C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, p. 1305-1310, 1998
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Les équations de Maxwell dans un polyèdre : un résultat de densité

Patrick CIARLET, Jr., Christophe HAZARD, Stephanie LOHRENGEL

ENSTA/UMA, 32, boulevard Victor, 75739 Paris cedex 15, France
Courriel : ciarlet@ensta.fr, hazard@ensta.fr, engel@ensta.fr

(Reçu le 20 mai 1998, accepté le 25 mai 1998)

Résumé. Dans cette Note, on prouve que, dans un domaine polyédrique Ω de $\mathbb{R}^3$, les champs réguliers sont denses dans les sous-espaces de $\mathrm{H}(\mathbf{rot}, \mathrm{div}\,; \Omega)$ dont les éléments ont soit leur trace tangentielle, soit leur trace normale, dans $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$. Pour cela, il est nécessaire de connaître explicitement l'allure des singularités du Laplacien. Ceci devrait permettre de résoudre les équations de Maxwell avec une condition d'impédance sur le bord à l'aide des éléments finis conformes dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Les preuves détaillées se trouvent dans [8]. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Maxwell's equations in a polyhedron: a density result

Abstract. *In this Note, it is proven that, in a polyhedral domain Ω of $\mathbb{R}^3$, smooth fields are dense in the subspaces of $\mathrm{H}(\mathbf{curl}, \mathrm{div}\,; \Omega)$ whose elements have either their tangential trace, or their normal trace, in $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$. To that aim, an explicit knowledge of the singularities of the Laplacian is required. This should allow to solve with nodal, H^1-conforming, finite elements, Maxwell's equations with an impedance condition on the boundary. The proofs are detailed in* [8] *(in French).* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

In this Note, we prove that smooth functions are dense in functional spaces which are commonly used for solving Maxwell's equations. Precisely, we consider the electromagnetic field in a bounded domain Ω, with an impedance condition on its boundary. Numerically, the aim is to discretize such a problem with the help of nodal, H^1-conforming, finite elements (*see* [2] and [4]).

It is assumed that Ω is a polyhedron embedded in $\mathbb{R}^3$, with a Lipschitz-continuous boundary $\partial\Omega$. Its faces are denoted by $(\Gamma_j)_{1\leq j\leq F}$ and its outside exterior normal is called $\mathbf{n}$ (in the sequel, the case when Ω is a polygon of the plane is also considered).

A priori, the electric field $\mathbf{E}$ and the magnetic induction $\mathbf{B}$ belong to $\mathrm{H}(\mathbf{curl}, \mathrm{div}\,; \Omega)$, and the tangential trace of $\mathbf{E}$ (resp. the normal trace of $\mathbf{B}$) is in $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)^3$ (resp. $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$). If one chooses to

Note présentée par Roland GLOWINSKI.

discretize the problem with Nédélec's $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)$-conforming finite elements, it is possible to use the density of smooth functions in $Y = \{\mathbf{v} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega);\ \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{|\partial\Omega} \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)^3\}$, which has been obtained in [3]. Here, we prove instead the density of smooth functions in

$$W = \{\mathbf{v} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}, \mathrm{div}\,;\Omega);\ \mathbf{v}\times\mathbf{n}_{|\partial\Omega} \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)^3\},\ V = \{\mathbf{v} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}, \mathrm{div}\,;\Omega);\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{|\partial\Omega} \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)\}.$$

Both results ([3] and this note) are fondamentally different in the following sense. In terms of scalar potential, in Y, this amounts among other things to prove that $\mathrm{H}^2(\Omega)$ is dense in $\{\chi \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,;\ \chi_{|\partial\Omega} \in \mathrm{H}^1(\partial\Omega)\}$. Similarly, for W, one has to establish the density of $\mathrm{H}^2(\Omega)$ in $\{\chi \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,;\ \Delta\chi \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \chi_{|\partial\Omega} \in \mathrm{H}^1(\partial\Omega)\}$.

