ENSTA ParisTech

MA201

TP numéro 3 : Estimation bayésienne

Année académique 2018-2019

1 Estimation bayésienne d'un jeu de pile ou face

Afin d'appréhender sur un cas simple les différences entre estimation bayésienne et estimation classique, nous allons estimer, en utilisant les deux approches, la probabilité qu'une pièce tombe du côté pile.

1.1 Estimation classique

On considère n essais d'un jeu de pile ou face, et on considère que la pièce tombe k fois du côté pile. Estimer la probabilité θ pour la pièce de tomber du côté pile avec le maximum de vraisemblance.

1.2 Estimation bayésienne

On considère le même jeu que précédemment, mais on se place dans un cadre bayésien avec un *a priori* $p(\theta)$, qui est une loi uniforme entre 0.4 et 0.6.

1. Écrire l'estimateur bayésien des moindres carrés de θ

2. On considère que la pièce tombe n fois du côté pile sur n essais. Vers quelle valeur converge θ avec n ? Commenter la différence avec le cas classique.

3. Quel est l'estimateur bayésien MAP dans le même cas ?

2 Estimation bayésienne linéaire

2.1 Lissage bayésien

Nous souhaitons lisser un signal que l'on suppose écrit sous la forme :
$X[n] = s[n] + w[n], n \in \{0, \ldots, N-1\}$. s est supposé être le signal d'origine, corrompu par un bruit additif w (pas nécessairement blanc). Nous souhaitons trouver l'estimateur linéaire permettant d'approcher au mieux, quelque soit $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, $s[n]$ comme une combinaison linéaire des N échantillons $X[0]$,$X[1]$,...,$X[n-1]$.
On suppose connus les matrice d'autocovariance du signal s et de w. On les notera respectivement R_s et R_w.

2.1.1 Partie Théorique

1. Formuler le problème comme une estimation bayésienne linéaire. Quel est le paramètre θ recherché ?

2. A l'aide d'une modélisation géométrique, en voyant chaque variable aléatoire $X[i]$ comme un vecteur dans un espace vectoriel normé, montrer sans calcul que l'estimateur optimal au sens des moindres carrés vérifie : $E[(\theta - \hat{\theta})X[n]] = 0$ pour n variant de 0 à $N-1$.

3. En déduire, en fonction de R_s et R_w, la matrice W recherchée vérifiant $\hat{\theta} = Wx$

2.1.2 Partie Expérimentale

1. Charger le signal fourni, le bruiter par un bruit blanc de variance σ^2, et appliquer le filtre de Wiener. Comparer le signal filtré au signal d'origine pour différentes valeurs de la *sigma*.

2. Comparer, en mesurant l'erreur quadratique (calculée par la fonction quadratique), l'efficacité du filtre de Wiener avec celle d'une moyenne mobile, pour différentes tailles de la moyenne.

2.2 Question bonus : Prédiction bayésienne

Nous supposons maintenant que le signal n'est plus bruité mais que les derniers échantillons ont été perdus. On connait par contre toujours l'autocovariance du signal. En posant ce problème de prédiction comme un problème d'estimation bayésienne, déterminer comment trouver le signal prédit optimal.

Appliquer cette méthode avec Python au signal précédent dont on aura retiré les 50 derniers échantillons. Comparer le signal reconstruit au signal d'origine. Commenter.