

# Calcul haute performance d'homologie persistante par théorie de Morse discrète

Pierre Fortin et Julien Tierny

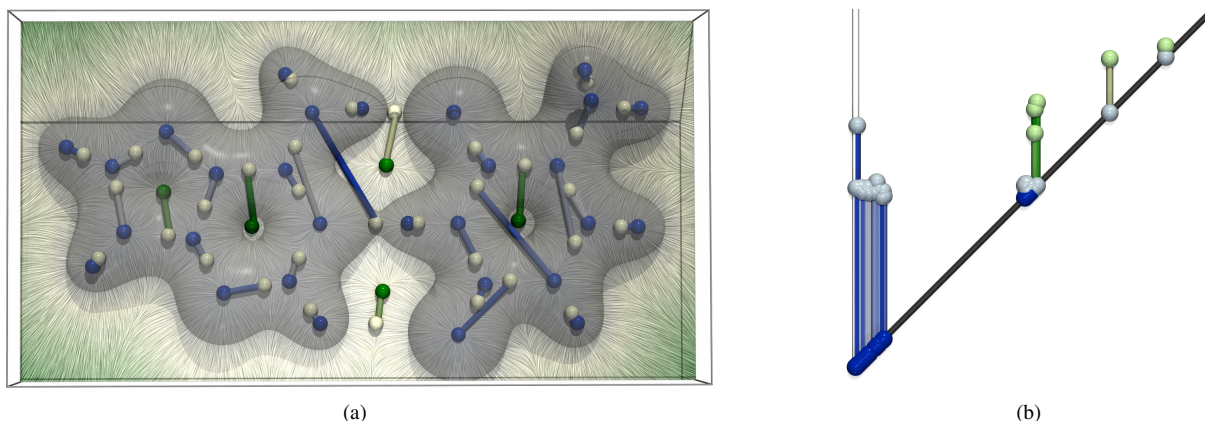


Fig. 1. Le sujet en une image – Etant donné un jeu de données (Fig. 1(a): densité électronique en chimie quantique), le diagramme de persistance (Fig. 1(b)) est une signature concise, stable et robuste des principales structures topologiques présentes dans les données. Par exemples, les barres bleues (homologie persistante de dimension 0) indiquent les composantes connexes principales des sous-ensembles de niveau (solide gris transparent, Fig. 1(a)) tandis que les barres vertes (homologie persistante de dimension 1) indiquent les anses topologiques principales. Ces mêmes barres sont représentées dans les données originales (Fig. 1(a)), où elles relient les points critiques responsables de la création et de la destruction de ces structures topologiques. Le diagramme de persistance est une représentation centrale en analyse topologique de données, qui est très utilisée en tant que descripteur structurel pour l'apprentissage, l'analyse statistique et la visualisation. Dans ce stage, nous souhaitons mettre au point une méthode haute performance pour le calcul de ces diagrammes, reposant sur du parallélisme distribué et exploitant la théorie de Morse discrète.

**Mots Clefs**—Analyse topologique de données, calcul haute-performance, data science, visualisation.

## 1 CONTEXTE

L'analyse topologique de données (TDA) [11, 16, 38, 48, 49] est une thématique à cheval entre informatique et mathématiques appliquées, qui propose d'extraire, de mesurer et de comparer des informations structurelles cachées au sein de données complexes. Elle repose sur des concepts de topologie [36] documentés dans des livres de référence [16] et connaît un essor important depuis quelques années, dû principalement à ses succès récents en *data science* [15, 38, 49] et en *machine learning* [10, 14], ainsi qu'aux développements open-source récents la mettant en oeuvre [3, 52].

L'analyse topologique de données repose aujourd'hui sur une boîte à outil de représentations topologiques de données (comme le diagramme de persistance [16, 17], le graphe de Reeb [23–26, 39, 54], le complexe de Morse-Smale [19, 29, 35]) dont la concision et la pertinence pratique a été documentée dans de nombreuses applications, comme en imagerie médicale [4, 9], en biologie cellulaire [30], en mécanique des fluides [8, 12, 22, 32, 45, 50], en physique des matériaux [18, 31, 34, 44], en combustion [6, 7, 28, 33], en chimie moléculaire [5, 21, 37], en astrophysique [43, 47], en traitement de surfaces [51, 53, 55, 57], en compression [46] ou encore en monitoring de simulations numériques haute-performance [41].