It is therefore necessary to control the L^2-norm of the Laplacian of the functions χ and this is only achieved by taking explicitly into account the singularities of the Laplacian operator.

The result which is proven hereafter is the

THEOREM. – *For $d = 2$ or 3, $\mathrm{H}^1(\Omega)^d$ is dense in V.*

Following [5], we know that $V = W$ and, as a consequence, we have the

COROLLARY. – *For $d = 2$ or 3, $\mathrm{H}^1(\Omega)^d$ is dense in W.*

The above Theorem is proved with the help of a second result: let $H = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)/\mathbb{R}\,;\ \Delta u \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \partial_{\mathbf{n}} u_{|\partial\Omega} \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)\}$, then one has the

THEOREM. – *$\mathrm{H}^2(\Omega)/\mathbb{R}$ is dense in H.*

In order to obtain this second result, one has to consider the singularities of the Laplace operator. To that aim, we introduce (*see* [7]) the functional space N which is orthogonal in $\mathrm{L}^2(\Omega)$ to the range of $\{u \in \mathrm{H}^2(\Omega);\ \partial_{\mathbf{n}} u_{|\partial\Omega} = 0\}$ by Δ:

$$\mathrm{L}^2(\Omega) = \Delta\{u \in \mathrm{H}^2(\Omega);\ \partial_{\mathbf{n}} u_{|\partial\Omega} = 0\} \overset{\perp}{\oplus} N.$$

When Ω is convex (or with a smooth boundary), N is reduced to the set of constant functions. In the general case, the properties which are satisfied by elements of N allow to show the

PROPOSITION. – *An element g of N such that $g_{|\Gamma_j} \in \mathrm{L}^2(\Gamma_j)$, for $1 \leq j \leq F$, is constant.*

1. Introduction

Dans cette Note, nous nous proposons de démontrer un résultat de densité des fonctions régulières dans les espaces fonctionnels utilisés pour résoudre les équations de Maxwell. Précisément, nous modélisons le champ électromagnétique dans un domaine Ω borné contenant un matériau homogène et isotrope, avec une condition d'impédance sur le bord du domaine. Numériquement, le but est de discrétiser le problème ainsi posé à l'aide des éléments finis nodaux conformes dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ (*voir* [2] et [4]).

On suppose que Ω est un polyèdre inclus dans $\mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne, et on note $(\Gamma_j)_{1\leq j\leq F}$ ses faces et $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure (dans la suite, on considère également le cas où Ω est un polygone du plan).

A priori, le champ électrique $\mathbf{E}$ et l'induction magnétique $\mathbf{B}$ appartiennent à $\mathrm{H}(\mathbf{rot}, \mathrm{div}\,;\Omega)$, et la trace tangentielle de $\mathbf{E}$ (resp. la trace normale de $\mathbf{B}$) se trouve dans $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)^3$ (resp. $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$). Si l'on choisit de considérer les éléments finis de Nédélec conformes dans $\mathrm{H}(\mathbf{rot};\Omega)$, on peut utiliser le résultat de densité des fonctions régulières dans $Y = \{\mathbf{v} \in \mathrm{H}(\mathbf{rot};\Omega);\ \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{|\partial\Omega} \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)^3\}$ qui a été démontré dans [3]. Ici, nous démontrons la densité des fonctions régulières dans

$$W = \{\mathbf{v} \in \mathrm{H}(\mathbf{rot}, \mathrm{div}\,;\Omega)\,;\ \mathbf{v}\times\mathbf{n}_{|\partial\Omega} \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)^3\} \text{ et } V = \{\mathbf{v} \in \mathrm{H}(\mathbf{rot}, \mathrm{div}\,;\Omega)\,;\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{|\partial\Omega} \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)\}.$$

Ce qui différencie de manière fondamentale ces deux résultats ([3] et *infra*), peut être résumé comme suit. En termes de potentiel scalaire, dans Y, ceci revient (entre autres) à prouver que $\mathrm{H}^2(\Omega)$ est dense dans $\{\chi \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,;\ \chi_{|\partial\Omega} \in \mathrm{H}^1(\partial\Omega)\}$. En transposant, pour W, on doit donc arriver à la densité de $\mathrm{H}^2(\Omega)$ dans $\{\chi \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,;\ \Delta\chi \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \chi_{|\partial\Omega} \in \mathrm{H}^1(\partial\Omega)\}$. Il est alors nécessaire de contrôler le laplacien des fonctions χ en norme L^2 et, par là-même, de prendre en compte explicitement les singularités du laplacien.

