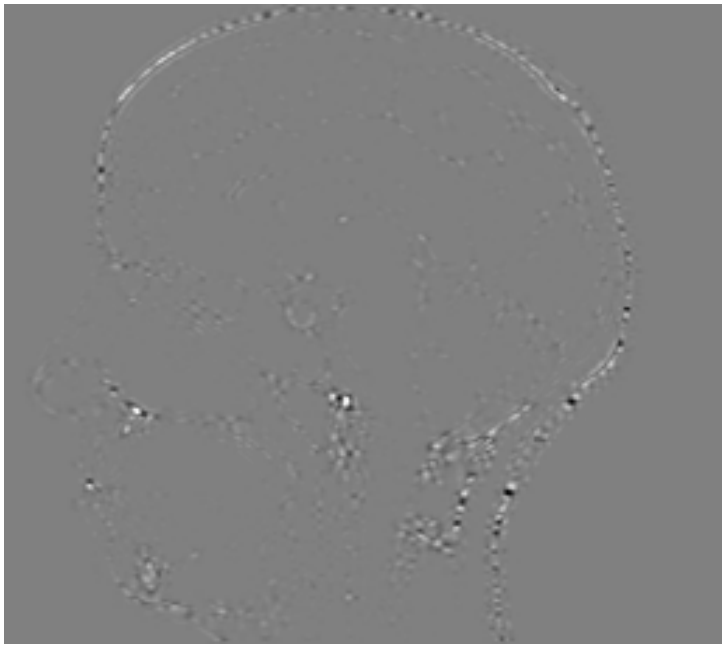
trace de la hessienne, ou courbure totale = laplacien

ΔI

norme de la hessienne

$\|\mathrm{H_I}\|_F$





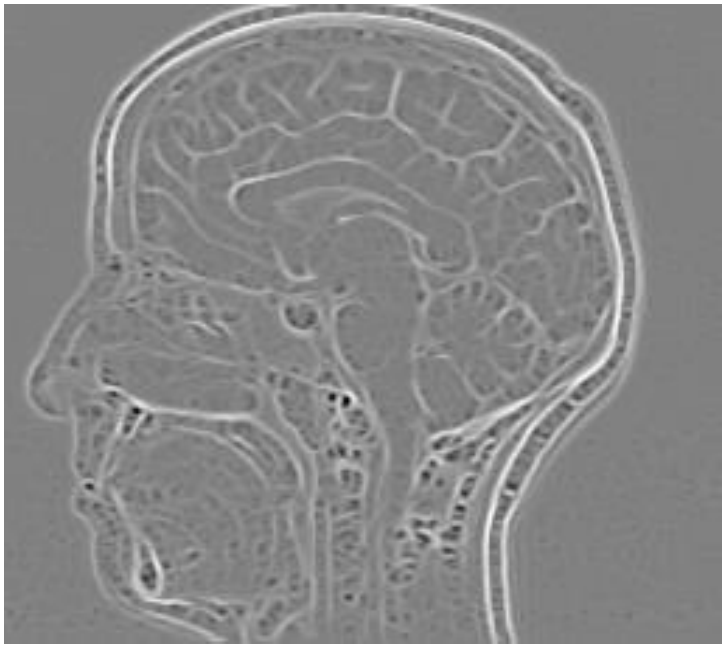
déterminant de la hessienne

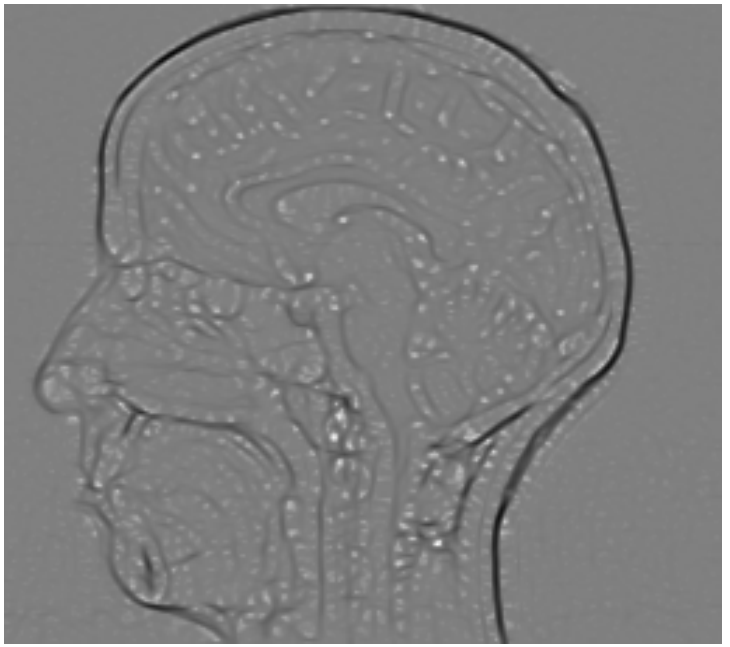
$\det\|\mathrm{H_I}\|_F$

GRANDEURS DIFFERENTIELLES D'ORDRE 2

« grande » valeur propre

Λ_I

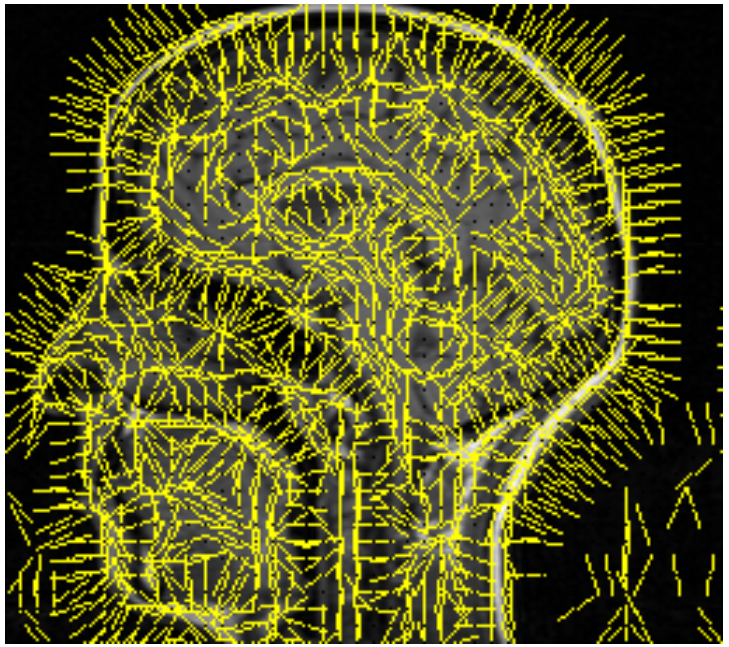


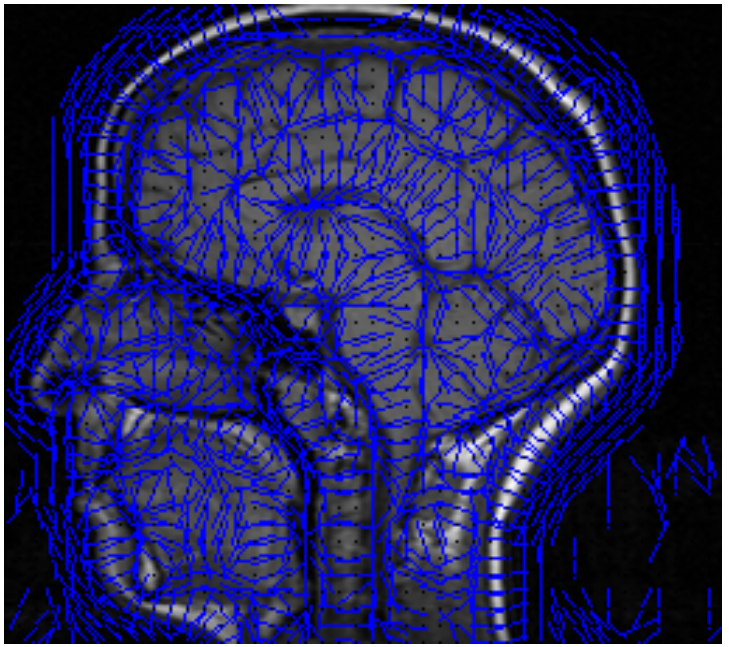


« petite » valeur propre

λ_I

direction du « grand » vecteur propre





direction du « petit » vecteur propre

ENSTA

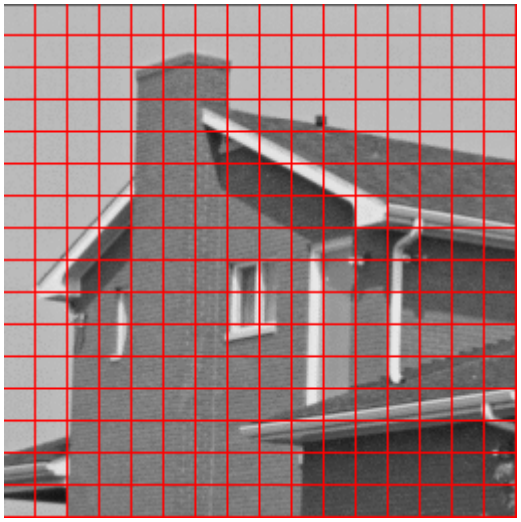
IP PARIS

REPRESENTATION PAR LES DERIVEES LOCALES

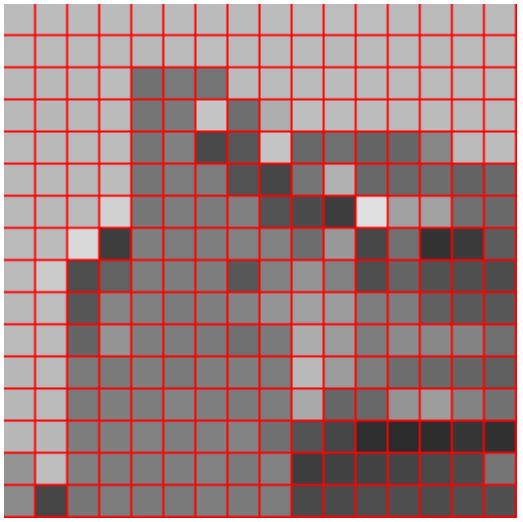
Expression de la formule de Taylor à l'ordre 2, à partir du vecteur gradient et de la matrice hessienne :

$$I(x_0 + \varepsilon, y_0 + \eta) = I(x_0, y_0) + (\varepsilon, \eta)^T . \nabla I + \frac{1}{2}(\varepsilon, \eta)^T . H_I . (\varepsilon, \eta) + o(\varepsilon^2 + \eta^2)$$

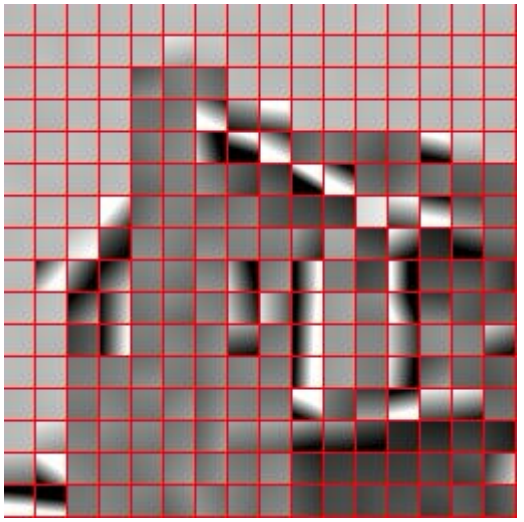
Reconstruction d'imagettes à partir des dérivées partielles calculées au centre de l'imagette, à l'ordre 0, 1 et 2 :



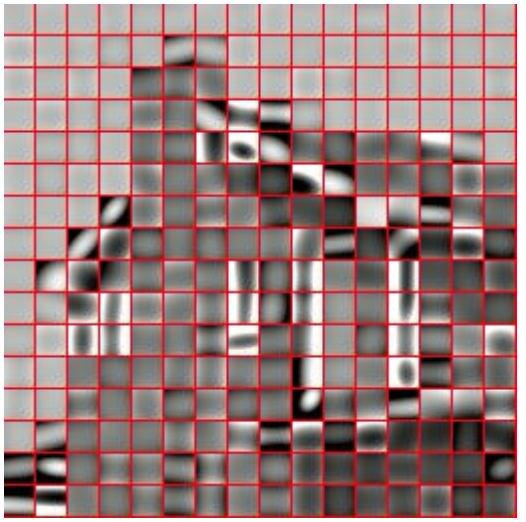
imagettes



ordre 0



ordre 1



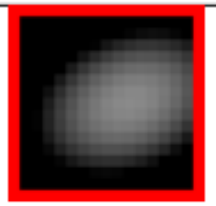
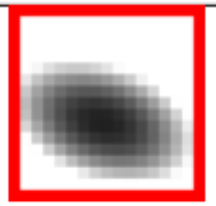
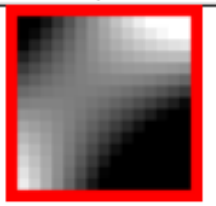
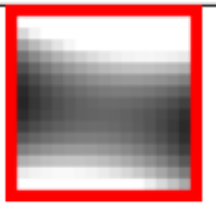
ordre 2

ENSTA

IP PARIS

CATEGORISATION DIFFERENTIELLE LOCALE

La valeur des dérivées jusqu'à l'ordre 2 permettent de catégoriser, selon l'ordre dominant, la géométrie locale des pixels en 4 catégories (6 en tenant compte de la polarité) :

0 : Plateau	1 : Rampe	2 : Courbure			
$\|\|\nabla_I\|\| \simeq 0$ $\|\|H_I\|\|_F \simeq 0$	$\|\|\nabla_I\|\| \gg 0$ $\|\|H_I\|\|_F \simeq 0$	$\|\|H_I\|\|_F \gg 0$ elliptique : $\Lambda_I \lambda_I > 0$		selle (resp. tubulaire) : $\Lambda_I \lambda_I < 0$	
					
		$\Lambda_I < 0$ $\boldsymbol{\lambda_I < 0}$	$\boldsymbol{\Lambda_I > 0}$ $\lambda_I > 0$	$\Lambda_I > 0$ (resp. $\simeq 0$) $\boldsymbol{\lambda_I < 0}$	$\boldsymbol{\Lambda_I > 0}$ $\lambda_I < 0$ (resp. $\simeq 0$)

ESTIMATION DES DERIVEES ET ESPACE D'ECHELLES

L'idée clef des espace d'échelles pour le traitement d'images est que toute mesure est relative à une échelle d'estimation.

En particulier une dérivée n'a de sens qu'estimée à une échelle donnée, correspondant à une hypothèse de régularité qui est explicitement réalisée par lissage de l'image. Cette estimation repose sur la commutativité entre dérivation et convolution :

$$\partial^n (I \star g) = I \star (\partial^n g)$$

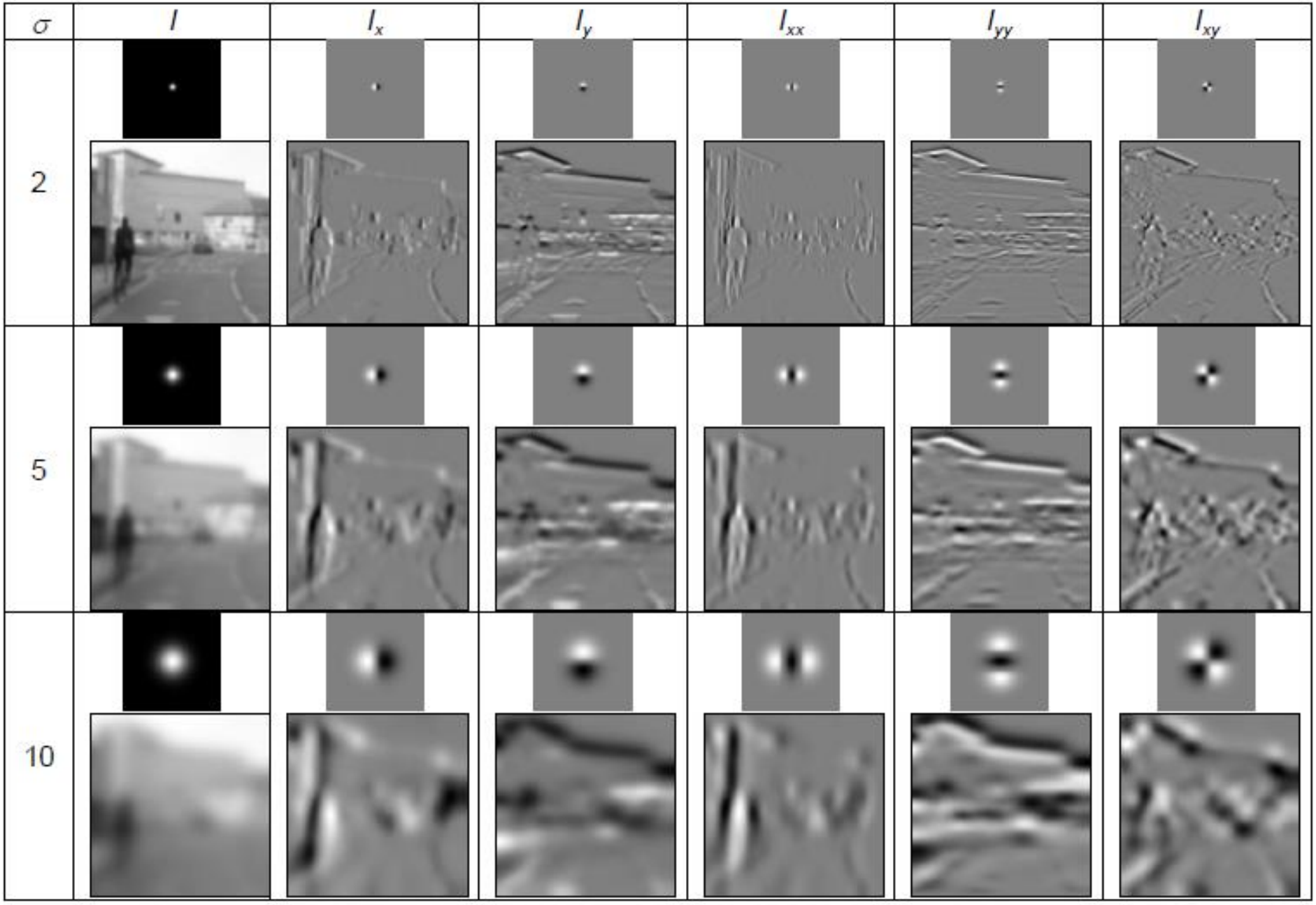
Dans le cadre des espaces d'échelles gaussien, le noyau de convolution *g* s'identifie au noyau gaussien 2d d'écart-type σ :

$$G_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

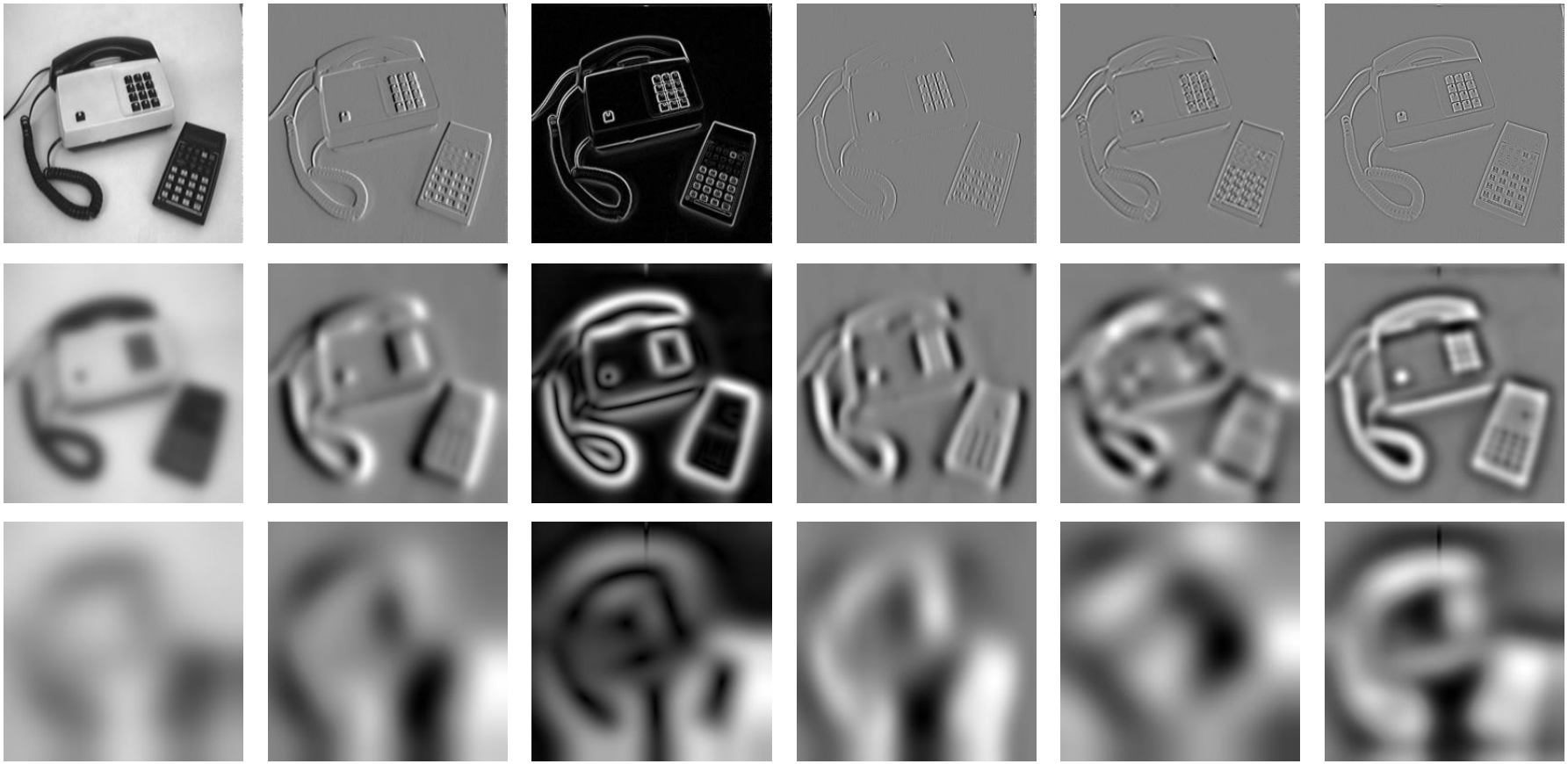
Les dérivées de l'image *I* estimées à l'échelle σ sont donc définies par les convolutions avec la dérivée de gaussienne correspondante :

$$\left(\frac{\partial^{i+j} I}{\partial x^i \partial y^j}\right)_\sigma \overset{\text{déf.}}{=} I \star \left(\frac{\partial^{i+j} G_\sigma}{\partial x^i \partial y^j}\right)$$

