ENSTA ParisTech

MA201

TD numéro 1

Année académique 2018-2019

1 Estimation de l'amplitude d'un signal connu en présence de bruit

On considère qu'on observe un signal x de la forme $x[n] = \theta s[n] + w[n]$, on cherche à estimer $\theta \in \mathbb{R}$ en considérant que w est un bruit blanc.
On suppose que s est un signal déterministe et connu. On suppose aussi la matrice de covariance de x connue, et on la note C.
On note N le nombre d'échantillons de $x[n]$ observé, et on note :
$\hat{\theta} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x[n]$ l'estimateur de θ On note a, s, x, les vecteurs obtenus en prenant pour composante i les nombres $a[i]$, $s[i]$, $x[i]$ respectivement.

1. On contraint l'estimateur à être non biaisé. Exprimer cette contrainte sous forme d'une équation reliant les vecteurs a et s.

2. Exprimer la variance de $\hat{\theta}$ en fonction de a et C.

3. Exprimer $\hat{\theta}$ en fonction de s, C et x en minimisant la variance de l'estimateur sous contrainte que l'estimateur est non biaisé.Déterminer la variance de cet estimateur.

2 Analyse de voyelles par Linear Predictive Coding (LPC)

2.1 Partie théorique

Le conduit vocal est modélisé comme un filtre stable, causal et autorégressif avec N coefficients $(a_k)_{1\leq k\leq N}$ au travers duquel passe un signal d'entrée $b[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k x[n-k] + b[n]$$

Ce modèle est appelé modèle LPC. Pour modéliser la parole $x[n]$, on choisit $b[n]$ comme étant un bruit blanc de variance σ^2 (son dit "non-voisé"). On suppose que l'autocovariance $E(x[n+k]x[n])$ ne dépend pas de n et on la note $R[k], k \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer sous forme d'équation matricielle le vecteur de coefficients en fonction de l'autocovariance du signal x.

2. Déterminer σ^2 en fonction des coefficients $(a_k)_{1\leq k\leq N}$ et de la fonction d'autocovariance de x.

2.2 Partie pratique

On suppose à présent que le conduit vocal est modélisé comme un filtre stable, causal et autorégressif avec N coefficients $(a_k)_{1\leq k\leq N}$ au travers duquel passe un signal d'entrée $e[n]$. Pour modéliser la parole $x[n]$, on choisit $e[n]$ de la forme $e[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta[n-kP]$ où P est relié à la hauteur du son (son dit "voisé"). Nous allons analyser le son de la voyelle "a". On appelera N la complexité du modéle LPC, qu'on fixera initialement à 10.

1. Chargez le son de la voyelle et regardez la transformée de Fourier. Le modèle vous semble-t-il cohérent avec le résultat obtenu?

2. En remarquant que le signal x est périodique. Proposer une manière simple de calculer expérimentalement P (sans passer par la transformée de Fourier).

3. Calculez les coefficients du filtre à l'aide de l'équation matricielle obtenue précédemment (on supposera que l'équation obtenue dans la partie théorique s'applique aussi pour les sons voisés). On approximera l'autocovariance comme une moyenne empirique des m réalisations:

$$R_X[k] = \frac{1}{m-k} \sum_{i=0}^{m-k} x[i]x[i+k]$$

4. Quel est l'ordre de grandeur de la compression obtenue sur un signal d'une demi-seconde.

Questions bonus:

5. en utilisant un train d'impulsions, recréez artificiellement les sons des différentes voyelles.

6. Créez à partir du signal obtenu un fichier wave et écoutez le: reconnaissez-vous la voyelle ? Comparez le résultat obtenu avec différentes valeurs de N.
   On utilisera la fonction *wavfile.write("nomdefichier.wav",44100 (fréquence d'échantillonnage), signal réel au format numpy array))*