Le résultat que nous nous proposons de démontrer est :

THÉORÈME 1.1. – *Pour $d = 2$ ou 3, $\mathrm{H}^1(\Omega)^d$ est dense dans V.*

D'après [5], on sait que $V = W$, et on a donc :

COROLLAIRE 1.2. – *Pour $d = 2$ ou 3, $\mathrm{H}^1(\Omega)^d$ est dense dans W.*

Pour prouver le théorème 1.1 énoncé ci-dessus, nous nous appuyons sur un second résultat : soit $H = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)/\mathbb{R}\,;\ \Delta u \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \partial_{\mathbf{n}} u_{|\partial\Omega} \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)\}$, alors :

THÉORÈME 1.3. – *$\mathrm{H}^2(\Omega)/\mathbb{R}$ est dense dans H.*

Afin d'arriver à ce second résultat, il faut considérer les singularités du laplacien. Pour cela, on introduit (*voir* [7]) l'espace fonctionnel N, orthogonal dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ à l'image par l'opérateur Δ de $\{u \in \mathrm{H}^2(\Omega)\,;\ \partial_{\mathbf{n}} u_{|\partial\Omega} = 0\}$:

$$\mathrm{L}^2(\Omega) = \Delta\{u \in \mathrm{H}^2(\Omega)\,;\ \partial_{\mathbf{n}} u_{|\partial\Omega} = 0\} \overset{\perp}{\oplus} N.$$

Lorsque Ω est convexe (ou à frontière régulière), N est réduit à l'ensemble des fonctions constantes. En toute généralité, la connaissance des propriétés des éléments de N nous permet de montrer :

PROPOSITION 1.4. – *Un élément g de N tel que $g_{|\Gamma_j} \in \mathrm{L}^2(\Gamma_j)$, pour $1 \leq j \leq F$, est constant.*

Ce dernier résultat nous permettra de prouver le théorème 1.3, et en conséquence le principal résultat de densité suivra.

Le plan comprend donc deux parties. Dans la première, on montre comment se ramener à la proposition qui est établie dans la seconde partie.

2. À la recherche des singularités

Rappelons que l'objet de cette Note est de prouver que :

THÉORÈME 2.1. – *Pour $d = 2$ ou 3, $\mathrm{H}^1(\Omega)^d$ est dense dans V.*

Démonstration. – On munit V de la norme :

$$\|\mathbf{v}\|_V = \left(\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{rot}\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathrm{div}\,\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\|_{0,\partial\Omega}^2\right)^{1/2}.$$

Soit maintenant $\mathbf{v} \in V$: il existe $\mathbf{v}' \in \mathrm{H}^1(\Omega)^d$ tel que (*voir* [6]) :

$$\mathbf{rot}\mathbf{v}' = \mathbf{rot}\mathbf{v} \text{ dans } \Omega \text{ et } \mathrm{div}\,\mathbf{v}' = 0 \text{ dans } \Omega.$$

En particulier, $\mathbf{rot}(\mathbf{v}-\mathbf{v}') = 0$ et, par voie de conséquence, il existe $p \in \mathrm{H}^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \nabla p$. Par construction, $p \in H$. Comme on va le montrer dans un second temps (théorème 2.2), $\mathrm{H}^2(\Omega)/\mathbb{R}$

est dense dans H. Si on appelle $(p_k)_k$ une suite d'éléments de $\mathrm{H}^2(\Omega)/\mathbb{R}$ qui converge vers p dans H, $(\nabla p_k)_k$ converge vers ∇p dans V, d'où le résultat. □

Il s'agit donc d'arriver au résultat qui suit.