Le diagramme de persistance (Fig. 1(b)) est une représentation centrale en analyse topologique de donnée. Il s'agit d'une signature concise, stable et robuste des principales structures topologiques présentes dans un jeu de données. Il est très utilisé en tant que descripteur structurel pour l'apprentissage, l'analyse statistique et la visualisation. Plusieurs algorithmes efficaces ont été mis au point pour son calcul [1], dont un algorithme parallèle de référence [2]. Cependant, la construction de ce diagramme est encore coûteuse en temps et difficilement envisageable pour des jeux de données de très grande taille (au delà de  $10^9$  points), typiquement rencontrés dans des applications intensives à haute performance.

Dans ce stage, nous souhaitons développer une approche haute-performance pour le calcul distribué de diagrammes de persistance de très grands jeux de données. Pour cela, nous souhaitons nous focaliser sur la théorie de Morse discrète, grâce à laquelle nous avons déjà obtenu des résultats préliminaires très prometteurs pour ce problème. A l'issue de ce stage, l'algorithme développé permettra de calculer des diagrammes de persistance sur des jeux de données d'une taille sans précédent dans un contexte haute-performance (i.e. sur un super-calculateur), mais aussi de traiter de gros volumes de données sur de petits matériels (e.g. ordinateur portable) en mode *out-of-core*.

## 2 PROBLÈME SCIENTIFIQUE

**Diagramme de persistance:** Les données considérées en entrée sont fournies de manière générique sous la forme d'une fonction scalaire linéaire par morceaux  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , associant une valeur réelle à chaque sommet d'une triangulation  $\mathcal{M}$  (qui représente par exemple un objet 3D, Fig. 1). En pratique,  $f$  représente dans les applications des estimations

- Pierre Fortin is with the University of Lille, CNRS, CRISIAL UMR 9189, France. E-mails: pierre.fortin@univ-lille.fr.
- Julien Tierny is with Sorbonne Université, CNRS, LIP6 UMR 7606, France. E-mails: julien.tierny@sorbonne-universite.fr.

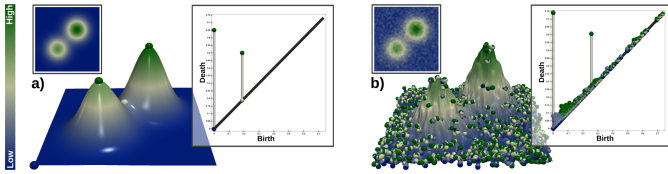


Fig. 2. Le diagramme de persistance [16, 17] est une signature topologique de donnée simple, sur laquelle nous nous focaliserons pendant ce stage. Elle permet de réduire les données en entrée (image en niveau de gris, illustrée par un terrain, (a)) en un nuage de points 2D (diagramme sur la droite) représentant par un point chaque structure topologique (composante connexe, cycle, cavité, etc.) observée dans les données, en fonction de son importance dans les données (distance à la diagonale). Cette représentation permet de résumer de manière concise les structures principales présentes dans un jeu de données et présente des propriétés de stabilité intéressante en présence de bruit (b), où les structures bruitées vont typiquement être localisées près de la diagonale.

de densité [14], des niveaux de concentrations [18], des potentiels [21], des intensités [4], des températures [7], etc. Les sous-ensembles de niveau  $f_{-\infty}^{-1}(i)$  sont définis comme la pré-image de l'intervalle ouvert  $]-\infty, i[$  sur  $\mathcal{M}$ . Simplement, il s'agit de l'ensemble des points de l'objet au dessous d'une certaine valeur  $i$ . Quand  $i$  augmente,  $f_{-\infty}^{-1}(i)$  change de topologie en un nombre fini de configurations: ses nombres de Betti [16, 58] (nombres de composantes connexes, de cycles indépendants, de cavités, etc...) changent sur des points singuliers, appelés points critiques (sphères de couleur, Fig. 2). Chaque structure topologique de  $f_{-\infty}^{-1}(i)$  est donc créée sur un premier point critique à une valeur  $i$ , puis détruite sur un second point critique à une valeur  $j > i$ . Le diagramme de persistance  $\mathcal{D}(f)$  [13, 17] (Fig. 2) est une représentation graphique de ce processus, où chaque classe d'homologie persistante (chaque structure topologique) est représentée par une barre verticale pour laquelle la coordonnée en abscisse correspond à la valeur  $i$  et les extrémités en ordonnées correspondent à  $i$  et  $j$ . La persistance de la classe est donnée par  $|j - i|$ . Dans ce diagramme, le bruit topologique apparaît donc sous la forme de petites barres, proche de la diagonale ( $|j - i| \rightarrow 0$ ), voir [48].