DERIVEES MULTI-ECHELLES ET NOYAUX DE CONVOLUTION ASSOCIES



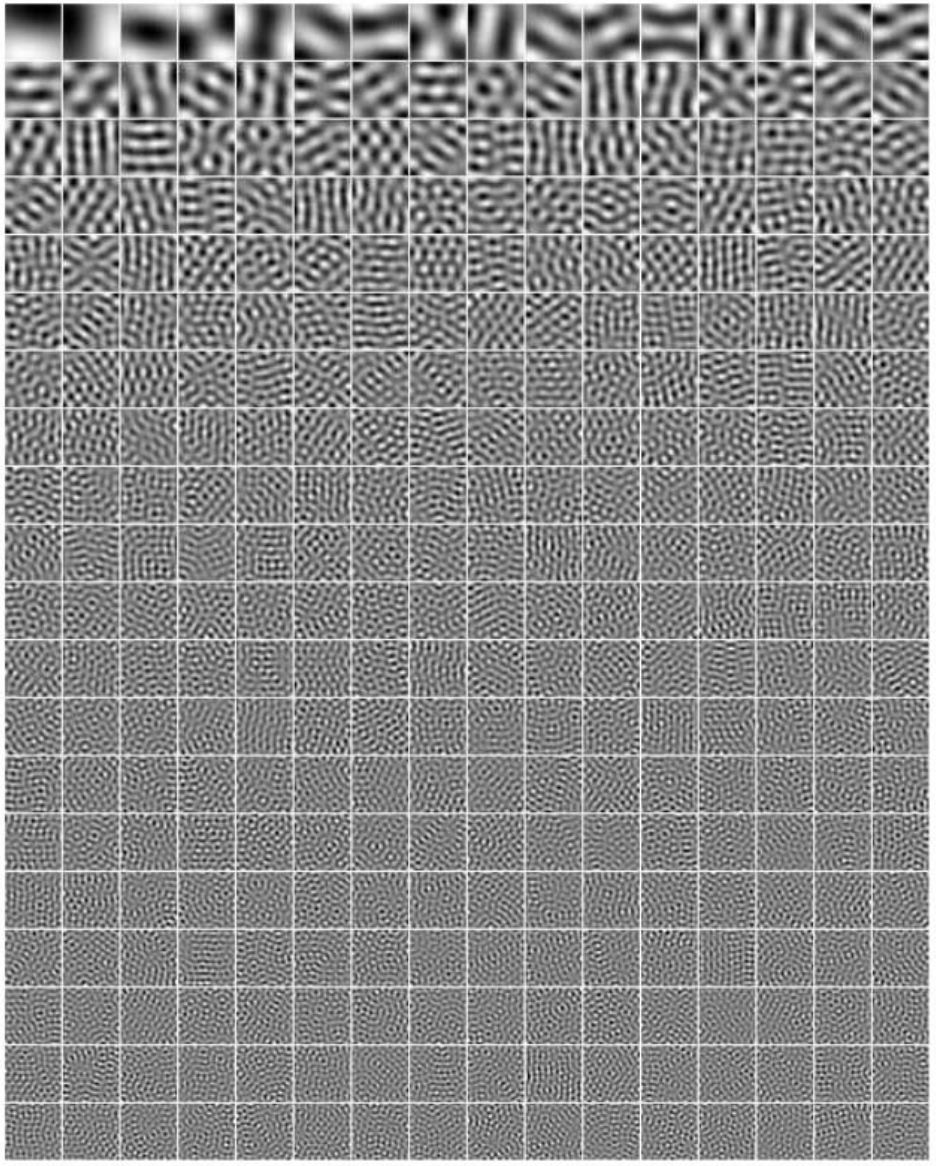
ESPACE D'ECHELLES GAUSSIEN ET GRANDEURS DIFFERENTIELLES



échelle

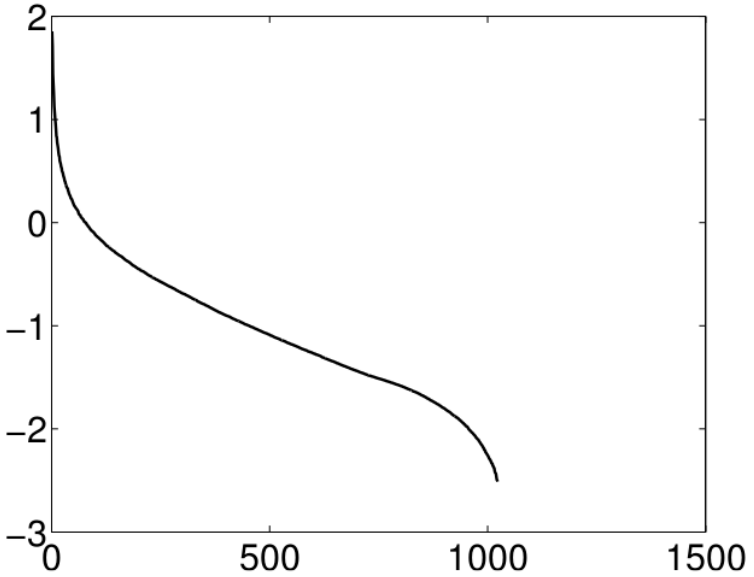
I | $\frac{\partial I}{\partial x}$ | $\|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2}$ | $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ | $\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}$ | $\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$

ACP ET STATISTIQUES DES IMAGES NATURELLES



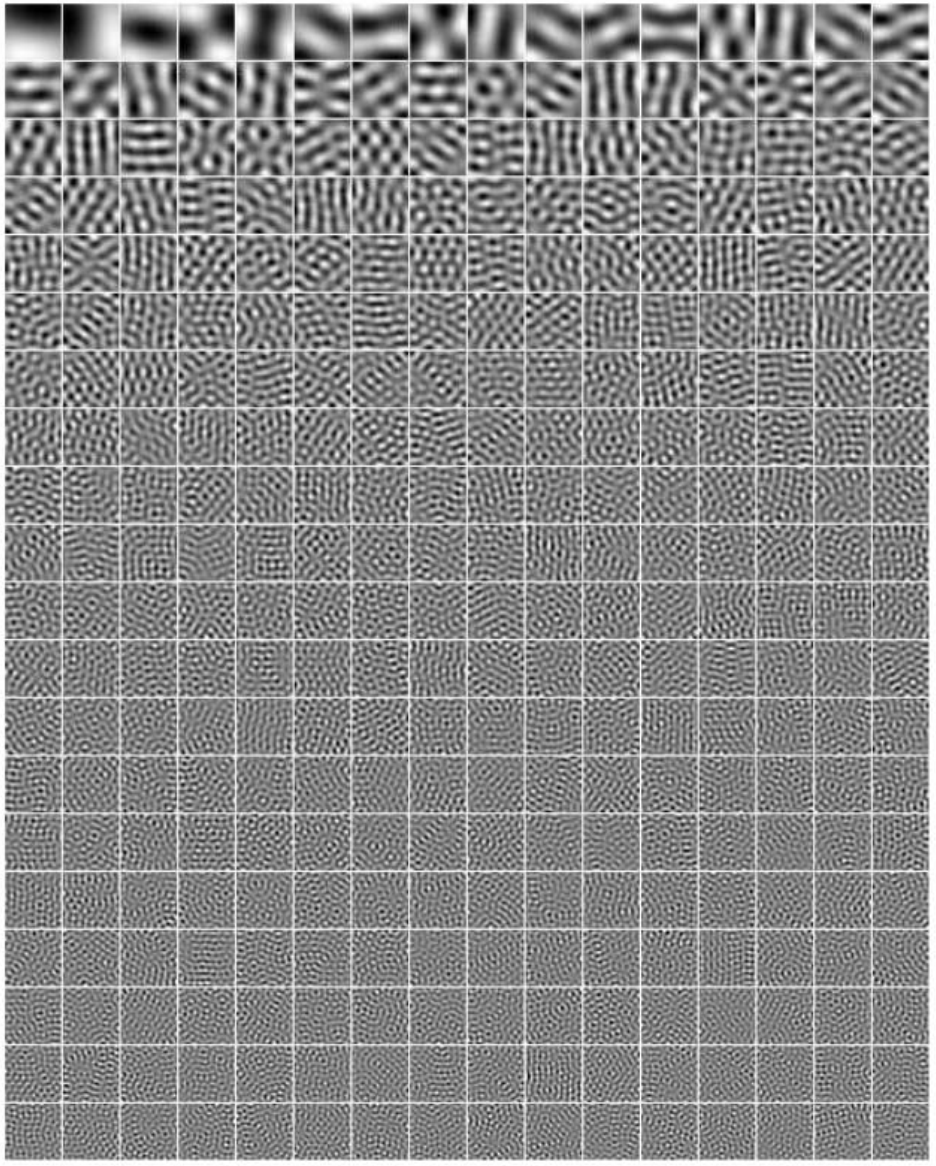
Ci-contre les 320 premiers vecteurs propres obtenus lors d'une Analyse en Composantes Principales (ACP) appliquée à un ensemble d'imagettes 32x32 extraits aléatoirement d'une base d'images naturelles.

Ci-dessous, la log-variance associée à chaque vecteur propre (composante principale), par ordre d'importance, pour l'ensemble des imagettes.



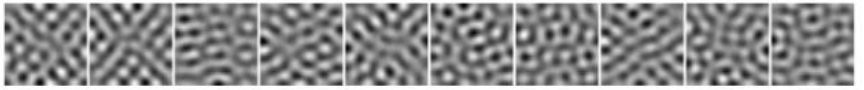
[Hyvrinen 09]

ACP ET STATISTIQUES DES IMAGES NATURELLES



Composantes principales n°1 obtenues pour 10 ensembles aléatoires distincts :

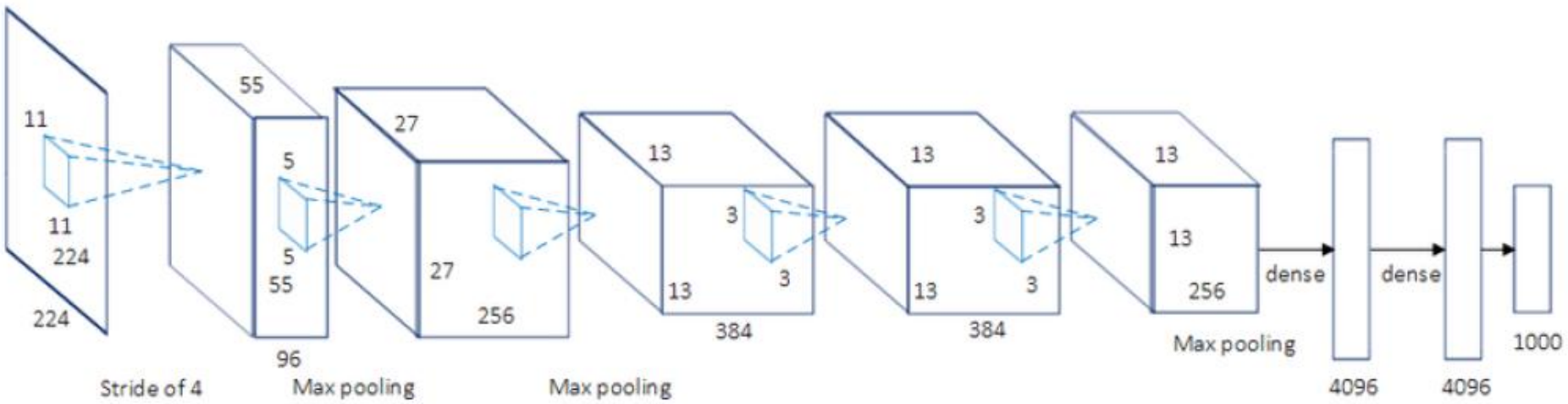
Composantes principales n°100 obtenues pour 10 ensembles aléatoires distincts :



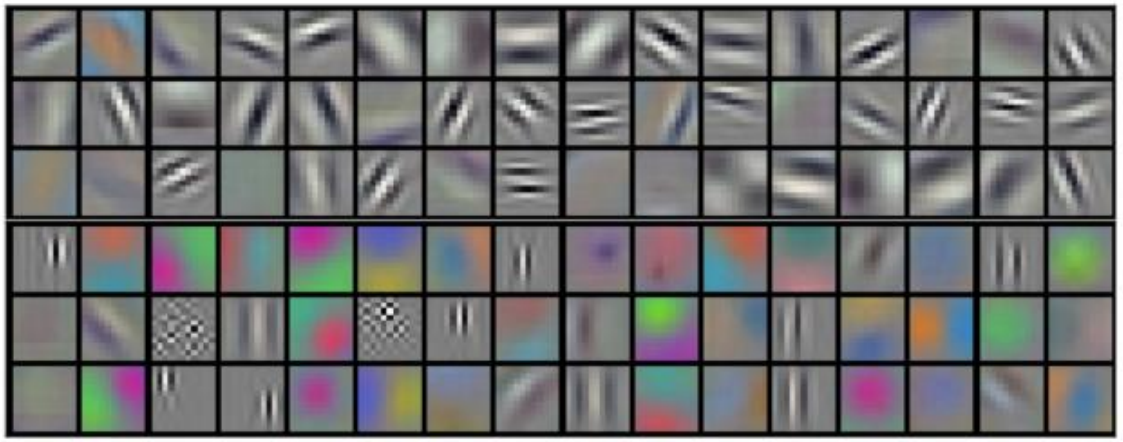
Noter la similarité entre les premières composantes principales et les premières dérivées de gaussiennes.

[Hyvrinen 09]

…ET DES CARACTERISTIQUES *APPRISES* ?



*AlexNet **[Kritzhevsky 12]** for end-to-end image classification (1000 classes)*



Les 96 noyaux de convolution "appris" par la 1ère couche d'AlexNet entraîné sur ImageNet ILSVRC-2010

La première couche d'un réseau convolutionnel peut être vue comme une projection dans une famille génératrice de vecteurs, supposée optimale pour la tâche cible (ici, classification d'images).

Il est visible que de nombreux neurones agissent comme des noyaux *dérivateurs*.

- Lesquels ?
- Que signifient les noyaux "colorés" ?

PRIMITIVES VISUELLES POUR LA RECONNAISSANCE ET LE SUIVI

Le niveau de la représentation, du strictement local au complètement global, forme une caractéristique fondamentale d'une primitive visuelle.

Local : plutôt géométrique (direction, courbure,…)

Global : plutôt statistique (histogramme, spectre de fréquences,…)

Les espaces d'échelles permettent de réaliser un continuum du local vers le global.

Dans la suite :

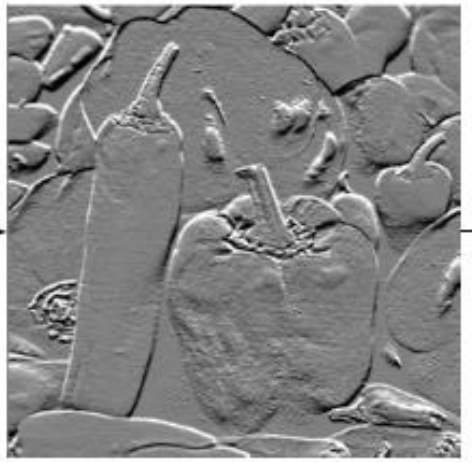
- Détection de contours (Zéros du laplacien)
- Calcul des points anguleux (Harris)
- Calcul des blobs (SIFT)
- Calcul des descripteurs (invariants différentiels).

ENSTA

IP PARIS

CONTOURS : METHODES BASIQUES (DIFFERENCES FINIES)

Original



Sobel vertical : $\frac{\partial I}{\partial y}$

Sobel horizontal : $\frac{\partial I}{\partial x}$

|...|

|...|

+

Norme L_1 du gradient de Sobel

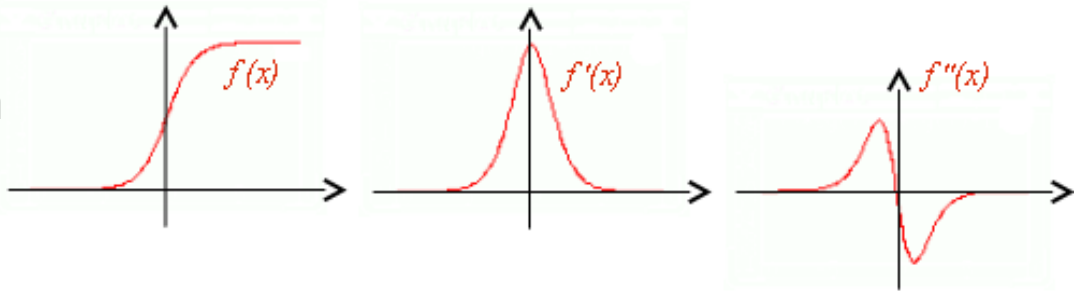
Seuillage

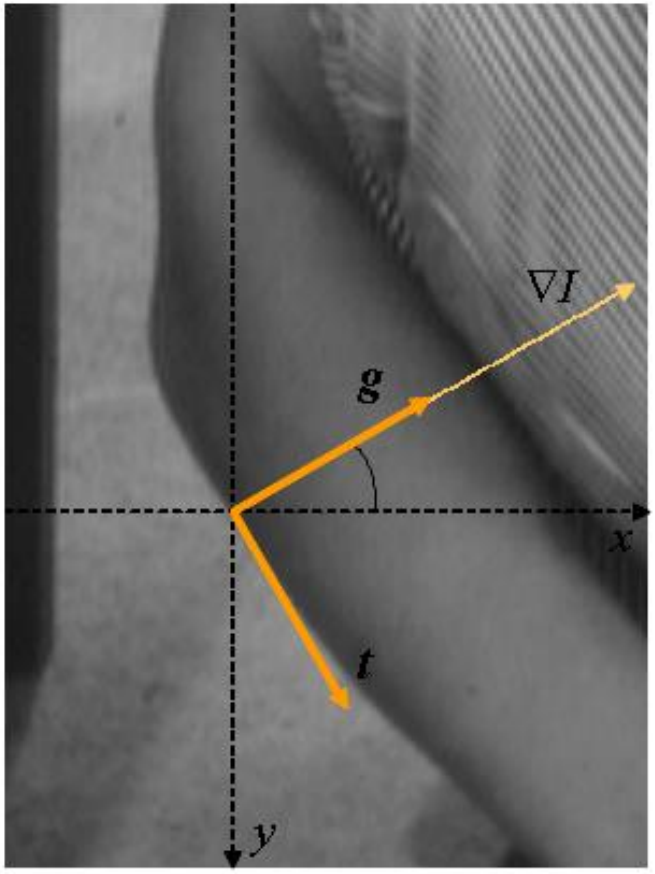
Contours épais

- *Amincissement*
- *Poursuite*
- *Fermeture*

CONTOURS : METHODE ANALYTIQUE

En 1d, un contour correspond à un maximum local de la dérivée première, c'est-à-dire à un passage par zéro de la dérivée seconde :