THÉORÈME 2.2. – $\mathrm{H}^2(\Omega)/\mathbb{R}$ *est dense dans* H.

Démonstration. – On munit H de la norme $|u|_H = \left(||\Delta u||^2_{0,\Omega} + ||\partial_{\mathbf{n}} u||^2_{0,\partial\Omega}\right)^{1/2}$ dont on peut vérifier qu'elle est équivalente à la norme canonique. On considère f appartenant à l'orthogonal de $(\mathrm{H}^2(\Omega)/\mathbb{R})$ pour le produit scalaire associé à $|\cdot|_H$, i. e.

$$(\Delta f, \Delta v)_{0,\Omega} + (\partial_{\mathbf{n}} f, \partial_{\mathbf{n}} v)_{0,\partial\Omega} = 0, \ \forall v \in \mathrm{H}^2(\Omega)/\mathbb{R}.$$

D'après la définition de N, on en déduit en particulier que $g = \Delta f \in N$.

À l'aide des techniques de relèvement oblique tirées de [1], on peut construire, pour une face Γ_j donnée, un relèvement continu de la trace, de $\mathcal{D}(\Gamma_j)$ à valeurs dans $\{v \in \mathrm{H}^2(\Omega)\,;\, v_{|\Gamma_k} = 0$ pour $k \neq j$, $\partial_{\mathbf{n}} v_{|\partial\Omega} = 0\}$. Ceci permet de définir la trace de la dérivée normale d'un élément de N au sens des distributions sur Γ_j. On obtient :

$$\Delta g = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \partial_{\mathbf{n}} g_{|\Gamma_j} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Gamma_j),\ 1 \leq j \leq F.$$

Grâce à l'appartenance de f à $(\mathrm{H}^2(\Omega)/\mathbb{R})^{\perp_H}$ et de g à N, en utilisant cette fois, pour la face Γ_j, un relèvement continu de la trace de la dérivée normale, de $\mathcal{D}(\Gamma_j)$ à valeurs dans $\{v \in \mathrm{H}^2(\Omega)\,;\, v_{|\partial\Omega} = 0,\ \partial_{\mathbf{n}} v_{|\Gamma_k} = 0$ pour $k \neq j\}$, on arrive à :

$$g_{|\Gamma_j} = -\partial_{\mathbf{n}} f_{|\Gamma_j} \in \mathrm{L}^2(\Gamma_j),\ 1 \leq j \leq F.$$

Comme on le verra dans la dernière partie (proposition 3.1), on en déduit que g est égal à une constante λ. D'après la condition de compatibilité sur f, $\lambda = 0$. Ainsi $|f|_H = 0$. □

3. De l'utilisation explicite des singularités

À l'aide de la connaissance précise des singularités, on va démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1. – *Un élément* g *de* N *tel que* $g_{|\Gamma_j} \in \mathrm{L}^2(\Gamma_j)$, *pour* $1 \leq j \leq F$, *est constant.*

Comme la nature des singularités est différente selon que le domaine Ω se trouve dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$, nous allons considérer ces deux cas séparément. Notons que, pour conclure les preuves, nous utilisons un résultat de densité (*voir* [8]), à savoir que l'espace $\Pi_{j=1}^F \mathcal{D}(\Gamma_j)$ est dense dans $\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$.