**Théorie de Morse discrète:** La théorie de Morse discrète [20] est un formalisme récent qui permet de représenter de manière simple, robuste et cohérente les singularités d'une fonction scalaire (et donc, en principe d'en comprendre la structure). Elle a notamment joué un rôle central il y a une dizaine d'années pour la construction robuste d'une représentation topologique de données appelée le *complexe de Morse-Smale* [29, 40, 42, 52]. Il s'agit d'un complexe cellulaire plus simple que les données initiales (i.e. les sommets de ce complexe correspondent aux points critiques de la fonction, Fig. 3(b)). Ainsi, certains auteurs se sont servis de cette représentation réduite pour déduire efficacement le diagramme de persistance [27, 40]. Récemment, nous avons obtenu des résultats préliminaires montrant que seule une petite sous-partie du complexe de Morse-Smale est en fait nécessaire pour calculer le diagramme de persistance, donnant lieu à un nouvel algorithme très efficace de calcul, améliorant significativement les approches de l'état de l'art [2] (la publication correspondante est en cours de rédaction).

Dans ce stage, nous souhaitons étendre ce nouvel algorithme à la parallélisation en mémoire distribuée, afin de pouvoir traiter efficacement des données d'une taille sans précédent (typiquement, sur un supercalculateur). Pour cela, nous nous appuyerons sur une décomposition spatiale des données en entrée sous la forme de sous-blocs, comme typiquement rencontré en calcul haute-performance. La difficulté principale consistera alors à mettre au point une méthode permettant de propager efficacement les informations topologiques globales entre sous-blocs distincts, afin de garantir l'exactitude du résultat en sortie. A l'issue de cette étape, l'algorithme développé pourra également être utilisé sur de petits matériels (i.e. ordinateurs portables) en mode *out-of-core*, où les sous-blocs seraient considérés un à la fois.

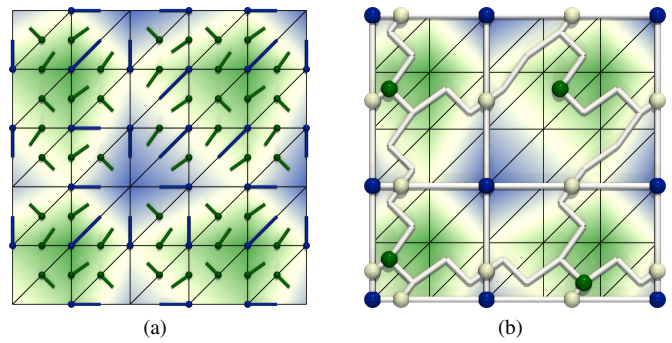


Fig. 3 (a): gradient discret (flèches bleues: vecteurs sommets-arêtes, flèches vertes: vecteurs arêtes-triangles) calculé depuis une fonction linéaire par morceaux sur une triangulation 2D (gradient de couleur dans les triangles, bleu: valeurs basses, vert: valeurs hautes). 3(b) Le complexe de Morse-Smale est un complexe cellulaire plus simple que la donnée en entrée. En particulier, ses sommets sont les points critiques de la fonction (sphères, bleu: minima, blanc: points selles, vert: maxima) et ses cellules de dimension 1 sont les séparatrices (cylindres blancs).

### 3 PERSPECTIVES

Ce stage est proposé dans l'optique d'une poursuite en thèse de doctorat sur le thème de l'analyse topologique de données haute-performance. Cette thèse se déroulerait dans le cadre du projet européen *TORI*<sup>1</sup>, qui finance une équipe-projet d'une dizaine de personnes pour une durée de 5 ans (sur le thème de l'analyse topologique de données), via la distinction *ERC*<sup>2</sup> (sélective et prestigieuse) attribuée par la Commission Européenne à Julien Tierny.

De manière plus générale, ce stage et sa possible poursuite en thèse apporteront un bagage de compétences scientifiques et techniques pointues et recherchées dans le domaine de la *data science* et de l'analyse et de la visualisation de données (TDA, TTK [52], ParaView [59]). Il constitue donc une expérience fortement valorisable pour accéder à des fonctions R&D sur ces thèmes, dans le monde académique comme industriel (Kitware, EDF, Total, CEA, etc.).