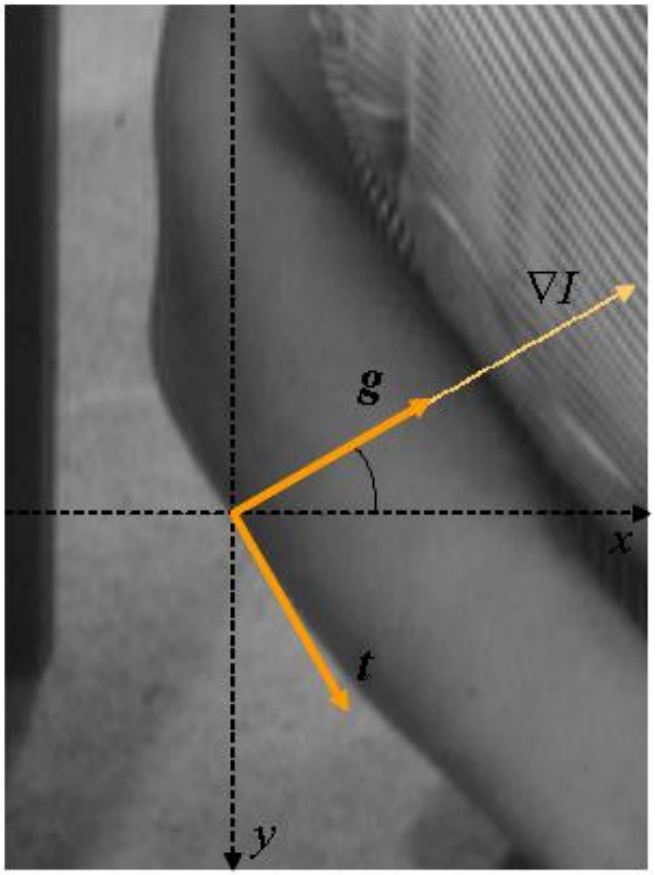




Pour retrouver cette propriété en 2d, il faut se placer dans la direction du gradient. Les contours sont donc définis comme les maxima locaux de la dérivée première dans la direction du gradient, c'est-à-dire les passages par zéro de la dérivée seconde dans la direction du gradient, soit :

$$I_{gg} = \frac{\partial^2 I}{\partial g^2} = 0$$

CONTOURS : METHODE ANALYTIQUE



Calculons d'abord les dérivées premières de l'image dans le repère local du gradient (*g*,*t*). Ces dérivées se calculent selon la formule :

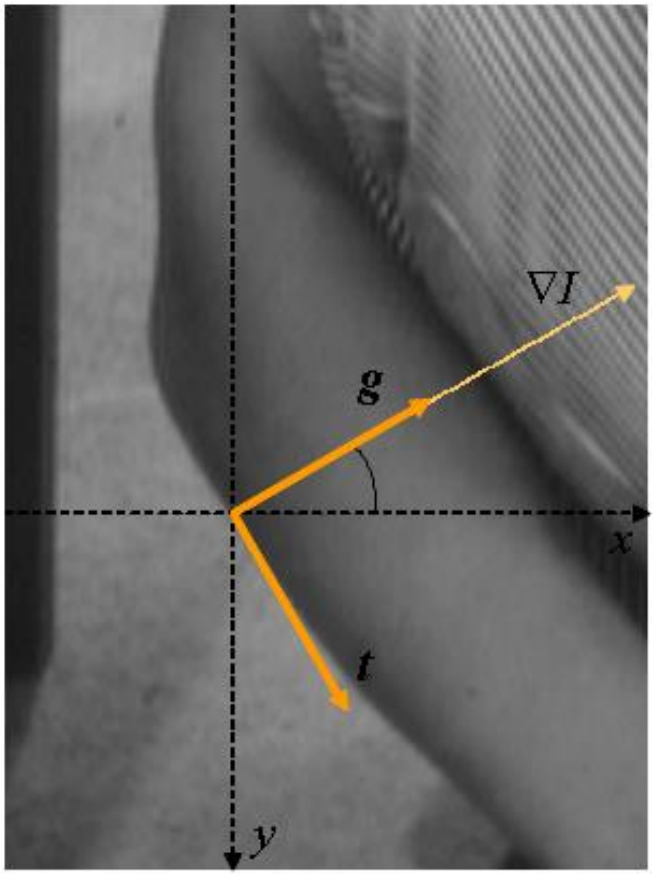
$$I_v = \frac{\partial I}{\partial v} = \nabla I . v^T$$

On a ainsi :

$$\begin{cases} I_g = \nabla I . g^T = \|\nabla I\| \\ I_t = \nabla I . t^T = 0 \end{cases}$$

- La composante gradient *g* correspond à la direction principale de variation.
- La composante tangentielle *t* correspond à la direction de l'*isophote* ou *ligne de niveau*.

CONTOURS : METHODE ANALYTIQUE



Calculons maintenant les dérivées secondes de l'image dans la direction du gradient, selon la formule :

$$I_{uv} = \frac{\partial^2 I}{\partial u \partial v} = u^T H_I v$$

On a donc :

$$I_{gg} = g^T H_I g = \frac{I_{xx} I_x^2 + 2 I_{xy} I_x I_y + I_{yy} I_y^2}{\|\nabla I\|^2}$$

L'équation des contours peut donc s'écrire :

$$I_{xx} I_x^2 + 2 I_{xy} I_x I_y + I_{yy} I_y^2 = 0$$

Soit 5 dérivées à calculer. On peut néanmoins gagner en approximant la dérivée seconde dans la direction de *g* par le laplacien. En effet, on peut remarquer que :

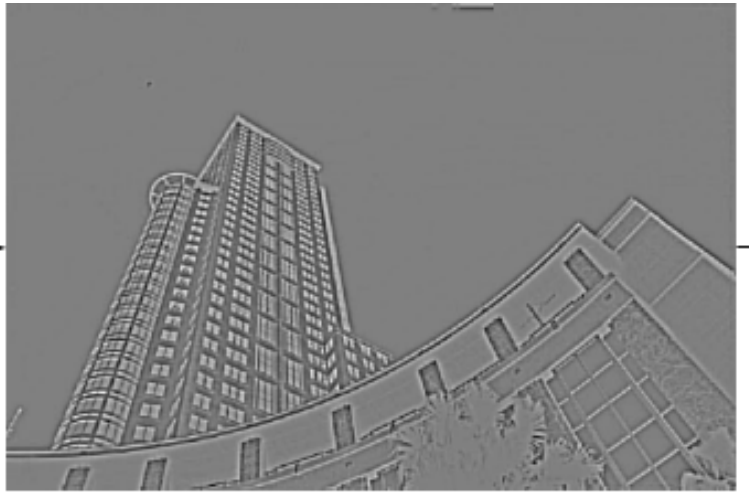
$$I_{gg} + I_{tt} = I_{xx} + I_{yy} = \Delta I$$

Le laplacien est *invariant par rotation.*

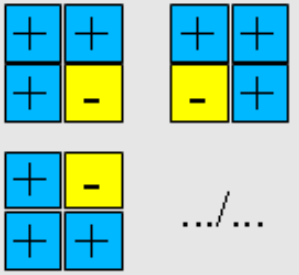
Or, I_{tt} est proportionnel à la courbure de l'isophote (ligne de niveau). *Si cette courbure est suffisamment faible*, on a : $I_{tt} \approx 0 \Rightarrow \Delta I \approx I_{gg}$. Et finalement l'équation des contours devient :

$$\boxed{\Delta I = 0}$$

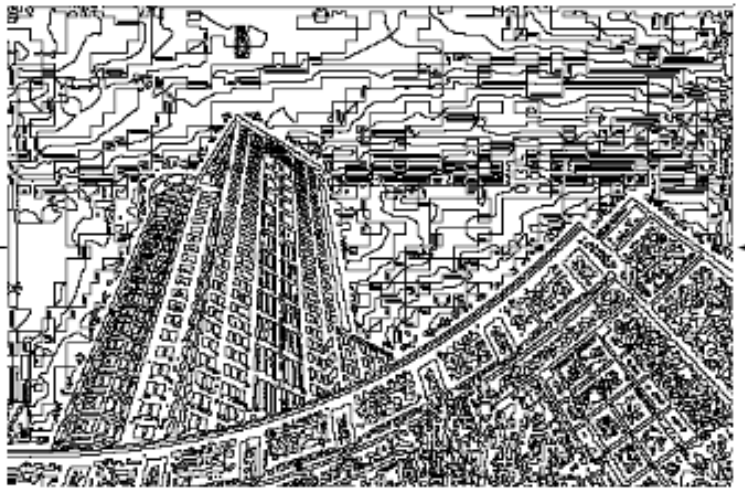
CONTOURS : PASSAGES PAR ZERO DU LAPLACIEN



Laplacien



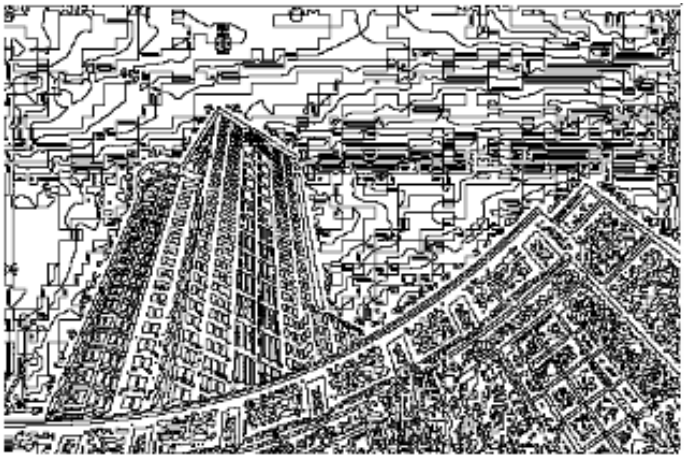
Détection des changements de polarité dans un voisinage 2x2



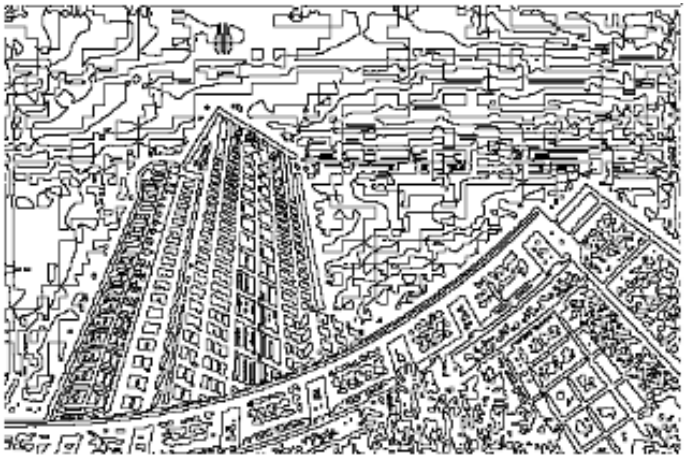
Passages par zéro

- Seuiller les passages par zéro selon le contraste.
- Sélectionner les structures en fonction de l'échelle

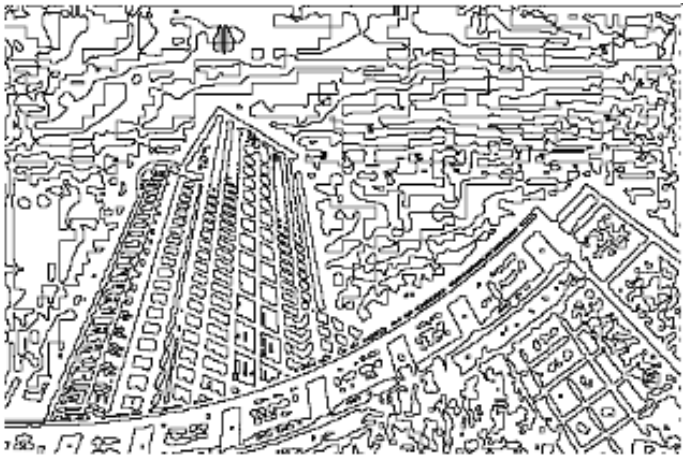
CONTOURS MULTI ECHELLES



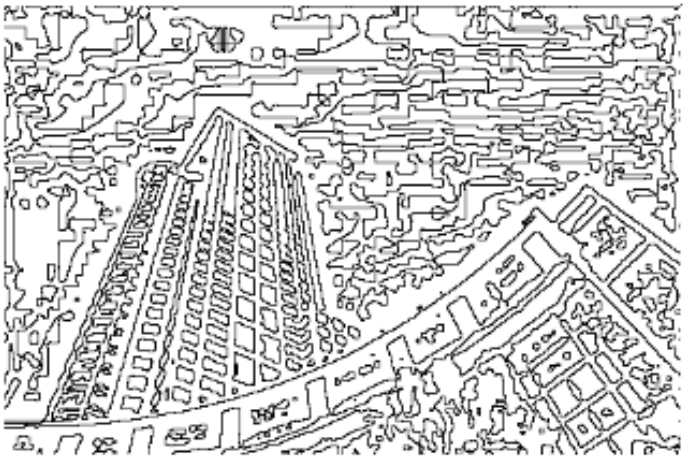
$\sigma = 1.0$



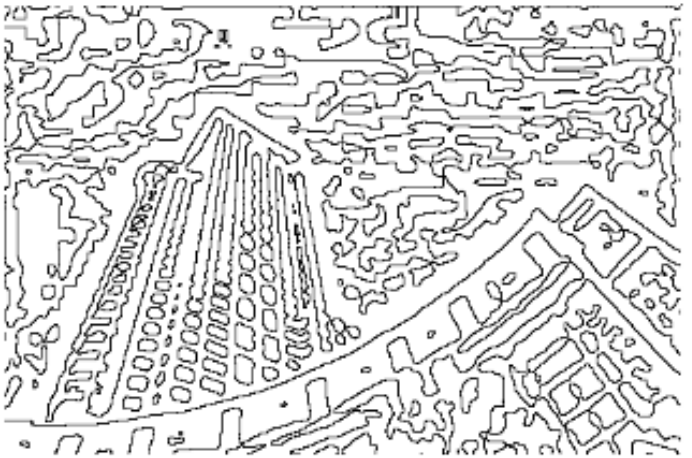
$\sigma = 1.5$



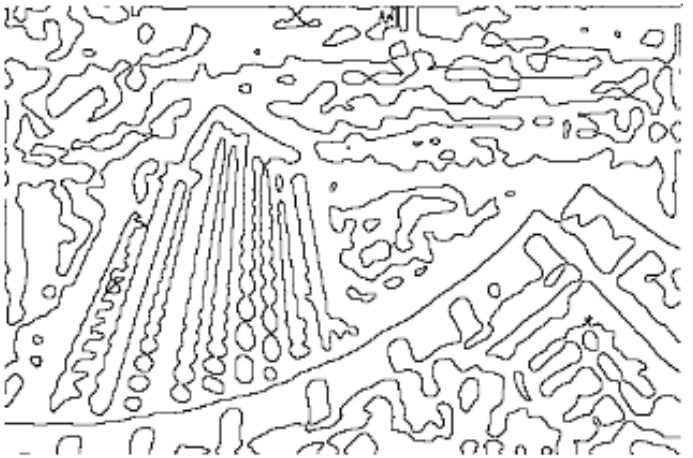
$\sigma = 2.0$



$\sigma = 2.5$

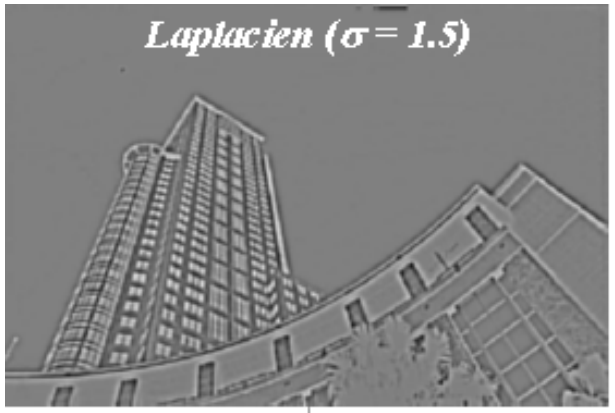


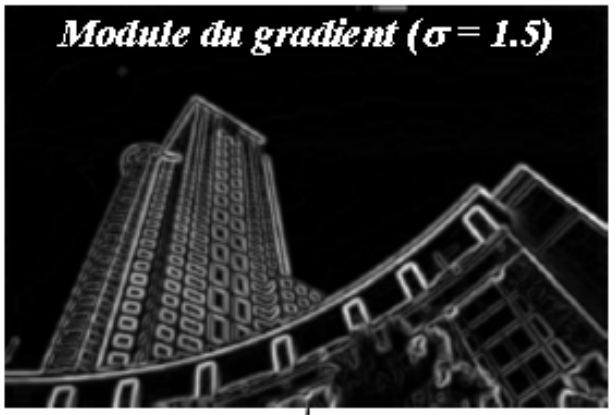
$\sigma = 3.5$



$\sigma = 5.0$

CONTOURS ET CONTRASTE

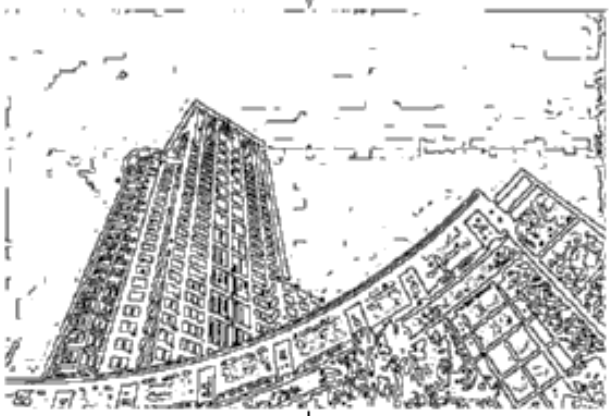




passages par zéro

Seuil bas
(s = 0.5)

Seuil haut (s = 8.0)

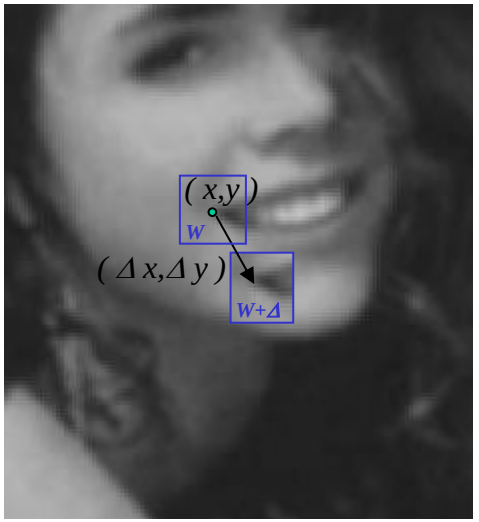


Seuil par hystérésis

Le seuil par hystérésis consiste à sélectionner l'ensemble des composantes connexes dans l'image de seuil bas, qui ont au moins 1 pixel dans l'image de seuil haut (voir reconstruction géodésique).

POINTS ANGULEUX ET MATRICE D'AUTOCORRELATION

Les points anguleux (ou points d'intérêt, points saillants,...) sont des points « qui contiennent beaucoup d'information » relativement à l'image. Ce sont des points aux voisinages desquels l'image *varie significativement dans plusieurs directions*.



Une mesure des variations locales de l'image I au point (x,y) associée à un déplacement $(\Delta x,\Delta y)$ est fournie par la *fonction d'autocorrélation* :

$$\chi(x,y) = \sum_{(x_k,y_k)\in W} \left(I(x_k,y_k) - I(x_k+\Delta x, y_k+\Delta y)\right)^2$$

Où W est une fenêtre centrée au point (x,y).

