ENSTA ParisTech

MA201

TP numéro 5 : Chaines de Markov

Année académique 2018-2019

1 Exercice 1 : évolution d'abonnements internet

Les abonnés d'un service d'abonnement internet sont répartis chez trois fournisseurs A,B,C. On suppose le nombre d'abonnés constant au cours du temps et on regarde la proportion des abonnés pour chacun des trois fournisseurs. On suppose que :

— Un abonné de A a une probabilité 0.7, au bout d'un mois, de rester abonné chez A. Sinon, il choisit avec une probabilité uniforme un des deux autres fournisseurs.

— Un abonné de B a une probabilité 0.8, au bout d'un mois, de rester abonné chez A. Sinon, il choisit avec une probabilité uniforme un des deux autres fournisseurs.

— Un abonné de C a une probabilité 0.9, au bout d'un mois, de rester abonné chez A. Sinon, il choisit avec une probabilité uniforme un des deux autres fournisseurs.

On souhaite regarder l'évolution des abonnements au cours des mois.

1. Modéliser ce problème comme une chaine de Markov. Représenter la chaine graphiquement et écrire la matrice de transition.

2. La chaine de Markov est elle irréductible ? Apériodique ?

3. Avec Python, calculer la probabilité invariante avec une analyse des valeurs et vecteurs propres de la matrice de transition.

4. Avec Python, faire des simulations de la loi de X_n, pour n grand, avec des mesures initiales μ_0 différentes

5. Représenter la vitesse de convergence, à savoir l'évolution de la norme euclidienne entre les vecteurs de probabilité $\mu_0 P^n$ et la probabilités invariante

2 Exercice 2 : Pannes d'ascenseurs

On considère deux ascenseurs. Chaque jour, un des deux va tomber en panne avec une probabilité $p = 1/10$.
On note X_n le nombre d'ascenseurs en panne au début de la journée.

1. On considère que le service de réparation intervient le lendemain de la panne et que la réparation prend toute la journée. Modéliser cette situation à l'aide d'une chaine de Markov, donner la matrice de transition, tracer le graphe.

2. On considère à présent que la réparation prend deux jours et qu'un seul ascenseur à la fois peut être réparé dans la journée. Peut-on modéliser cette situation à l'aide d'une chaine de Markov ?

3 Exercice 3 : l'urne d'Ehrenfest

On considère 2 urnes et n boules disposées dans les deux urnes, numérotées 1 et 2. A chaque étape, on tire aléatoirement une boule parmi les n, et on la change d'urne.
On note X_i le nombre de boules dans l'urne numéro 1.

1. Montrer que X_i peut être modélisée comme une chaine de Markov, que l'on représentera graphiquement

2. Cette chaine de Markov est-elle irréductible ? Apériodique ? Justifier votre réponse.

3. Écrire la matrice de transition P de cette chaine de Markov

4. Chercher une loi de probabilité symétrique pour P

5. En déduire une loi invariante pour cette chaine de Markov. Vérifier votre résultat.

4 Question bonus : la ruine du joueur, suite et fin

Cet exercice est la suite de l'exercice 1 du TP4. On cherche cette fois-ci l'espérance de la durée du jeu. On note T le temps où l'un des deux joueurs est ruiné. On note $m(i) = E[T|X_0 = i]$

1. Déterminer une équation de récurrence sur $m(i)$, et les conditions aux limites de cette équation.

2. En déduire l'expression de $m(i)$