### 4 ORGANISATION DU STAGE

Le stage pourra se dérouler selon les étapes suivantes:

1. Etudier la bibliographie existante sur:
  - l'analyse topologique de données [16, 48];
  - les algorithmes de l'état de l'art pour le calcul de diagrammes de persistance [1, 2];
  - notre approche initiale par théorie de Morse discrète (publication en cours de rédaction).
2. Imaginer et mettre en oeuvre un algorithme de calcul distribué par théorie de Morse discrète.
3. Valider l'approche d'un point de vue expérimental sur une variété de jeux de données pratiques provenant de divers contextes applicatifs, à la fois sur des serveurs de calcul (en particulier MESU [56], 3456 coeurs répartis sur 144 noeuds de calcul) et sur du petit matériel (calcul out-of-core).

Les programmes d'expérimentation seront écrits en C++, sous la forme de modules pour la plate-forme open-source d'analyse topologique de données "*Topology ToolKit*" (TTK) [52] (intégrée à ParaView [59]).

Le stage peut durer de 4 à 6 mois, selon les disponibilités du stagiaire, à partir du 5 Avril 2021 (date de démarrage ajustable si nécessaire). Il s'agit d'un stage rémunéré (gratification académique standard, prise en charge partielle des frais de transport).

<sup>1</sup><http://erc-tori.github.io>

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/European\\_Research\\_Council](https://en.wikipedia.org/wiki/European_Research_Council)

## 5 PROFIL

Nous recherchons un(e) étudiant(e) très motivé(e)! Curiosité, ouverture d'esprit, créativité, et ténacité sont les aptitudes de caractère que nous recherchons. Ce stage s'adresse aux étudiants en dernière année de master en informatique ou mathématiques appliquées (et domaines connexes) ou aux étudiants en dernière année d'école d'ingénieurs. Le stagiaire devra être à l'aise avec la programmation en C/C++ avec OpenMP et MPI, ou motivé pour le devenir. Un intérêt pour la géométrie, la topologie et plus généralement pour les mathématiques et l'informatique est requis.

## 6 LIEU

Ce stage aura lieu au laboratoire d'informatique (LIP6) de Sorbonne Université, en plein coeur de Paris (arrêt Jussieu, lignes 7 et 10). Les modalités précises d'accueil physique au LIP6 seront cependant possiblement amenées à évoluer, en fonction des restrictions sanitaires (liées au Covid-19) en vigueur au moment du stage. Le stage sera encadré par Julien Tierny (chercheur au CNRS, expert en méthodes topologiques pour l'analyse et la visualisation de données, <https://julien-tierny.github.io/>) et Pierre Fortin (maître de conférence à l'Université de Lille, <https://pro.univ-lille.fr/pierre-fortin/>, expert en calcul haute performance).

## 7 CANDIDATURES

Nous invitons les candidat(e)s à nous faire parvenir leur lettre de candidature accompagnée d'un CV mis à jour à Julien Tierny et Pierre Fortin ([julien.tierny@sorbonne-universite.fr](mailto:julien.tierny@sorbonne-universite.fr), [pierre.fortin@univ-lille.fr](mailto:pierre.fortin@univ-lille.fr)). Nous vous encourageons à nous contacter par email pour toute question ou pour discuter davantage du sujet.