Or, en utilisant une approximation du premier ordre :

$$I(x_k+\Delta x, y_k+\Delta y) \approx I(x_k,y_k) + \left(\frac{\partial I}{\partial x}(x_k,y_k) \quad \frac{\partial I}{\partial y}(x_k,y_k)\right)\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$$

Et donc :

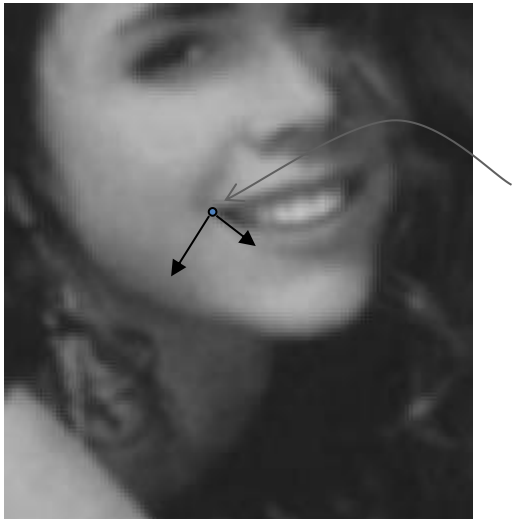
$$\chi(x,y) = \sum_{(x_k,y_k)\in W}\left(\left(\frac{\partial I}{\partial x}(x_k,y_k) \quad \frac{\partial I}{\partial y}(x_k,y_k)\right)\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}\right)^2 = (\Delta x \quad \Delta y)\underbrace{\begin{pmatrix}\sum_{(x_k,y_k)\in W}\left(\frac{\partial I}{\partial x}(x_k,y_k)\right)^2 & \sum_{(x_k,y_k)\in W}\frac{\partial I}{\partial x}(x_k,y_k)\cdot\frac{\partial I}{\partial y}(x_k,y_k)\\ \sum_{(x_k,y_k)\in W}\frac{\partial I}{\partial x}(x_k,y_k)\cdot\frac{\partial I}{\partial y}(x_k,y_k) & \sum_{(x_k,y_k)\in W}\left(\frac{\partial I}{\partial y}(x_k,y_k)\right)^2\end{pmatrix}}_{\Xi(x,y)}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$$

Matrice d'autocorrélation de l'image I en (x,y)

MATRICE D'AUTOCORRELATION ET DETECTEUR DE HARRIS

$$\Xi(x,y) = \begin{pmatrix} \sum_{(x_k,y_k)\in W} \left(\frac{\partial I}{\partial x}(x_k,y_k)\right)^2 & \sum_{(x_k,y_k)\in W} \frac{\partial I}{\partial x}(x_k,y_k) \cdot \frac{\partial I}{\partial y}(x_k,y_k) \\ \sum_{(x_k,y_k)\in W} \frac{\partial I}{\partial x}(x_k,y_k) \cdot \frac{\partial I}{\partial y}(x_k,y_k) & \sum_{(x_k,y_k)\in W} \left(\frac{\partial I}{\partial y}(x_k,y_k)\right)^2 \end{pmatrix}$$

La matrice d'autocorrélation Ξ représente la variation locale de l'image I en (x,y). (x,y) sera considéré comme un point anguleux de I si pour tous les déplacements $(\Delta x,\Delta y)$, la quantité $(\Delta x,\Delta y).\Xi(x,y).(\Delta x,\Delta y)^t$ est grande.



Les points anguleux sont les points (x,y) pour lesquels la matrice d'autocorrélation $\Xi(x,y)$ a *deux valeurs propres grandes*.

Cela correspond aux points pour lesquels il existe localement une base de vecteurs propres de Ξ décrivant des variations locales importantes de l'image.

Le *détecteur de Harris* calcule une *fonction d'intérêt* $\Theta(x,y)$:

$$\Theta(x,y) = \det \Xi - \alpha . \mathrm{trace}^2(\Xi)$$

Le premier terme correspond au produit des valeurs propres, le second terme pénalise les points de contours avec une seule forte valeur propre.

Les points d'intérêt correspondent aux maxima locaux de la fonction Θ qui sont au delà d'un certain seuil (typiquement 1% de la valeur max de Θ).

[Harris 88]

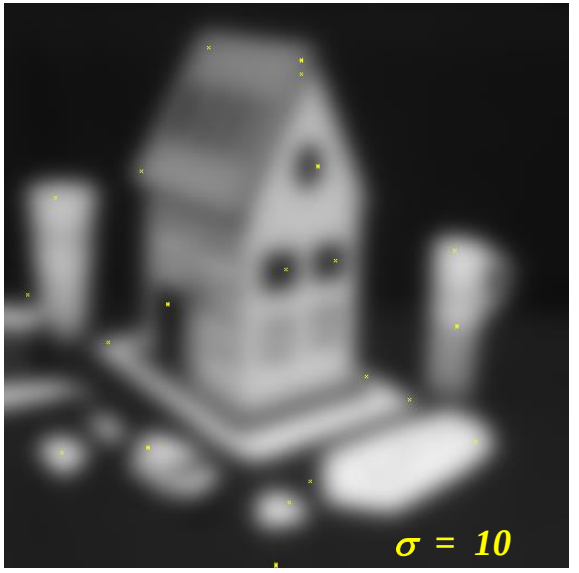
CALCUL DE LA FONCTION D'INTERET DE HARRIS

1. On calcule les dérivées premières à partir des dérivées de gaussienne (écart-type σ_1)
2. On calcule les termes de la matrice d'autocorrélation Ξ en calculant une moyenne locale des dérivées sous la forme d'une gaussienne (écart-type σ_2, typiquement $\sigma_2 = 2\ \sigma_1$)
3. On calcule la fonction d'intérêt : $\Theta = \det(\Xi) - \alpha\ \text{trace}^2(\Xi)$ (typiquement $\alpha = 0{,}06$).
4. On calcule les maxima locaux de Θ supérieurs à un certain seuil (typiquement 1% de Θ_{max}).

σ_1 est donc le paramètre d'échelle du détecteur de Harris, qui détermine la portée des opérations de dérivations et d'intégrations (moyennes).

POINTS DE HARRIS MULTI-ECHELLES

Points de Harris obtenus en calculant les dérivées premières par convolution avec une dérivée de gaussienne d'écart-type σ.



DETECTEUR SIFT : EXTREMA DANS L'ESPACE D'ECHELLES

Le détecteur SIFT (Scale Invariant Feature Transform) utilise une approche de la notion de structure / point d'intérêt mieux adaptée aux grandes échelles que celle de point anguleux :

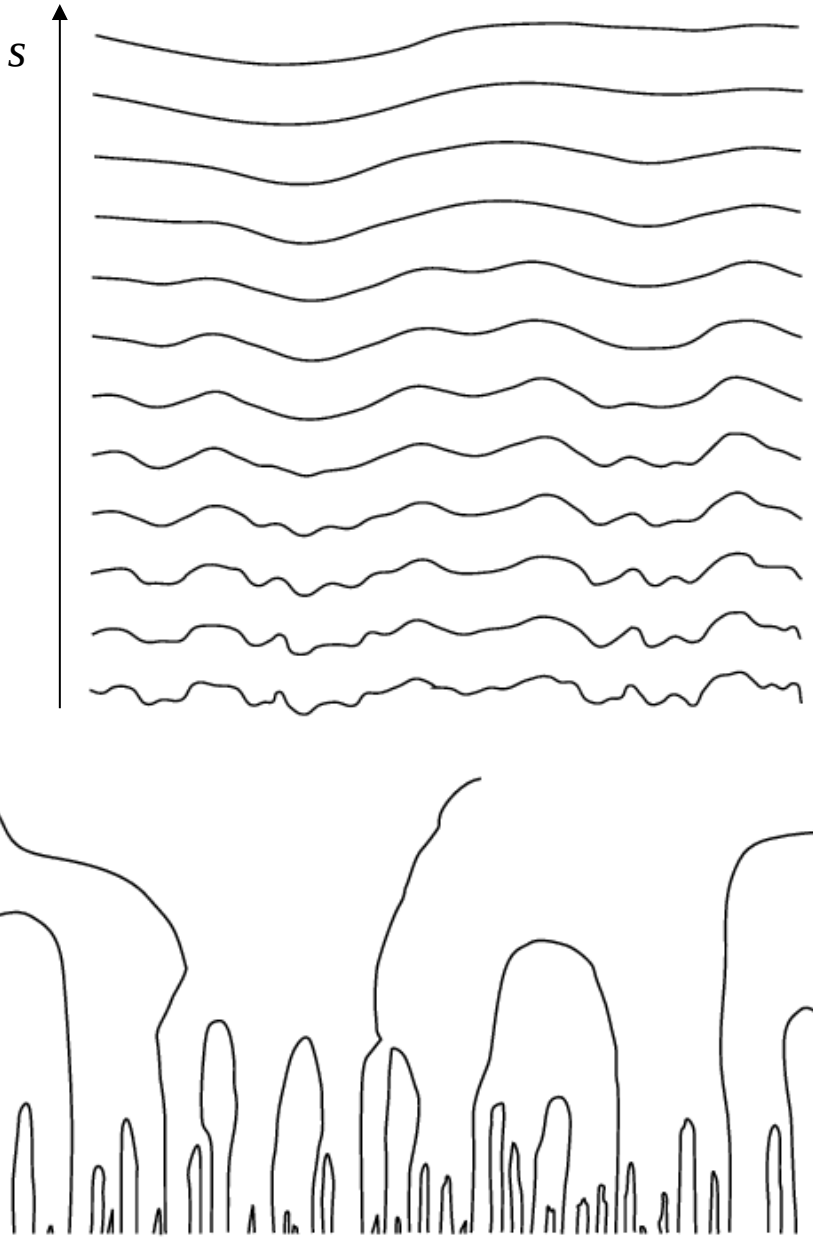
Le *blob* (structure elliptique)

Cette structure peut se caractériser à toutes les échelles et correspond au point de l'espace-échelle (*x,y,s*) où un extremum local disparaît.

Cf principe de causalité des espaces d'échelles.

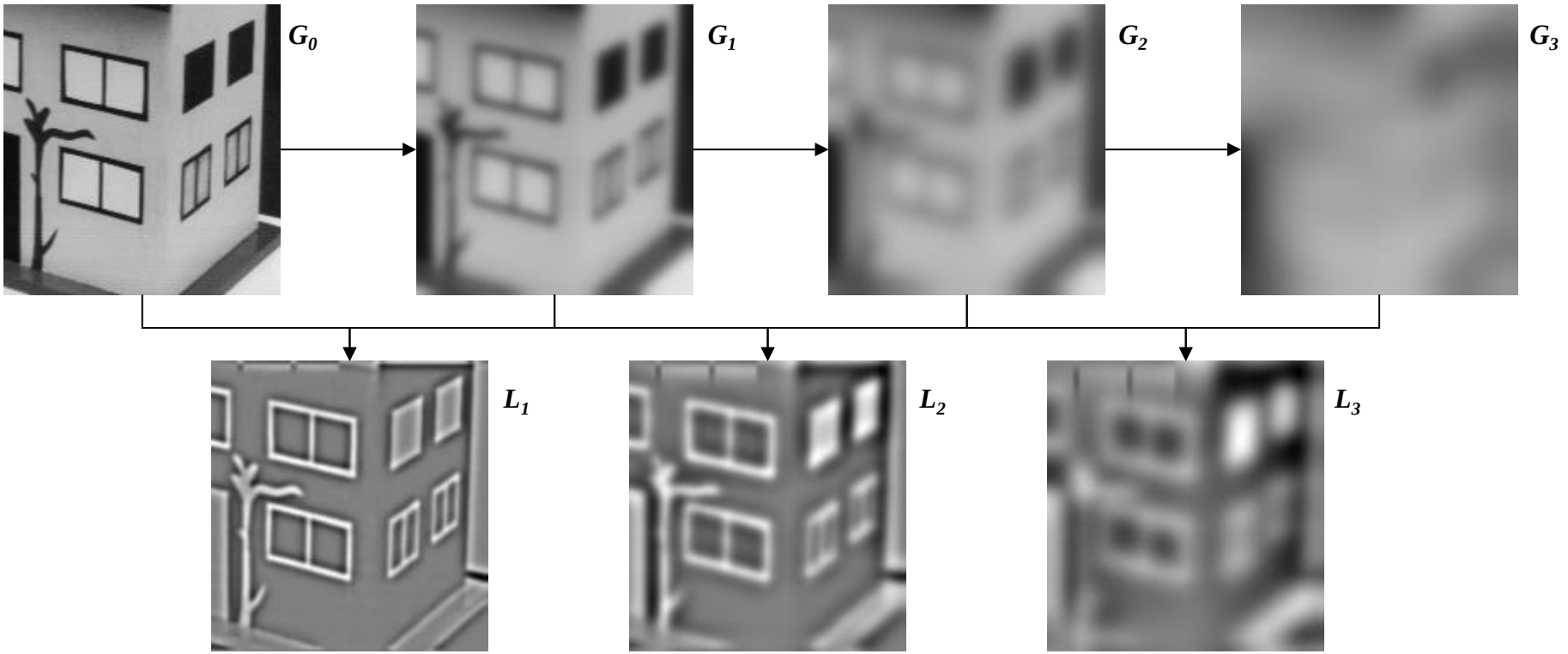
En 1d (ci-contre) : point d'échelle s maximum sur chaque courbe de l'empreinte (fingerprint) de l'espace d'échelles.

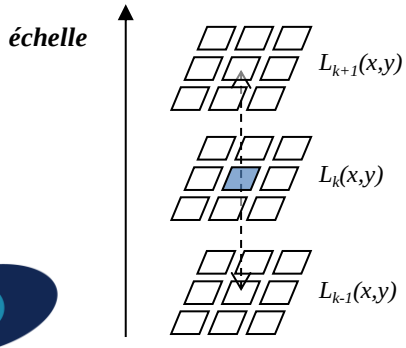
[Witkin 83]



Espace d'échelle gaussien d'un signal 1d (en haut) et position des extrema dans l'espace-échelle (x,s) (en bas).

DETECTEUR SIFT : EXTREMA DANS L'ESPACE D'ECHELLES





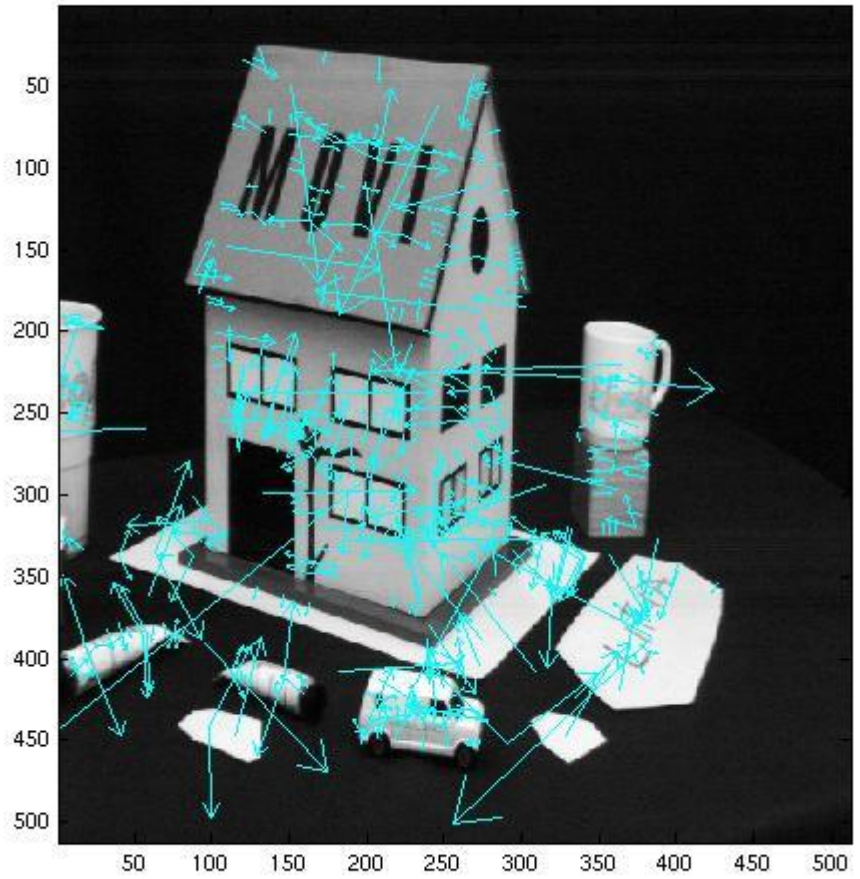
La fonction $G_k(x,y) = G(x,y,k\sigma)$ est l'image convoluée par une gaussienne d'écart-type $k\sigma$. Les fonctions $L_k(x,y)$ correspondent à la différence (ici normalisée) entre 2 gaussiennes adjacentes.

La fonction $L_k(x,y)$ est une représentation laplacienne de l'image, qui correspond à une décomposition fréquentielle localisée : contribution des structures contrastées d'échelle (de « taille ») $k\sigma$ au point (x,y).

Les points sélectionnés par SIFT sont les maxima et les minima locaux de la fonction $L_k(x,y)$, à la fois dans l'échelle courante et dans les échelles adjacentes (voir ci-contre).

[Lowe 04]

POINTS D'INTERET SIFT



Pour chaque extrema de l'espace d'échelle des différences de gaussiennes (point d'intérêt SIFT), on calcule la direction associée par :

$$\theta(x,y) = \arctan\left(\frac{G_y^\sigma(x,y)}{G_x^\sigma(x,y)}\right)$$

avec $G_x^\sigma(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} G(x,y,\sigma) = I(x,y) * \frac{\partial}{\partial x} g_\sigma(x,y)$

(où σ est l'échelle sélectionnée)

Ci-contre, point d'intérêt SIFT : la direction de la flèche représente la direction θ et sa longueur l'échelle σ associée.

[Lowe 04]

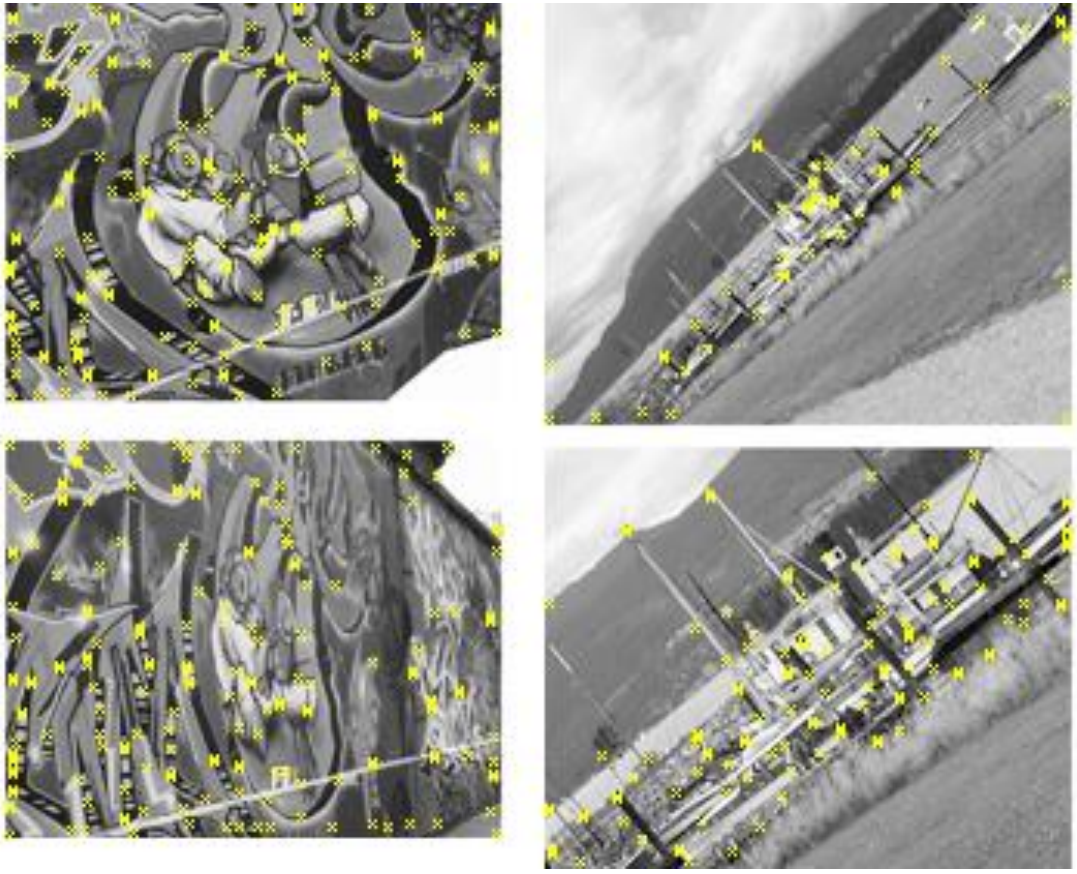
EVALUATION DES DETECTEURS DE POINTS D'INTERET

La plupart des détecteurs de point d'intérêt sont définis indépendamment des descripteurs avec lesquels on les utilise. Il est donc nécessaire de pouvoir les évaluer en eux-mêmes.