Démonstration de la proposition 3.1 ($d = 2$). – Supposons (ce qui ne réduit pas la généralité de la preuve), qu'il existe un unique coin rentrant d'angle au sommet $\omega > \pi$. D'après [7], en coordonnées polaires, on peut écrire g sous la forme :

$$g = A\,\eta(r)\,r^{-\frac{\pi}{\omega}} \cos\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right) + g_R, \text{ avec } g_R \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ A \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

où $\eta \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[)$ est une fonction de troncature (égale à un dans un voisinage de zéro). Par hypothèse, $(g - g_R)_{|\Gamma_j} \in \mathrm{L}^2(\Gamma_j)$, ce qui implique $A = 0$. On en déduit que $g \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. En conséquence, $\partial_{\mathbf{n}} g_{|\partial\Omega} \in \mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$. Or on sait que $\partial_{\mathbf{n}} g_{|\Gamma_j} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Gamma_j)$, pour $1 \leq j \leq F$: la densité de $\Pi_{j=1}^F \mathcal{D}(\Gamma_j)$ dans $\mathrm{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ nous amène alors à $\partial_{\mathbf{n}} g_{|\partial\Omega} = 0$. Comme de plus $g \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ et $\Delta g = 0$, on en conclut que g est constant dans Ω. □

Dans ce qui suit, on utilisera le fait que tout élément h de N appartient à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}\setminus\mathcal{V})$ pour tout voisinage $\mathcal{V}$ des arêtes et sommets de $\partial\Omega$ et que, par ailleurs, au voisinage d'une arête ou d'un sommet convexes, h est localement de régularité H^1.

Démonstration de la proposition 3.1 ($d = 3$). – Au vu de la régularité des éléments de N, nous procédons en deux temps, en considérant tout d'abord le comportement de g au voisinage des arêtes rentrantes, avant de conclure par le comportement au voisinage des sommets rentrants.

Au voisinage des arêtes rentrantes : On se place au voisinage d'une arête, d'angle diédrique $\omega > \pi$, que l'on suppose être portée par l'axe Oz. Soit $\mathcal{V} = \Omega' \times [a, b]$, tel que Ω' est un polygone dont le seul coin rentrant est situé à l'origine ($\partial\Omega' = \bigcup_{1\leq j\leq F'}\overline{\Gamma}'_j$), et tel que $\mathcal{V} \subset \overline{\Omega}$, sans toutefois que $\mathcal{V}$ contienne d'autres arêtes ou des sommets de $\partial\Omega$. On appelle Q le cylindre infini $\Omega' \times \mathbb{R}$.

Le but est maintenant de se ramener localement au cas $d = 2$. Pour cela, soit une fonction de troncature $\varphi(r, \theta, z) = \chi(z)\,\eta(r)$ (en coordonnées cylindriques), avec $\chi \in \mathcal{D}(]a, b[)$ et $\chi(z) = 1$ pour $z \in [a', b']$, $a < a' < b' < b$, et η la fonction de troncature du cas bidimensionnel. En conséquence, g et $g\,\varphi$ ont même régularité au voisinage de l'arête. Par construction, $\partial_{\mathbf{n}}\varphi_{|\partial\Omega} = 0$: ainsi $\partial_{\mathbf{n}}w_{|\partial\Omega} = 0$ implique $\partial_{\mathbf{n}}(w\,\varphi)_{|\partial\Omega} = 0$.

Maintenant, pour $\lambda \neq 0$ fixé, on pose $N(Q) = \{q \in \mathrm{L}^2(Q)\,;\,(q, (\Delta - \lambda^2)v)_{0,Q} = 0\ \forall v \in \mathrm{H}^2(Q),\ \partial_{\mathbf{n}}v_{|\partial Q} = 0\}$. L'introduction de λ permet d'éviter les difficultés liées au fait que Q est non borné. À partir de là, on peut prouver (*voir* [8]) que

$$g\,\varphi = g^* + g^1,\ (g^*, g^1) \in N(Q) \times \mathrm{H}^1(Q).$$

Montrons que $g^* = 0$ par l'intermédiaire d'une transformation de Fourier partielle par rapport à z (*voir* [7]) : $v \in \mathrm{L}^2(Q)$ étant donnée, on pose :

$$\widehat{v}(x', \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} v(x', z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi z}\,\mathrm{d}z, \text{p.p. tout } x' \in \Omega'.$$

Si on définit $N_\zeta = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega')\,;\,(u, (\Delta - \zeta^2)w)_{0,\Omega'} = 0\ \forall w \in \mathrm{H}^2(\Omega'),\ \partial_{\mathbf{n}}w_{|\partial\Omega'} = 0\}$, on peut prouver, à l'aide de techniques classiques, que pour tout élément v de $N(Q)$, $\widehat{v}(\cdot, \xi) \in N_\zeta(\Omega')$ p.p. tout $\xi \in \mathbb{R}$, avec $\zeta^2 = \lambda^2 + \xi^2$. On est donc revenu au cas $d = 2$.