## REFERENCES

- [1] U. Bauer. Ripser: efficient computation of Vietoris-Rips persistence barcodes, 2019.
- [2] U. Bauer, M. Kerber, and J. Reininghaus. DIPHA: Distributed computation of persistent homology. In *Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX)*, 2014.
- [3] T. Bin Masood, J. Budin, M. Falk, G. Favelier, C. Garth, C. Gueunet, P. Guillou, L. Hofmann, P. Hristov, A. Kamakshidasan, C. Kappe, P. Klacansky, P. Laurin, J. Levine, J. Lukaszczuk, D. Sakurai, M. Soler, P. Steneteg, J. Tierny, W. Usher, J. Vidal, and M. Wozniak. An Overview of the Topology ToolKit. In *TopoInVis*, 2019.
- [4] A. Bock, H. Doraiswamy, A. Summers, and C. Silva. Topoangler: Interactive topology-based extraction of fishes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2017.
- [5] R. A. Boto, J. C. Garcia, J. Tierny, and J.-P. Piquemal. Interpretation of the reduced density gradient. *Molecular Physics*, 2016.
- [6] P. Bremer, G. Weber, J. Tierny, V. Pascucci, M. Day, and J. Bell. A topological framework for the interactive exploration of large scale turbulent combustion. In *Proc. of IEEE eScience*, 2009.
- [7] P. Bremer, G. Weber, J. Tierny, V. Pascucci, M. Day, and J. Bell. Interactive exploration and analysis of large scale simulations using topology-based data segmentation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2011.
- [8] T. Bridel-Bertomeu, B. Fovet, J. Tierny, and F. Vivodtzev. Topological Analysis of High Velocity Turbulent Flow. In *IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization (posters)*, 2019.
- [9] H. Carr, J. Snoeyink, and M. van de Panne. Simplifying flexible isosurfaces using local geometric measures. In *IEEE VIS*, 2004.
- [10] F. Chazal, L. Guibas, S. Oudot, and P. Skraba. Persistence-based clustering in Riemannian manifolds. *Journal of the ACM*, 2013.
- [11] F. Chazal and J. Tierny. Topological data analysis, online class. <http://lip6.fr/Julien.Tierny/topologicalDataAnalysisClass.html>.
- [12] F. Chen, H. Obermaier, H. Hagen, B. Hamann, J. Tierny, and V. Pascucci. Topology analysis of time-dependent multi-fluid data using the reeb graph. *Computer Aided Geometric Design*, 2013.
- [13] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer. Stability of persistence diagrams. In *Symp. on Comp. Geom.*, 2005.
- [14] R. Cotsakis, J. Shaw, J. Tierny, and J. A. Levine. Implementing Persistence-Based Clustering of Point Clouds in the Topology ToolKit. In *TopoInVis Book*, 2020.
- [15] H. Doraiswamy, J. Tierny, P. J. S. Silva, L. G. Nonato, and C. Silva. TopoMap: A 0-dimensional Homology Preserving Projection of High-Dimensional Data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2020.
- [16] H. Edelsbrunner and J. Harer. *Computational Topology: An Introduction*. American Mathematical Society, 2009.
- [17] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Disc. Compu. Geom.*, 2002.
- [18] G. Favelier, C. Gueunet, and J. Tierny. Visualizing ensembles of viscous fingers. In *IEEE SciVis Contest*, 2016.
- [19] R. Forman. A user's guide to discrete Morse theory. *Adv. in Math.*, 1998.
- [20] R. Forman. A user's guide to discrete morse theory. In *Proc. of the International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, 2001.
- [21] D. Guenther, R. Alvarez-Boto, J. Contreras-Garcia, J.-P. Piquemal, and J. Tierny. Characterizing molecular interactions in chemical systems. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2014.
- [22] D. Guenther, J. Salmon, and J. Tierny. Mandatory critical points of 2D uncertain scalar fields. *Computer Graphics Forum (Proc. of EuroVis)*, 2014.
- [23] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Contour forests: Fast multi-threaded augmented contour trees. In *IEEE LDAV*, 2016.
- [24] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Task-based Augmented Merge Trees with Fibonacci Heaps. In *IEEE LDAV*, 2017.
- [25] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Task-based Augmented Contour Trees with Fibonacci Heaps. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2019. Accepted.
- [26] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Task-based Augmented Reeb Graphs with Dynamic ST-Trees. In *Eurographics Symposium on Parallel Graphics and Visualization*, 2019.
- [27] D. Günther, J. Reininghaus, H. Wagner, and I. Hotz. Efficient computation of 3D Morse-Smale complexes and persistent homology using discrete Morse theory. *The Visual Computer*, 28:959–969, 2012.
- [28] A. Gyulassy, P. Bremer, R. Grout, H. Kolla, J. Chen, and V. Pascucci. Stability of dissipation elements: A case study in combustion. *Computer Graphics Forum (Proc. of EuroVis)*, 2014.
- [29] A. Gyulassy, P. T. Bremer, B. Hamann, and V. Pascucci. A practical approach to morse-smale complex computation: Scalability and generality. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2008.
- [30] A. Gyulassy, D. Guenther, J. A. Levine, J. Tierny, and V. Pascucci. Conforming morse-smale complexes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2014.
- [31] A. Gyulassy, A. Knoll, K. Lau, B. Wang, P. Bremer, M. Papka, L. A. Curtiss, and V. Pascucci. Interstitial and interlayer ion diffusion geometry extraction in graphitic nanosphere battery materials. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2015.
- [32] J. Kasten, J. Reininghaus, I. Hotz, and H. Hege. Two-dimensional time-dependent vortex regions based on the acceleration magnitude. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2011.
- [33] D. E. Laney, P. Bremer, A. Mascarenhas, P. Miller, and V. Pascucci. Understanding the structure of the turbulent mixing layer in hydrodynamic instabilities. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2006.
- [34] J. Lukaszczuk, G. Aldrich, M. Steptoe, G. Favelier, C. Gueunet, J. Tierny, R. Maciejewski, B. Hamann, and H. Leitte. Viscous fingering: A topological visual analytic approach. In *Physical Modeling for Virtual Manufacturing Systems and Processes*, 2017.
- [35] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton U. Press, 1963.
- [36] MyWhyU. A humorous look at the topology of curved space. <https://www.youtube.com/watch?v=p2ofJPh2yMw&list=PL09E9E697F585A58C>.
- [37] M. Olejniczak, A. S. P. Gomes, and J. Tierny. A Topological Data Analysis Perspective on Non-Covalent Interactions in Relativistic Calculations. *International Journal of Quantum Chemistry*, 2019.
- [38] V. Pascucci, X. Tricoche, H. Hagen, and J. Tierny. *Topological Methods in Data Analysis and Visualization: Theory, Algorithms and Applications*. Springer, 2010.
- [39] G. Reeb. Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique. *Acad. des Sci.*, 1946.
- [40] V. Robins, P. Wood, and A. Sheppard. Theory and algorithms for constructing discrete morse complexes from grayscale digital images. *IEEE*