Les propriétés recherchées d'un bon détecteur :

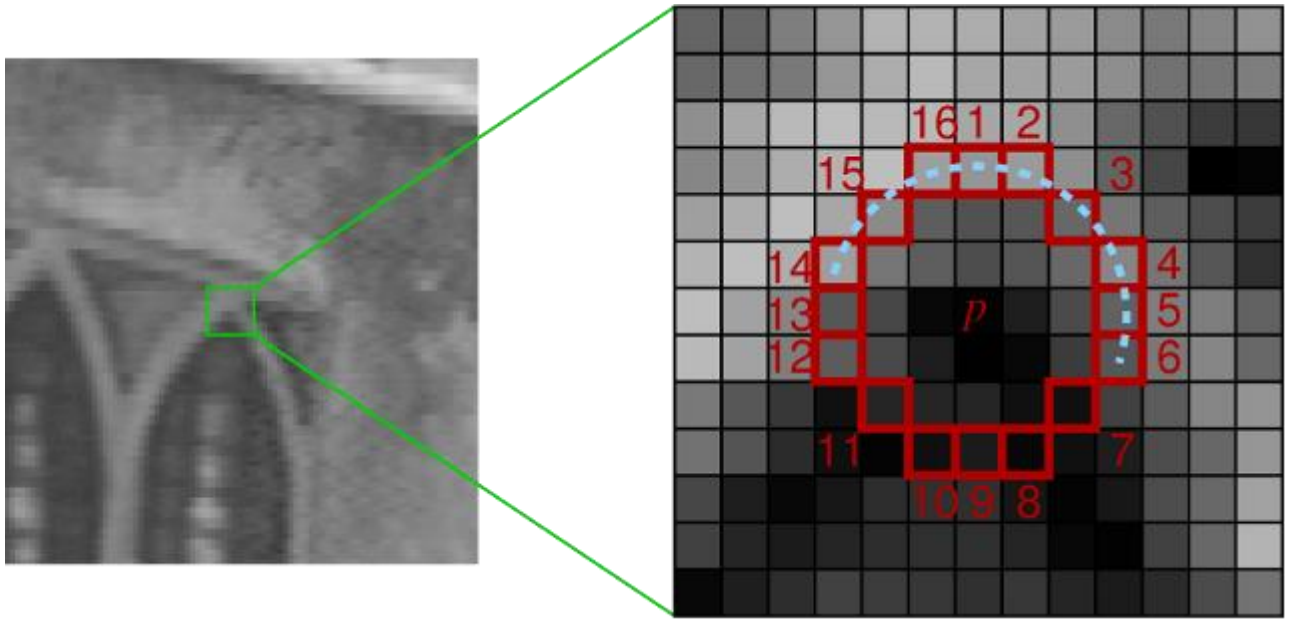
- **Répétabilité** : le point doit apparaître aux mêmes endroits quelque soit la déformation.
- **Représentativité** : les points doivent être le plus nombreux possible.
- **Efficacité** : le détecteur doit être rapide à calculer (cf SURF, FAST)

(Rq : répétabilité et représentativité ne sont pas indépendants !)



[Schmid 2000]

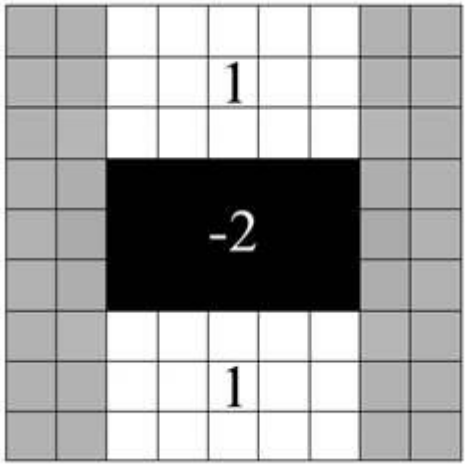
DES DETECTEURS RAPIDES A CALCULER ?

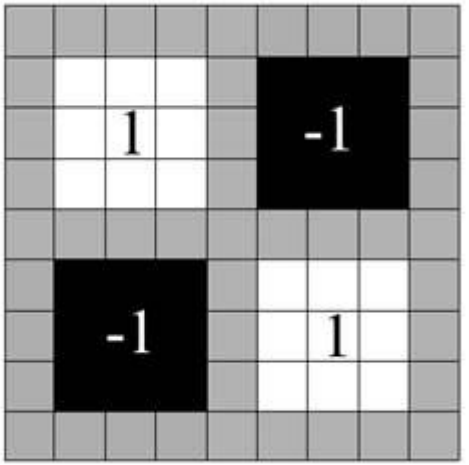


Le détecteur FAST sélectionne les points dont le voisinage circulaire présente des plages contiguës assez longues de points significativement plus clairs (resp. plus sombres).

[Rosten 05]

Le détecteur SURF approxime le calcul des dérivées secondes dans des voisinages rectangulaires à l'aide d'images intégrales, et sélectionne les maxima locaux du déterminant de la matrice hessienne.



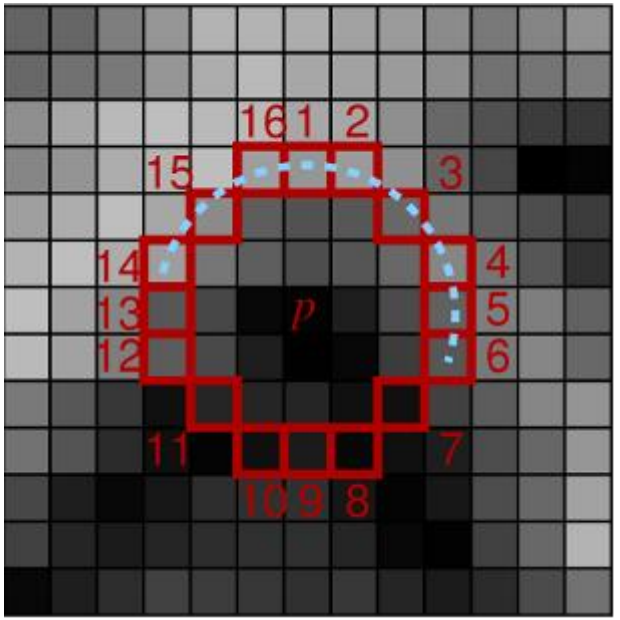


[Bay 06]

DETECTEUR ORB : FAST MULTI-ECHELLES + ORIENTATION

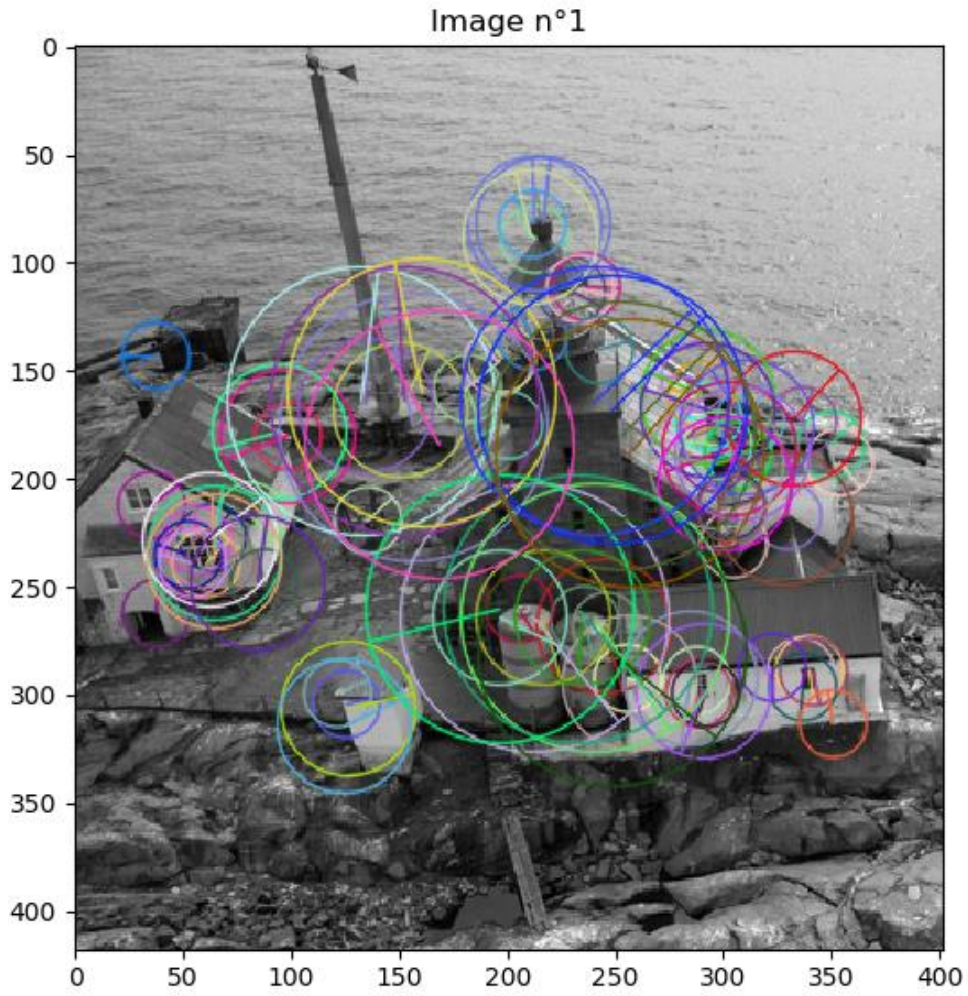
Le détecteur de points-clefs ORB (disponible dans OpenCV) est une extension du détecteur FAST :

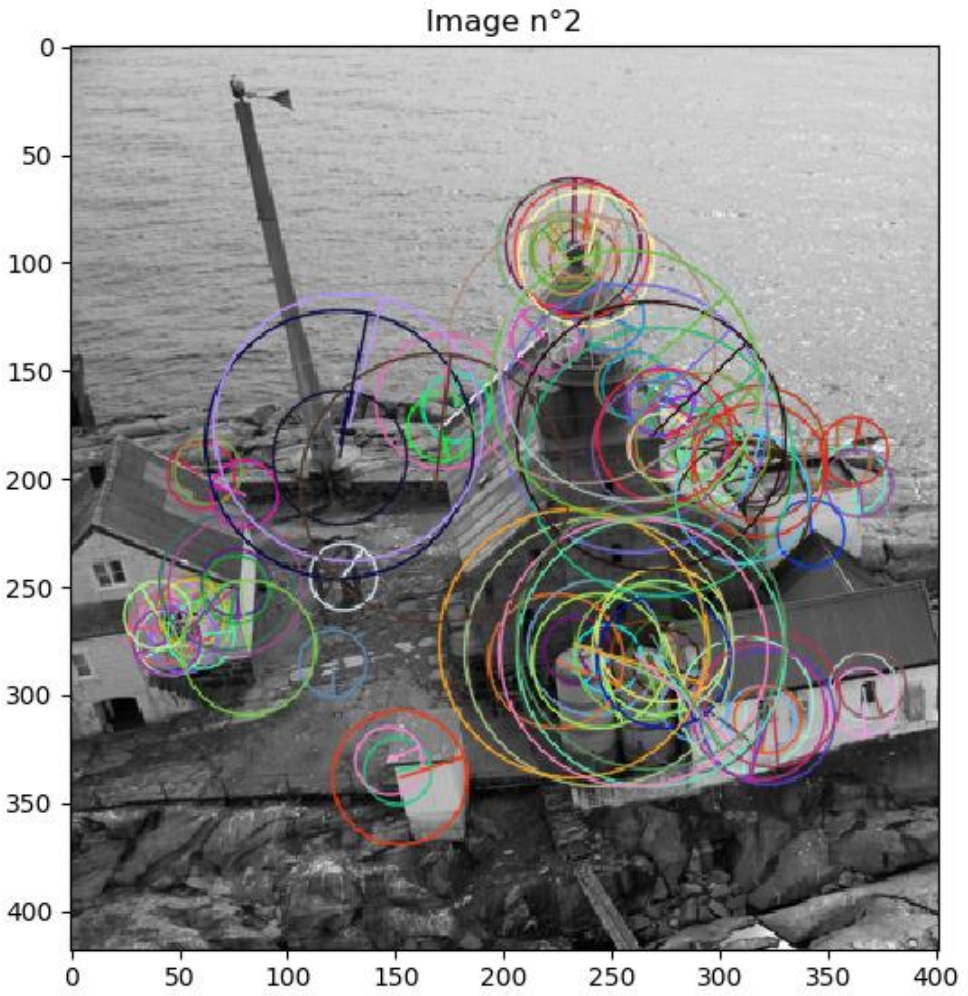
- Le détecteur FAST est calculé à plusieurs résolutions (chaque point possède donc une *échelle caractéristique*).
- Pour chaque point FAST P, le centre de gravité O de l'imagette carrée qui circonscrit le cercle FAST (i.e. la moyenne des positions de pixels pondérée par le niveau de gris) est calculé, et la direction du vecteur $\overrightarrow{PO}$ est utilisée comme *orientation caractéristique* du point.



[Rublee 11]

DETECTEUR ORB : FAST MULTI-ECHELLES + ORIENTATION





[Rublee 11]

DETECTEUR KAZE : DIFFUSION ANISOTROPIQUE + MAXIMA LOCAUX DU DETERMINANT DE LA HESSIENNE

Diffusion isotropique

L'image convoluée avec une gaussienne est solution de l'équation de la chaleur, dans le cas où le facteur de conductance *c* est constant (diffusion isotropique) :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = div(c\nabla I) = c\Delta I$$

gradient temporel — divergence — conductance — gradient spatial — laplacien

Dans cette équation (modélisation EDP), il y a identité entre le paramètre de *temps t* et l'*échelle*.

DETECTEUR KAZE : DIFFUSION ANISOTROPIQUE + MAXIMA LOCAUX DU DETERMINANT DE LA HESSIENNE

Diffusion anisotropique

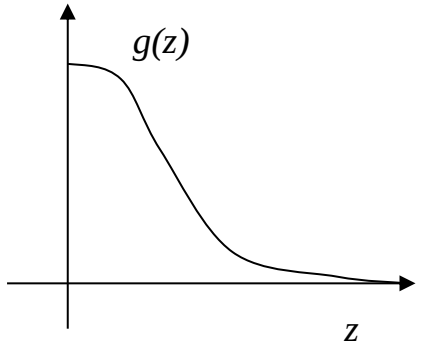
[Perona and Malik 87]

Le principe de la diffusion anisotropique est de rendre la fonction de conductance c variable, et dépendant de l'image :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = div(c\nabla I) = c\Delta I + \nabla c \cdot \nabla I$$

Avec :

$$c(x,y,t) = g\left(\left\|\nabla I(x,y,t)\right\|\right)$$

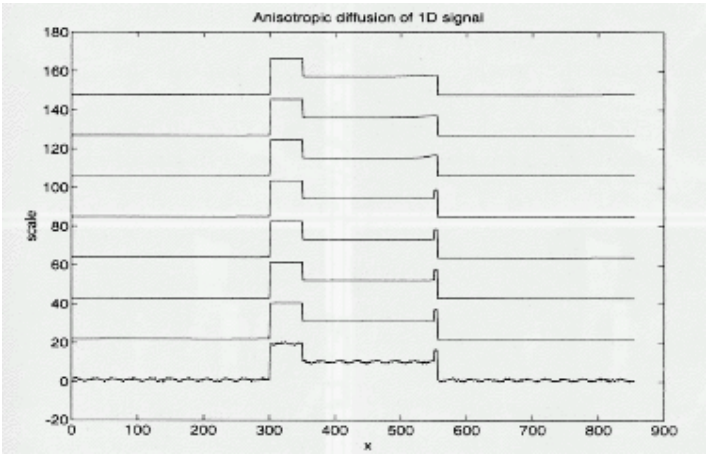


Exemples de fonction c :

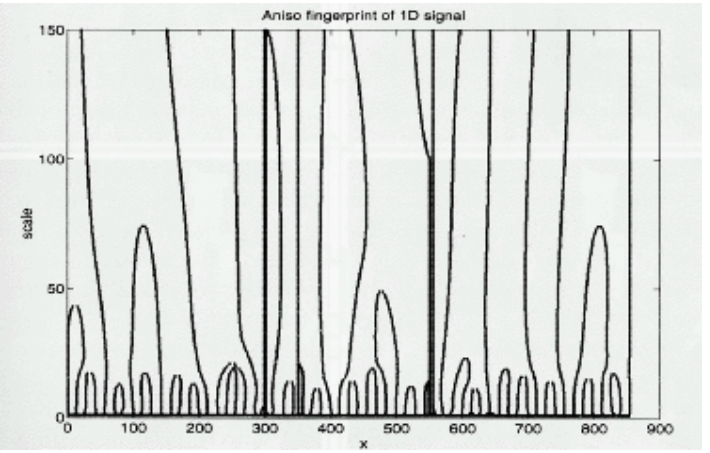
$$c(x,y,t) = e^{-\left(\frac{\|\nabla I\|}{K}\right)^2}$$

$$c(x,y,t) = \frac{1}{1+\left(\frac{\|\nabla I\|}{K}\right)^2}$$

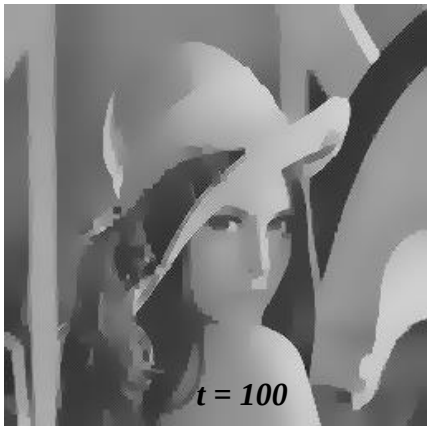
DETECTEUR KAZE : DIFFUSION ANISOTROPIQUE + MAXIMA LOCAUX DU DETERMINANT DE LA HESSIENNE



diffusion anisotrope d'un signal 1d



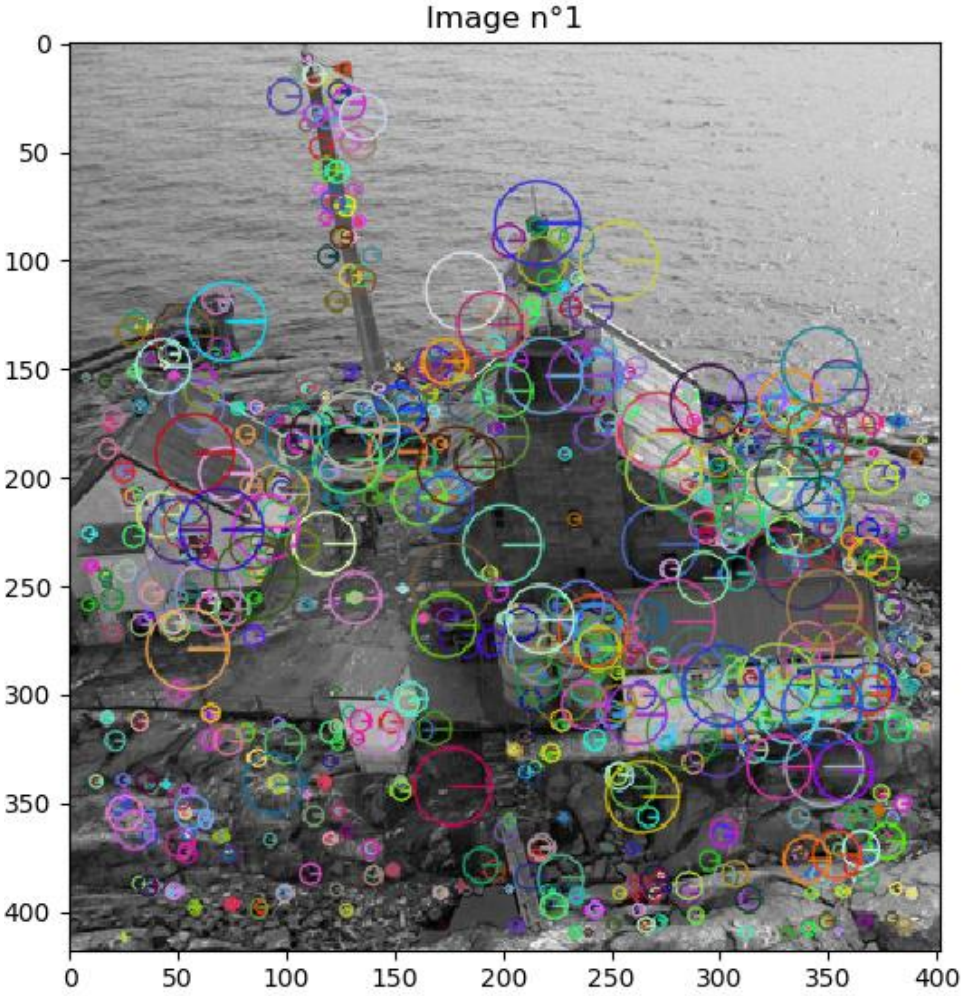
position des extrema dans l'espace d'échelles

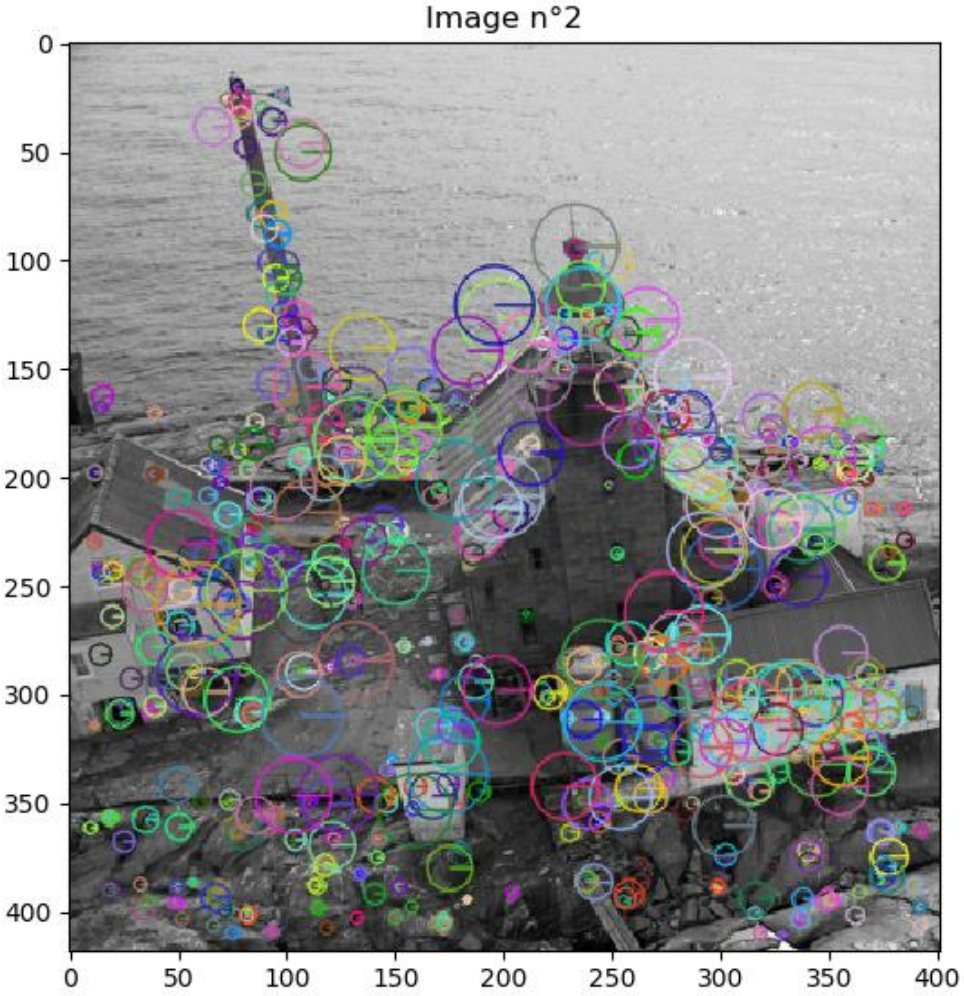


Diffusion anisotrope, schéma de décroissance hyperbolique (Image sur 8 bits, K=15).

[Perona and Malik 87]

DETECTEUR KAZE : DIFFUSION ANISOTROPIQUE + MAXIMA LOCAUX DU DETERMINANT DE LA HESSIENNE





[Alcantarilla 12]

ENSTA

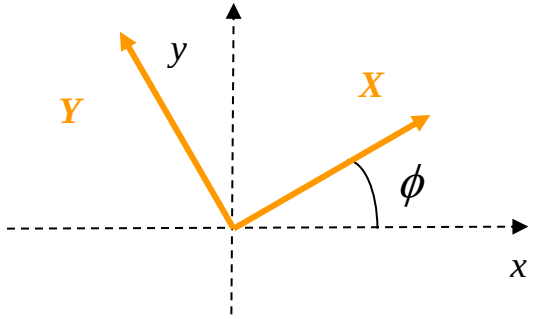
IP PARIS

DESCRIPTEURS : INVARIANTS DIFFERENTIELS

Objectif : *représenter* les points d'intérêt par des *indices* qui soient *invariants* par *rotation* et par *changement d'échelle*.

Le principe utilisé ici est basé sur l'utilisation des dérivées spatiales multi-échelles. L'idée est de *combiner ces dérivées* pour obtenir des grandeurs *invariantes par rotation* :

Par exemple, le laplacien $I_{xx} + I_{yy}$ est invariant par rotation :



$$\begin{cases} x = X\cos\phi + Y\sin\phi \\ y = X\sin\phi - Y\cos\phi \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x\cos\phi + y\sin\phi \\ Y = -x\sin\phi + y\cos\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_X = I_x\cos\phi + I_y\sin\phi \\ I_Y = I_x\sin\phi - I_y\cos\phi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} I_{XX} = I_{xx}\cos^2\phi + 2I_{xy}\cos\phi\sin\phi + I_{yy}\sin^2\phi \\ I_{YY} = I_{xx}\sin^2\phi - 2I_{xy}\cos\phi\sin\phi + I_{yy}\cos^2\phi \end{cases}$$

et donc : $I_{XX} + I_{YY} = I_{xx} + I_{yy}$

DESCRIPTEURS : INVARIANTS DIFFERENTIELS

On peut ainsi construire toute une famille de grandeurs invariantes par rotation : les *invariants différentiels de Hilbert*, par exemple à l'ordre 2, on obtient :

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} I \\ I_x^2 + I_y^2 \\ I_{xx}I_x^2 + 2I_xI_yI_{xy} + I_{yy}I_y^2 \\ I_{xx} + I_{yy} \\ I_{xx}^2 + 2I_{xy}^2 + I_{yy}^2 \end{pmatrix}$$

NB : invariance par rotation du noyau gaussien !

Les vecteurs Ψ sont donc calculés pour tous les points d'intérêt à différentes échelles, et appariés en utilisant une distance (e.g. distance euclidienne).

[Schmid et Mohr 97]

DESCRIPTEURS SIFT : HISTOGRAMMES LOCAUX D'ORIENTATION

Les descripteurs associés aux points d'intérêt SIFT sont des histogrammes des orientations locales autour du point d'intérêt.

• On divise l'espace autour de chaque point d'intérêt (x,y) en N^2 carrés 4x4.

• On calcule le gradient $(G_x(a,b,\sigma), G_y(a,b,\sigma))$ pour les 4x4xN^2 points (a,b).

• Pour chaque carré 4x4, on calcule un histogramme des orientations quantifiées en 8 directions, en pondérant par : (1) le module du gradient (2) l'inverse de la distance au point d'intérêt (x,y).

• Pour être invariant en rotation : l'orientation locale du point d'intérêt $\theta(x,y)$ est utilisée comme *origine* (orientation nulle) des histogrammes.

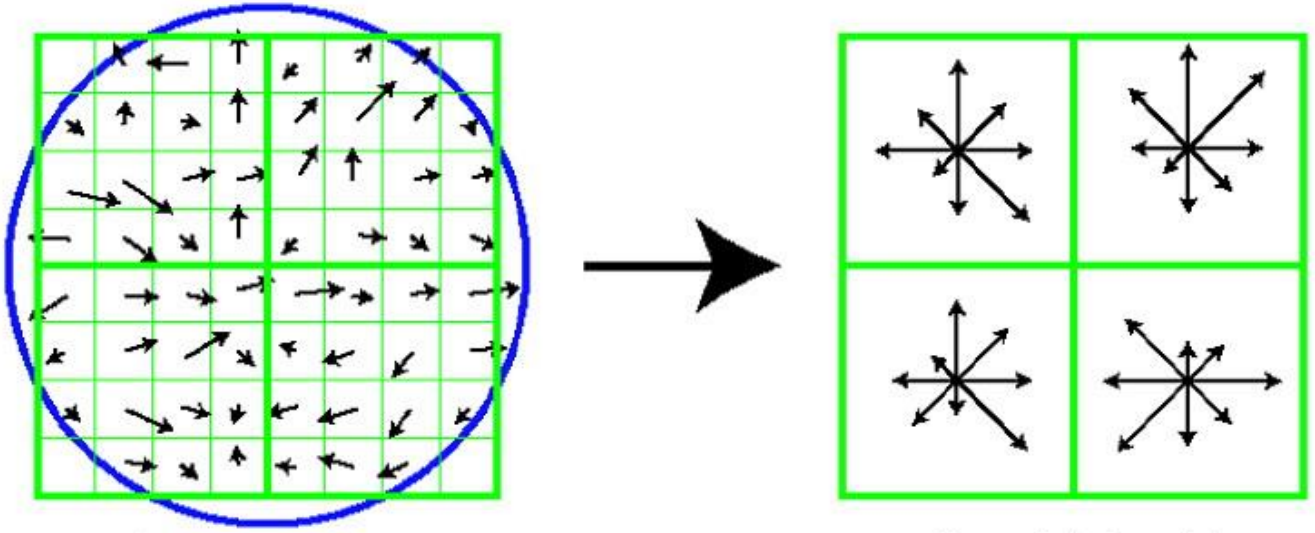


Image gradients

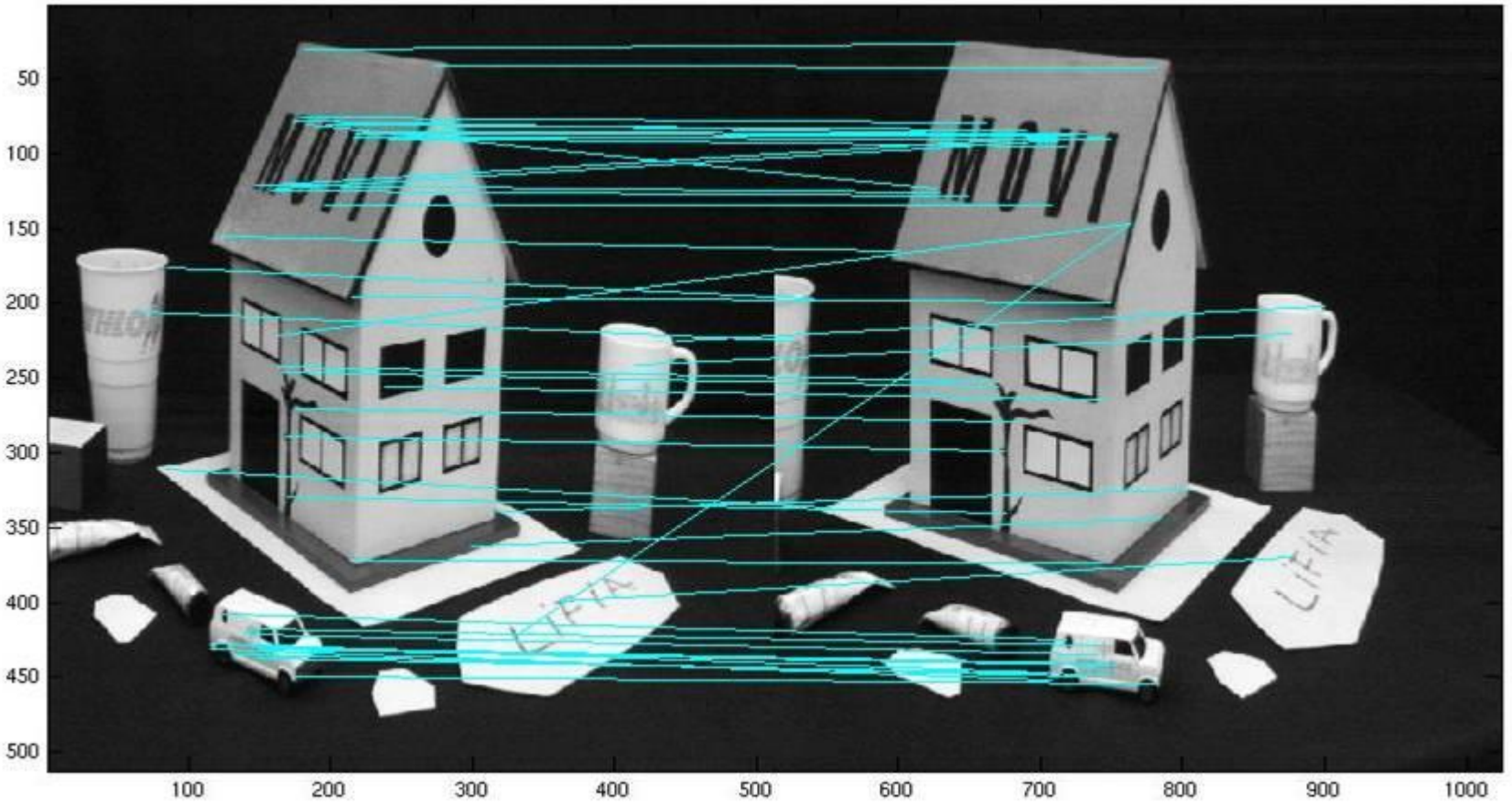
ex : $N = 2$

Keypoint descriptor

Les descripteurs formés sont donc des vecteurs de taille 8xN^2, qui seront appariés en utilisant une distance (e.g. distance euclidienne)

[Lowe 04]

APPARIEMENT DES POINTS SIFT



Résultat d'appariement par SIFT entre l'image (2) à gauche, 510 points détectés, et l'image (1) à droite, 589 points détectés. 51 paires de points ont été retenues, dont l'appariement est considéré comme fiable (rapport entre la distance au plus proche voisin et la distance au 2e plus proche voisin inférieur à un seuil T).

[Lowe 04]

APPARIEMENT DE PRIMITIVES : METRIQUES

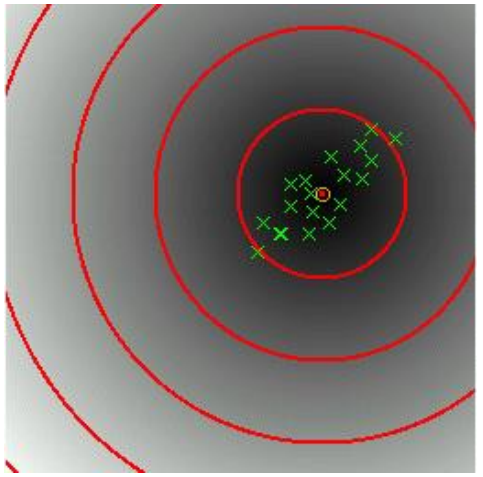
L'appariement entre primitives repose souvent sur la comparaison de descripteurs locaux deux à deux.

Si le couple détecteur / descripteur possède l'invariance voulue, la comparaison peut être réalisée par une métrique simple :

La distance euclidienne :

$$\delta_e(x, x')^2 = (x - x')^T (x - x')$$

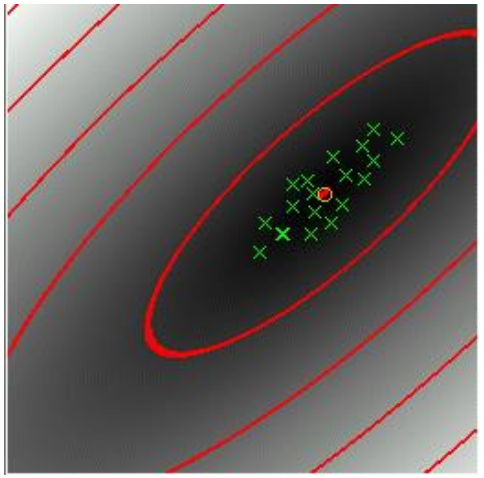
Cette distance ne tient compte ni des différences d'amplitude ni des éventuelles corrélations entre les différentes composantes des descripteurs.



La distance de Mahalanobis :

$$\delta_m(x, x')^2 = (x - x')^T C^{-1} (x - x')$$

Avec $C = \left(cov(x_i, x_j)\right)_{i,j}$ matrice de covariance de la base des descripteurs.



APPARIEMENT DE PRIMITIVES : METRIQUES

Dans le cas de grande base de descripteurs (indexation), la matrice de covariance est calculée et mise à jour off-line. Si l'on diagonalise C^{-1}, on se ramène à un calcul de distance euclidienne sur des descripteurs normalisés :

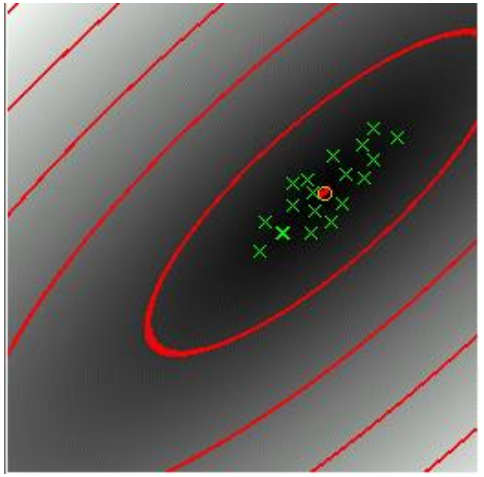
$$C^{-1} = P^T D P$$

$$\delta_m(x, x') = \sqrt{(x - x')^T C^{-1} (x - x')} = \underbrace{\left\| \sqrt{D} P x - \sqrt{D} P x' \right\|}$$

distance ellipsoïdale

A chaque mise à jour de la base d'index, on doit donc :

- Mettre à jour la matrice de covariance : C
- Calculer et diagonaliser : C^{-1}
- Normaliser tous les vecteurs : $x \longrightarrow \sqrt{D} P x$



BASE DE DESCRIPTEURS ET INDEXATION

Dans le cas d'une très grosse base de descripteurs (indices), il est nécessaire de limiter la recherche à un certain voisinage du descripteur (index) inconnu. Ce problème est lié au stockage des vecteurs descripteurs dans la base d'index.

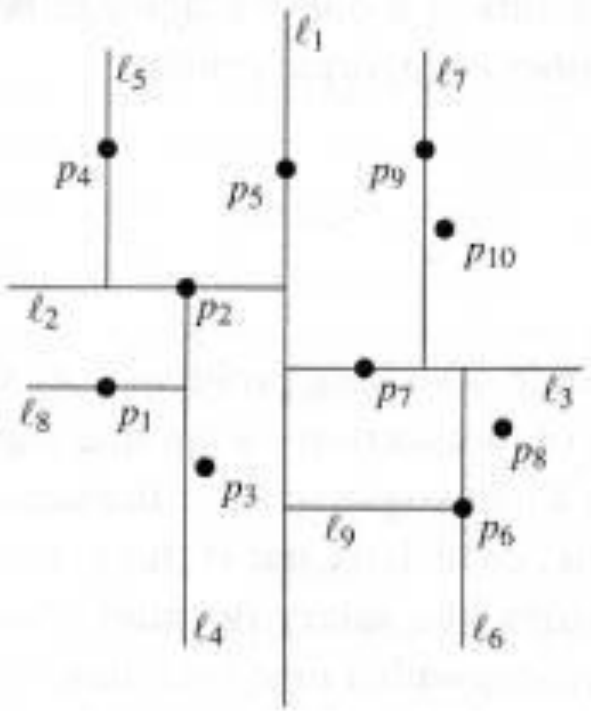
Distance de Minkowski ($d_M^k(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^k\right)^{1/k}$)

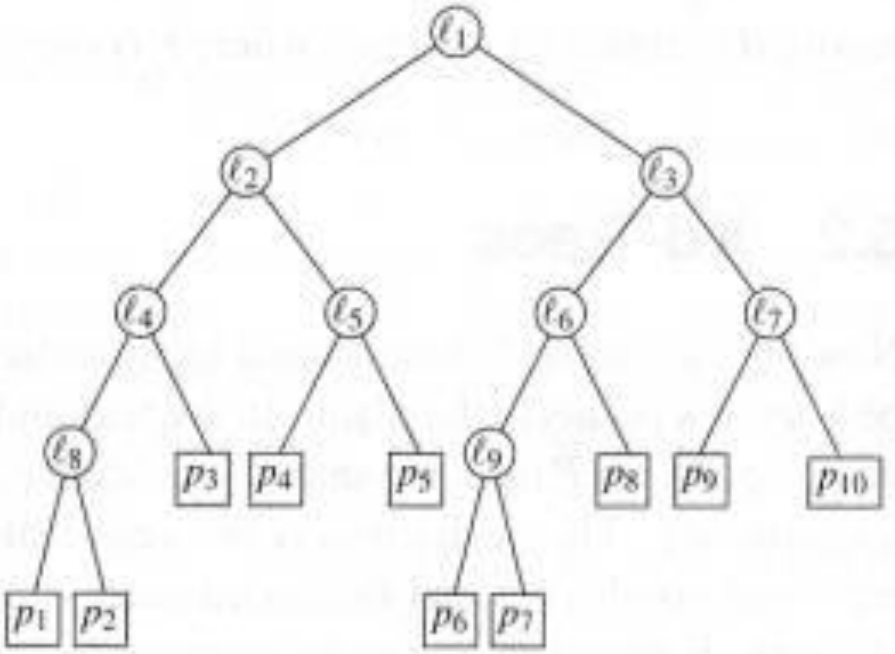
↓

Découpage de la base de descripteurs en hypercubes

↕

Représentation de la base sous forme de Kd-tree

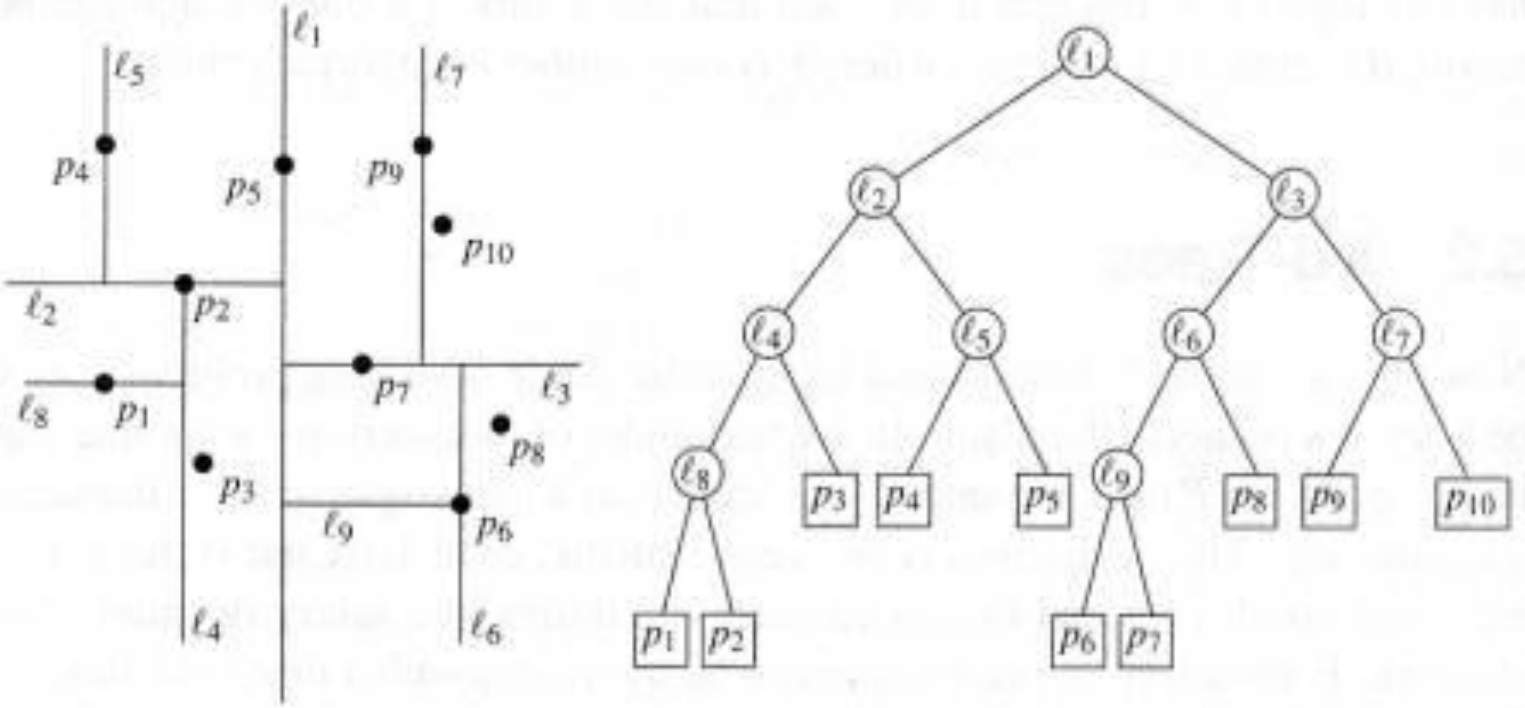




INDEXATION D'IMAGE ET CONSTRUCTION DU KD-TREE

La construction du Kd-tree se fait récursivement en partitionnant un ensemble de vecteurs n-dimensionnels (les descripteurs) en deux sous-ensembles (formant donc un arbre binaire), jusqu'à ce que la cardinalité du sous-ensemble « feuille » (le ''bucket'') soit inferieure à un seuil fixé.