*Trans. on Pat. Ana. and Mach. Int.*, 2011.

- [41] E. Santos, J. Tierny, A. Khan, B. Grimm, L. Lins, J. Freire, V. Pascucci, C. Silva, S. Klasky, R. Barreto, and N. Podhorszki. Enabling advanced visualization tools in a web-based simulation monitoring system. In *Proc. of IEEE eScience*, 2009.
- [42] N. Shivashankar. *Morse-Smale Complexes: Computation and Applications*. PhD thesis, Indian Institute of Science, 2014.
- [43] N. Shivashankar, P. Pranav, V. Natarajan, R. van de Weygaert, E. P. Bos, and S. Rieder. Felix: A topology based framework for visual exploration of cosmic filaments. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2016. <http://vgl.serc.iisc.ernet.in/felix/index.html>.
- [44] M. Soler, M. Petitfrere, G. Darche, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny. Ranking Viscous Finger Simulations to an Acquired Ground Truth with Topology-Aware Matchings. In *IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization*, 2019.
- [45] M. Soler, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny. Lifted Wasserstein matcher for fast and robust topology tracking. In *Proc. of IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization*, 2018.
- [46] M. Soler, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny. Topologically controlled lossy compression. In *Proc. of IEEE PacificViz*, 2018.
- [47] T. Sousbie. The persistent cosmic web and its filamentary structure: Theory and implementations. *Royal Astronomical Society*, 2011. <http://www2.iap.fr/users/sousbie/web/html/indexd41d.html>.
- [48] J. Tierny. Introduction to topological data analysis. <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01581941/file/manuscript.pdf>.
- [49] J. Tierny. *Topological Data Analysis for Scientific Visualization*. Springer, 2018.
- [50] J. Tierny and H. Carr. Jacobi fiber surfaces for bivariate Reeb space computation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2016.
- [51] J. Tierny, J. Daniels, L. G. Nonato, V. Pascucci, and C. Silva. Interactive quadrangulation with Reeb atlases and connectivity textures. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2012.
- [52] J. Tierny, G. Favelier, J. A. Levine, C. Gueunet, and M. Michaux. The Topology ToolKit. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2017. <https://topology-tool-kit.github.io/>.
- [53] J. Tierny, D. Guenther, and V. Pascucci. Optimal general simplification of scalar fields on surfaces. In *Topological and Statistical Methods for Complex Data*. Springer, 2014.
- [54] J. Tierny, A. Gyulassy, E. Simon, and V. Pascucci. Loop surgery for volumetric meshes: Reeb graphs reduced to contour trees. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2009.
- [55] J. Tierny and V. Pascucci. Generalized topological simplification of scalar fields on surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2012.
- [56] S. University. Mesu super-computer. <https://hpcave.upmc.fr/index.php/resources/mesu-supercomputer/>.
- [57] A. Vintescu, F. Dupont, G. Lavoué, P. Memari, and J. Tierny. Conformal factor persistence for fast hierarchical cone extraction. In *Eurographics (short papers)*, 2017.
- [58] Wikipedia. Betti numbers. [https://en.wikipedia.org/wiki/Betti\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Betti_number).
- [59] Wikipedia. ParaView. <https://en.wikipedia.org/wiki/ParaView>.