Classiquement, chaque nœud du Kd-tree correspond à une partition par un hyperplan Π d'équation $x_i = t$, qui est donc orthogonal à l'un des axes de la base canonique, et sépare les vecteurs en 2 sous-ensembles, selon le prédicat $x_i < t$, où x_i est la ième composante du vecteur X, et t est un seuil scalaire (la valeur dite « pivot »).

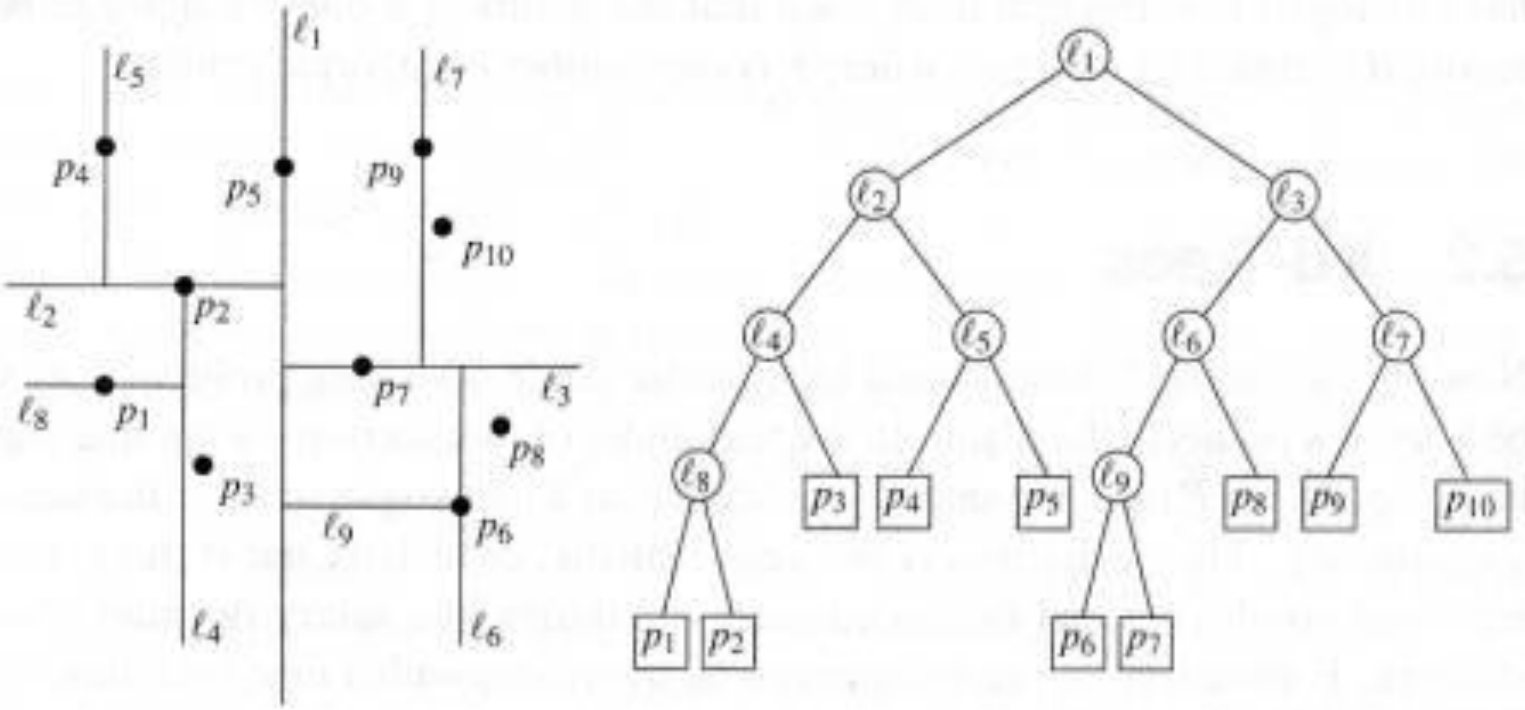


INDEXATION D'IMAGE ET CONSTRUCTION DU KD-TREE

Il existe plusieurs variantes à la construction des Kd-trees, selon la manière de choisir les hyperplans séparateurs Π à chaque étape :

- **Octrees** : On considère chaque composante à tour de rôle, et la valeur centrale de l'intervalle est choisie comme valeur pivot, de telle sorte que tous les buckets *ont la même taille* (≠ cardinalité !) dans l'espace des descripteurs.

- **Median-trees** : (cf Figure) à chaque étape on sélectionne la composante qui présente la variance maximale dans le sous-ensemble courant, et la valeur médiane est choisie comme pivot, de telle sorte que les median trees sont toujours *équilibrés*.



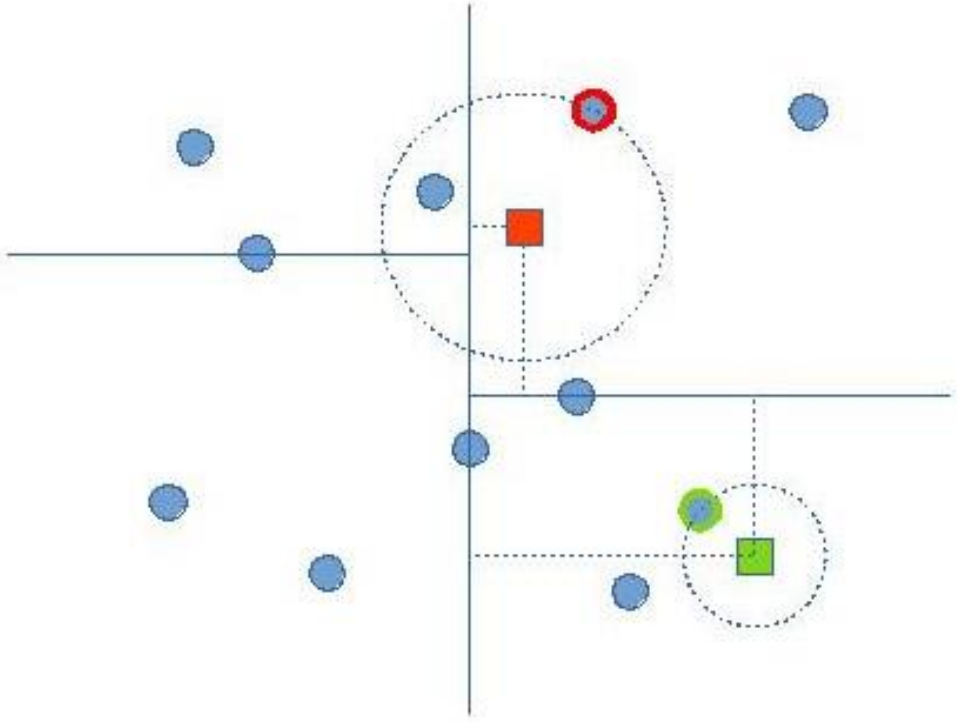
INDEXATION D'IMAGE ET REQUÊTE DANS UN KDTREE

Pour rechercher le plus proche voisin d'un vecteur requête $Y = (y_1, \ldots y_n)$, des nœuds successifs du Kd-tree sont examinés selon un parcours en profondeur, qui dépend des valeurs de y_i sélectionnées, comparées aux valeurs des pivots t.

A chaque nœud traversé, *la distance entre Y et l'hyperplan associé* Π: $x_i = t$ est enregistrée : c'est tout simplement $| y_i - t |$.

Au terme du parcours en profondeur, c'est-à-dire lorsqu'on parvient dans un bucket, on y recherche – de façon exhaustive – le plus proche voisin de Y.

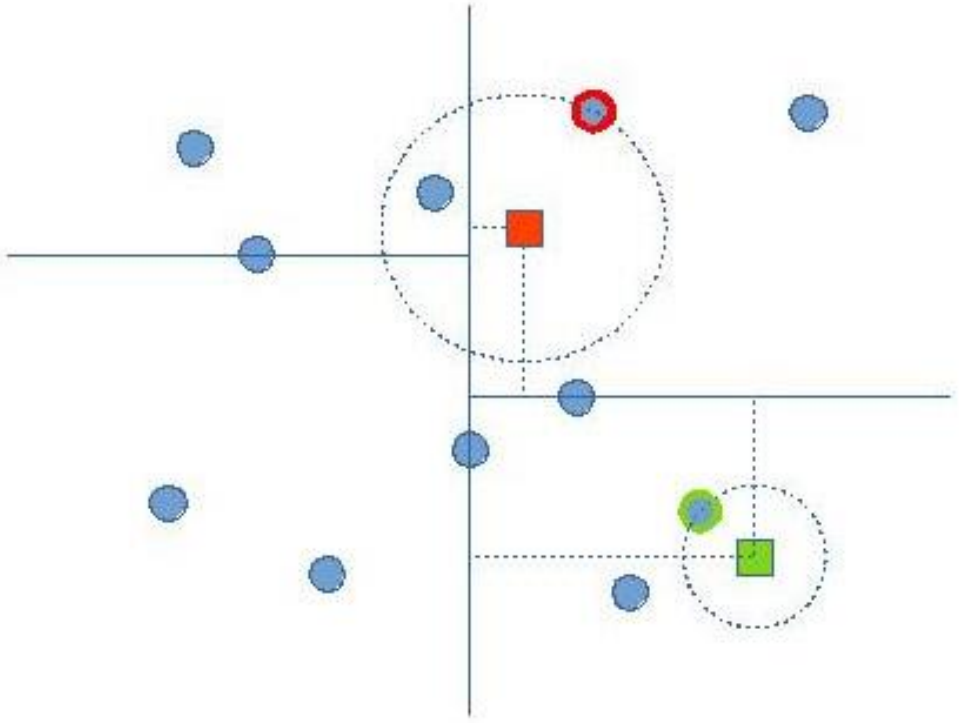
2 cas peuvent alors se présenter :



INDEXATION D'IMAGE ET REQUÊTE DANS UN KDTREE

2 cas peuvent alors se présenter :

- Dans les cas favorables (ex : *Y* est le carré vert), la distance au plus proche voisin est inférieure à la distance minimale de *Y* aux hyperplans rencontrés. La recherche est alors achevée.
- Dans les cas défavorables (ex : *Y* est le carré rouge), le plus proche voisin peut être dans un autre bucket, il faut alors remonter d'un nœud, calculer les distances aux éléments de l'autre bucket fils (le bucket frère !), et éventuellement remonter encore récursivement aux nœuds supérieurs, tant que la distance au plus proche voisin demeure supérieure à la distance minimale de *Y* aux hyperplans rencontrés…

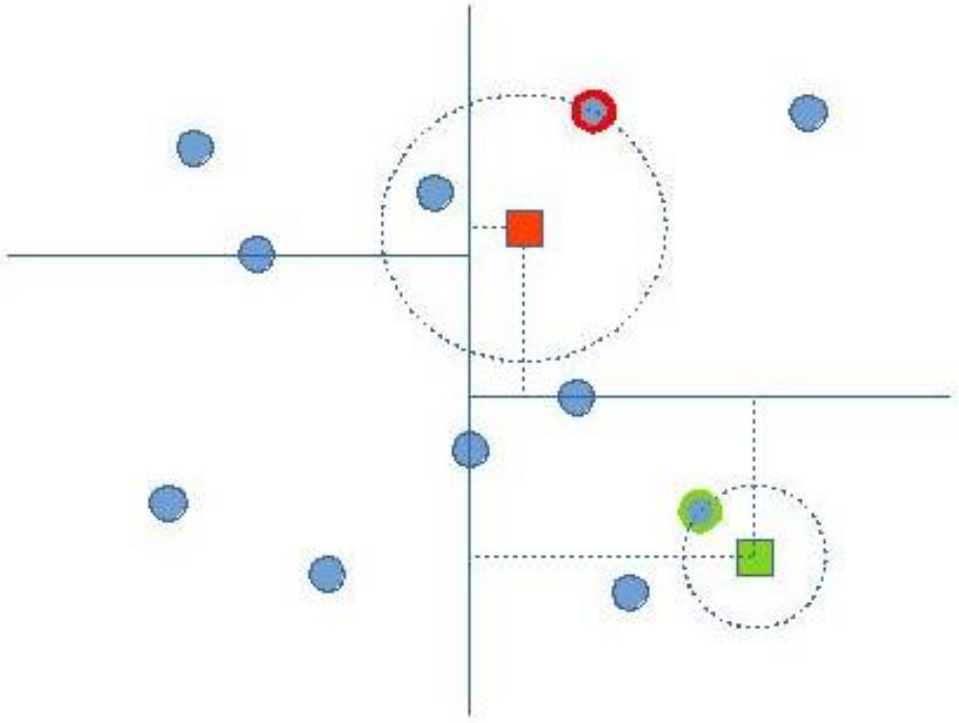


INDEXATION D'IMAGE ET REQUÊTE DANS UN KDTREE

Dans le pire cas, on peut devoir remonter jusqu'à la racine du Kd-tree et donc examiner tous les vecteurs de la base des descripteurs !

On peut cependant montrer que de tels cas sont marginaux, et que la complexité moyenne d'une requête est en O(*n*.Log*N*), avec *n* la dimension de l'espace des descripteurs et *N* le nombre de vecteurs.

Il existe des méthodes optimisée de recherche approchées comme ANN, qui limitent le nombre de récursions à un nombre de nœuds fixé. [***Arya and Mount 1993***]



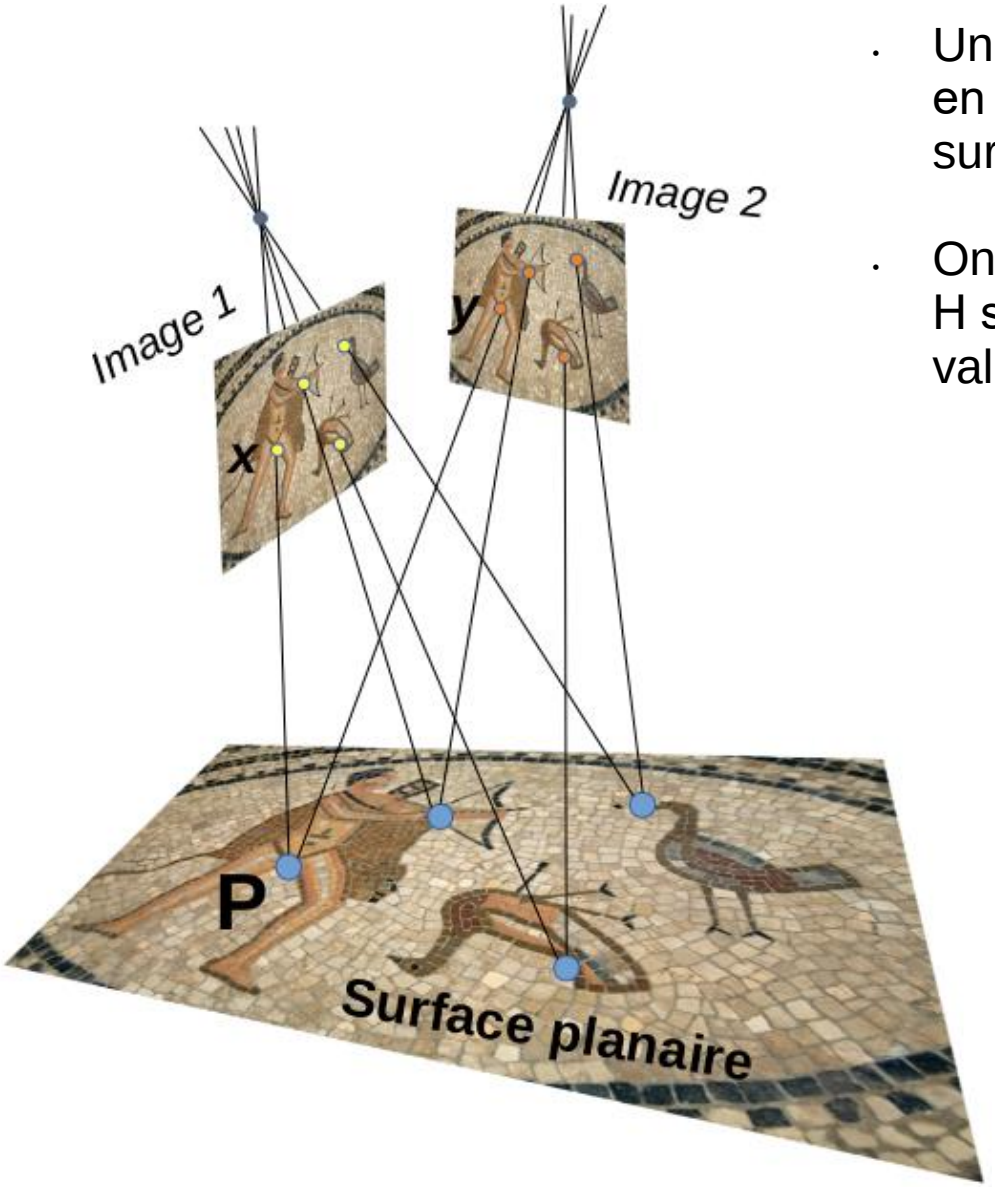
DU LOCAL AU GLOBAL : CONSENSUS DES DESCRIPTEURS LOCAUX

Souvent l'utilisation des primitives visuelles aboutit à une décision prise à un niveau global sur l'image ou l'ensemble de points : étiquette de classe (reconnaissance, catégorisation), paramètres de déplacement (odométrie visuelle).

Comment réaliser cette décision collective à partir de l'ensemble des descripteurs ?

- **Principe de vote** : chaque descripteur local est classifié et la classe globale est attribuée selon un critère majoritaire (ex : reconnaissance de pièces, catégories d'images…)
- **Sacs de mots visuels (Visual bag-of-features)** : un modèle de l'objet / environnement / catégorie est construit à partir de la distributions des valeurs de caractéristiques locales (*voir cours modélisation d'objets*).
- **Sélection par cohérence** : un sous-ensemble des appariements locaux est (itérativement) sélectionné pour établir une décision cohérente vis-à-vis d'un critère global (ex : odométrie visuelle…)

UNE SELECTION PAR COHERENCE : ESTIMATION D'HOMOGRAPHIE



- Une homographie est la transformation qui met en relation deux vues différentes d'une même surface planaire.
- On a y = *H*x en coordonnées homogènes 2d, où H s'écrit sous la forme d'une matrice 3x3, dont 1 valeur peut être fixée arbitrairement :

$$\lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ H_4 & H_5 & H_6 \\ H_7 & H_8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Chaque paire (x,y) de points en correspondance fournit 2 équations, donc au minimum 4 paires sont nécessaires.
- Mais en présence d'erreurs, il faut beaucoup plus de paires de points !

CONSENSUS SUR UN MODELE GEOMETRIQUE : RANSAC

RANSAC, pour RANdom Sample Consensus est un algorithme stochastique itératif d'estimation de paramètres. Il doit être associé à une méthode d'optimisation qui calcule les meilleurs paramètres à partir d'un nombre fixe d'observations.

RANSAC(A, K_{max},N,T_d,$T_{INLIERS}$)

Entrées : $A=\{(X_i , Y_i)\}_i$ l'ensemble de toutes les paires, K_{max} le nombre max d'itérations, N le nombre de paires pour estimer la transformation, T_d le seuil en distance, $T_{INLIERS}$ le nombre minimum d'inliers

$e_{MIN} = \infty$
Pour k = 1 à K_{max}
    Choisir au hasard N paires parmi A pour former $B \subset A$
    Calculer la meilleure transformation P associée à B
    $n_{INLIERS} = 0$
    Pour chaque paire j telle que $(X_j , Y_j) \notin B$
        si $d(Y_j, PX_j) < T_d$
            $n_{INLIERS} \leftarrow n_{INLIERS} + 1$
            $B \leftarrow B \cup \{(X_j , Y_j)\}$
    si $n_{INLIERS} > T_{INLIERS}$
        e ← Erreur_globale(P,B)
        si $e < e_{MIN}$
            $P_{OPT} = P$
            $e_{MIN} = e$

Sortie : P_{OPT} la meilleure transformation (ex : translation, homographie, transf. affine…)

APPARIEMENT GLOBAL : TECHNIQUES FREQUENTIELLES

Les techniques fréquentielles d'estimation du mouvement entre deux images sont fondées sur l'équivalence translation/déphasage de la transformée de Fourier :

Rappel : l'expression d'une image dans le domaine fréquentiel consiste à décomposer la fonction bidimensionnelle en sommes de sinusoïdes complexes :

$$I(x,y) = \frac{1}{wh}\sum_{u=0}^{w-1}\sum_{v=0}^{h-1} F(u,v)e^{2i\pi(ux/w+vy/h)}$$

Transformée de Fourier discrète inverse

Les coefficients des différentes sinusoïdes sont calculés par la transformée de Fourier :

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{w-1}\sum_{y=0}^{h-1} I(x,y)e^{-2i\pi(ux/w+vy/h)}$$

Transformée de Fourier discrète directe

Notation (module,phase) : $F(u,v) = \|F(u,v)\|e^{i\varphi_F(u,v)}$

La propriété de translation/déphasage dit que si F est la transformée de Fourier de I :

Alors la TF de I translatée de $(-\delta x,-\delta y)$, est G, avec :

$$I(x,y) \xrightarrow{\text{TF}} F(u,v)$$

$$I(x+\delta x, y+\delta y) \xrightarrow{\text{TF}} G(u,v) = F(u,v)e^{2i\pi(u\delta x/w+v\delta y/h)}$$

Soit : $\|G(u,v)\| = \|F(u,v)\|$ et : $\varphi_G(u,v) = \varphi_F(u,v) + 2\pi(u\delta x/w + v\delta y/h)$

Le déphasage entre F et G vaut donc : $\Delta\phi(u,v) = 2\pi(u\delta x/w + v\delta y/h)$

Il suffit donc en théorie de considérer ce déphasage pour 2 couples (u,v) pour calculer $(\delta x,\delta y)$, mais cette technique est sensible au bruit et aux changement d'illumination qui induisent des variations dans les basses fréquences.

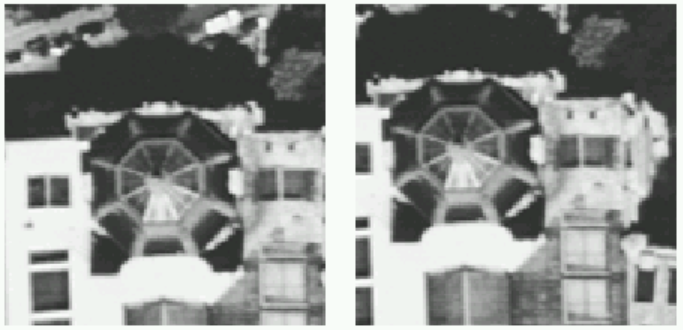
On utilise plutôt la technique de corrélation de phase.

CORRELATION DE PHASE

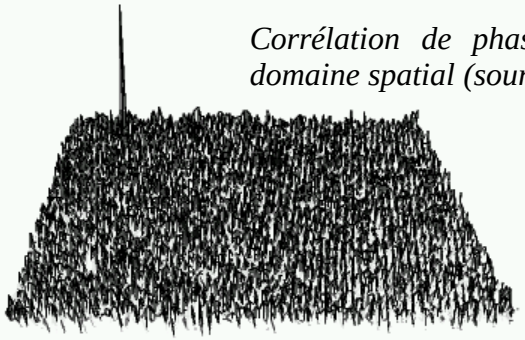
La technique de corrélation de phase exploite une conséquence directe de la propriété de translation/déphasage. Si F est la TF de I et G la TF de I translatée de $(-\delta x,-\delta y)$, alors le déphasage entre F et G est égal à leur spectre de puissance croisé normalisé (SPCN), i.e. :

$$\frac{F^*(u,v)G(u,v)}{\left\|F^*(u,v)G(u,v)\right\|} = e^{2i\pi(u\delta x/w+v\delta y/h)}$$

La TF inverse du SPCN est donc égale à la fonction de Dirac du vecteur de translation : $\boldsymbol{\delta}_{(\delta x,\delta y)}(x,y)$



(a) (b)



(c)

Corrélation de phase dans le domaine spatial (source INRIA)

La technique de corrélation de phase consiste donc à :

1. Calculer les TF de $I(x,y,t)$ et $I(x,y,t+1)$, soit F_1 et F_2
2. Calculer χ le SPCN de $F1$ et F_2
3. Calculer D la TF inverse de χ
4. Rechercher le maximum de D

Avantages et inconvénients

+ Robuste car toutes les fréquences contribuent au calcul

+ Relativement rapide grâce au calcul de la FFT

- En pratique limité à un déplacement global sur toute l'image

INVARIANTS DE FOURIER-MELLIN

L'utilisation de la transformée de *Fourier-Mellin* permet de calculer les paramètres d'une similitude (*rotation et homothétie*) comme un *vecteur de translation* de manière analogue au cas précédent, grâce à une représentation log-polaire de l'espace des fréquences $(u,v) \rightarrow (\theta, \log \rho)$:

Soit g l'image transformée de f par une rotation d'angle α, une homothétie de rapport σ, et une translation de vecteur (x_0,y_0) :

$$g(x,y) = f\left(\sigma(\cos\alpha x + \sin\alpha y) - x_0, \sigma(-\sin\alpha x + \cos\alpha y) - y_0\right)$$

Les amplitudes des transformées de Fourier de f et g sont liées par la relation suivante :

$$\|G(u,v)\| = \frac{1}{\sigma^2}\left\|F\left(\tfrac{1}{\sigma}(u\cos\alpha + v\sin\alpha), \tfrac{1}{\sigma}(-u\sin\alpha + v\cos\alpha)\right)\right\|$$

donc l'amplitude :
- ne dépend pas de la translation (x_0,y_0).
- subit une rotation d'angle α.
- subit une modification d'échelle d'un facteur $1/\sigma$.

En passant les fréquences en coordonnées polaires :

$$F_p(\theta,\rho) = \|F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\|; 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho < \infty$$
$$G_p(\theta,\rho) = \|G(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\|; 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho < \infty$$

on obtient :

$$G_p(\theta,\rho) = \frac{1}{\sigma^2} F_p\left(\theta - \alpha, \frac{\rho}{\sigma}\right)$$

Enfin, en passant la coordonnée radiale au logarithme :

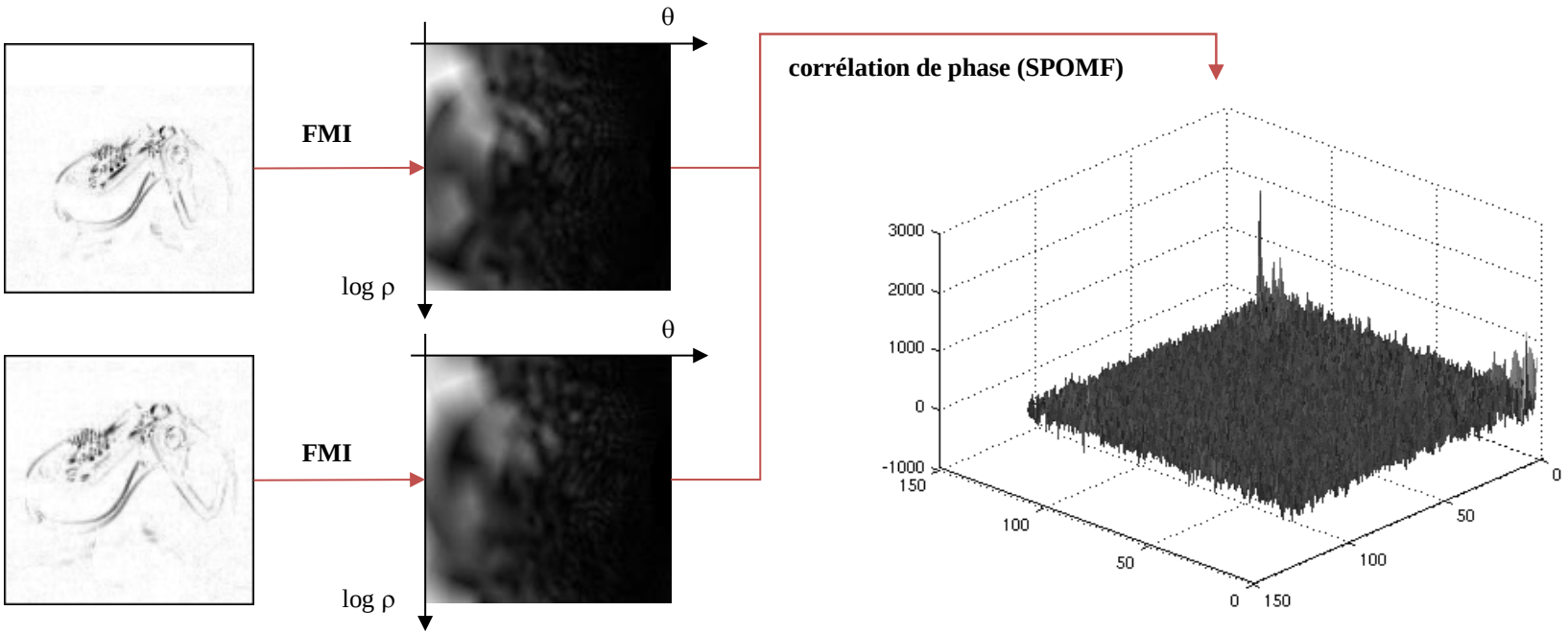
$$r = \log\rho \qquad F_{lp}(\theta,r) = F_p(\theta,\rho)$$
$$s = \log\sigma \qquad G_{lp}(\theta,r) = G_p(\theta,\rho)$$

on obtient :

$$\boxed{G_{lp}(\theta,r) = \frac{1}{\sigma^2} F_{lp}(\theta - \alpha, r - s)}$$

Donc une similitude dans l'espace image se traduit par une *translation* dans l'espace des *fréquences log-polaires*.

INVARIANTS DE FOURIER-MELLIN : FMI-SPOMF



Un exemple d'utilisation de la transformée de Fourier-Mellin : calcul de la position de la tête des Robots Aibo dans l'image par corrélation de phase des invariants de Fourier-Mellin. (FMI-SPOMF : Fourier-Mellin Invariant Symmetric Phase Only Matched Filtering) : ***J.C. Baillie et M. Nottale*** 2004.

L'information de phase de l'image originale est perdue dans la FMI. Le FMI-SPOMF revient à chercher la meilleure (rotation, homothétie) qui mette en correspondance 2 spectres d'amplitude. *On ne retrouve donc pas les paramètres de translation entre les deux images, et de plus l'information de forme portée par la phase n'existe plus.*

Pour compléter cette transformation, on peut appliquer une corrélation de phase classique sur le couple d'image de départ, après avoir appliqué sur l'une des images la transformation (rotation, homothétie) fournie par le FMI-SPOMF.

Notons enfin, que comme pour la corrélation de phase, cette méthode est utilisée en pratique pour estimer des transformations *globales*, car elle utilise la contribution de tout le spectre (ou au moins une large partie), ce qui implique une étendue spatiale importante des pixels utilisés pour l'estimation de chaque transformation.

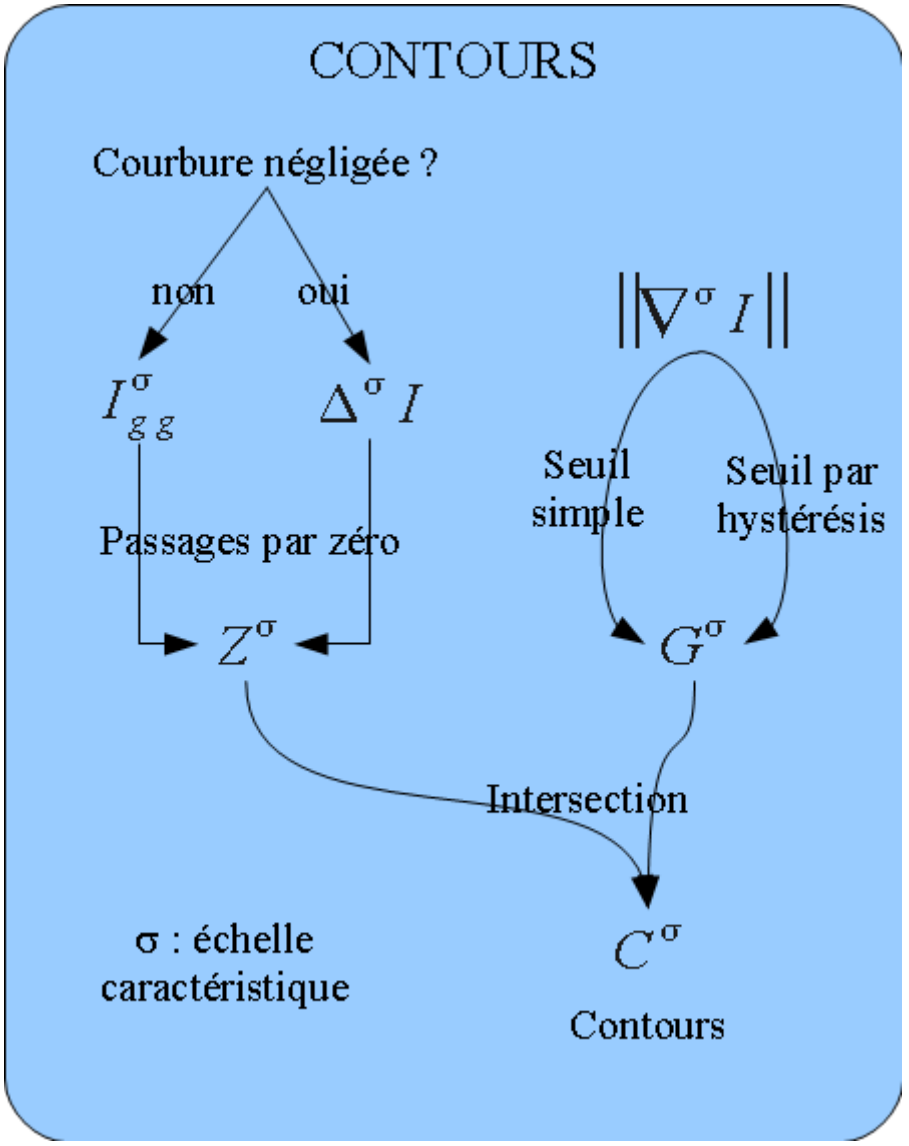
ENSTA

IP PARIS

CONCLUSIONS : DERIVEES MULTI-ECHELLES ET CONTOURS

DERIVEES MULTI-ECHELLES

- Dérivée estimée à une échelle donnée (variance de la gaussienne)
- Ordre 1, Gradient : Contraste, Direction…
- Ordre 2, Hessienne : Courbure, Contraste, Direction…
- Continuum du local (géométrie) vers le global (statistique).



CONCLUSIONS : DETECTEURS ET DESCRIPTEURS

DETECTEURS ET DESCRIPTEURS

Détecteur : réduction du support de calcul → répétable *et/vs* représentatif.

- Coins : Maxima de courbure, Harris, FAST…
- Blobs : Déterminant de la hessienne, SIFT, SURF…

Descripteur : représentation numérique → invariant *et/vs* discriminant.

- Invariants différentiels : couleur (intensité), contraste, laplacien,…
- Histogrammes d'indices contraste-invariants : direction, courbure,…

Local : géométrique → contour, courbure, coin, blob…

Global : statistique → histogramme, spectre d'amplitude/de phase…

Entre les deux : **analyse multi-échelles** → continuum…

REFERENCES

- ***C. Harris & M. Stephens 1988*** *« **A combined corner and edge detector** » Alvey Vision Conference **pp 147-151***
- ***A.P. Witkin 1983*** *« **Scale-space filtering** » 8th Int. Joint Conf. On Artificial Intelligence, vol.2, pp1019-1022.*
- ***D.G. Lowe 2004*** *« **Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints** » International Journal of Computer Vision **60(2) pp 91-110***
- ***C. Schmid, R. Mohr & C. Bauckhage 2000*** *« **Evaluation of Interest Point Detectors** » Int. Jornal of Computer Vision **37(2) pp 151-172***
- ***C. Schmid & R. Mohr 1997*** *« **Local grayvalue invariants for image retrieval** » IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **19(5) pp 530-534***
- **E. Rosten & T. Drummond** "**Fusing points and lines for high performance tracking**" Int. Conf. on Computer Vision (ICCV 2005), 1508—1511, **2005.**
- **H. Bay, T. Tuytelaars & L. Van Gool** **"SURF: Speeded up robust features",** Computer Vision and Image Understanding, 110 (3), June, **2008,** 346-359

ENSTA

IP PARIS

REFERENCES

- ***A. Hyvrinen, J. Hurri & P.O. Hoyer*** *« **Natural Image Statistics: A Probabilistic Approach to Early Computational Vision** »,* *Springer Publishing Company,* ***2009***
- ***E. Rublee, V. Rabaud, K. Konolige, & G. Bradski*** *« **ORB: an efficient alternative to SIFT or SURF** »,* *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV),* ***2011.***
- ***P. Perona & J. Malik*** *« **Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion** ».* *Proceedings of IEEE Computer Society Workshop on Computer Vision, pp. 16–22,* ***1987.***
- ***P.F. Alcantarilla, A. Bartoli, & A. J. Davison*** *« **KAZE features** ».* *12th European conference on Computer Vision - Vol. Part VI. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 214-227,* ***2012.***
- ***N. Dalal & B. Triggs 2005*** *« **Histogram of oriented gradients for human detection** »,* *Int. Conf. Of Computer Vision and Pattern recognition (CVPR**), 2005***

ENSTA

IP PARIS

REFERENCES

- ***A. Krizhevsky, I. Sutskever, G.E. Hinton 2012*, *''Imagenet classification with deep convolutional neural networks''*,** *Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS)*
- ***S. Arya & D. Mount* « *Approximate Nearest Neighbor Queries in Fixed Dimensions* »**. *ACM Symposium on Discrete Algorithms, 25–27 January 1993, Austin, Texas.: 271–280.*
- **G. Csurka, C.R. Dance, L. Fan, J. Willamowski & C. Bray, "Visual categorization with bags of keypoints",** In Workshop on Statistical Learning in Computer Vision, ECCV, **2004.**
- ***B. Tomasik, P. Thiha & D. Turnbull 2009* « *Tagging products using image classification* »,** *SIGIR* ***2009.***
- ***H. Foroosh, J. Zerubia & M. Berthod 2002* « *Extension of phase correlation to subpixel registration* »** *IEEE Transactions on Image Processing* ***11(3) pp 188-200***
- ***Q. Chen, M. Defrise & F. Deconinck 1994* « *Symmetric Phase-Only Matched Filtering of Fourier-Mellin Transforms for Image Registration and Recognition* »** *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* ***16(12) pp 1156-1168***