Maintenant, comme $g^* = g\,\varphi - g^1$, la trace de g^* sur $\Gamma'_j \times \mathbb{R}$, notée $\gamma_j g^*$, appartient à $\mathrm{L}^2(\Gamma'_j \times \mathbb{R})$, pour $1 \leq j \leq F'$. Par ailleurs, on peut montrer que, au sens des distributions semi-tempérées, $\widehat{g^*}(\cdot, \xi)_{|\Gamma'_j} = \widehat{\gamma_j g^*}(\cdot, \xi) \in \mathrm{L}^2(\Gamma'_j)$, p. p. tout $\xi \in \mathbb{R}$. Comme les éléments de N et de N_ζ ont même comportement singulier, on peut encore décomposer $\widehat{g^*}(\cdot, \xi)$ sous la forme (1), avec $A = A(\xi)$, p. p. tout $\xi \in \mathbb{R}$. La condition de régularité sur $\partial\Omega'$ impose à nouveau $A(\xi) = 0$. Ainsi, $\widehat{g^*}(\cdot, \xi) \in \mathrm{H}^1(\Omega')$ et, comme λ est non nul, on arrive à $\widehat{g^*}(\cdot, \xi) = 0$, p. p. tout $\xi \in \mathbb{R}$. Par transformation de Fourier inverse, on obtient finalement que $g^* = 0$ et $g\,\varphi = g^1 \in \mathrm{H}^1(Q)$.

Propriété d'orthogonalité étendue pour g : On sait maintenant que $g\,\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ pour toute fonction φ régulière dont le support ne contient aucun sommet. Ceci nous permet d'élargir l'espace des fonctions qui sont orthogonales dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ à g. En effet, soit

$$\mathcal{H} = \{w \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,;\ \Delta w \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \partial_{\mathbf{n}}w_{|\partial\Omega} = 0,\ w \equiv 0 \text{ au voisinage des sommets}\}.$$

Alors $(g, \Delta w)_{0,\Omega} = 0$, pour tout $w \in \mathcal{H}$: pour un tel w, on choisit $m \in \mathbb{N}$ tel que w est nul dans $\bigcup_{k=1}^{S} B(M_k, 1/m)$, où $(M_k)_{1\leq k\leq S}$ sont les sommets de $\partial\Omega$. On considère $\varrho = \varrho(r) \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[)$, nulle au voisinage de zéro et égale à un sur $[1, +\infty[$, et on pose $\varphi = \Pi_{k=1}^{S}\varrho(m\,r_k)$, où r_k est la distance à M_k. Alors, $g\,\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ (cas des arêtes) et coïncide avec g sur le support de w.

À partir de là, on a $(g, \Delta w)_{0,\Omega} = (g\,\varphi, \Delta w)_{0,\Omega} = (\Delta(g\,\varphi), w)_{0,\Omega}$ par une double intégration par parties, justifiée par le résultat de densité évoqué au début de cette partie. Sur le support de w, on a $\Delta(g\,\varphi) = \Delta g = 0$, d'où le résultat.

Au voisinage des sommets rentrants : Nous allons maintenant choisir des éléments w de $\mathcal{H}$ ad hoc. Soit M_k le sommet considéré. Jusqu'à une distance $R > 0$ de M_k, Ω est confondu avec un cône C_R de sommet M_k. On note G l'intersection du prolongement de C_R avec la sphère unité S^2 de centre M_k, et on considère l'opérateur de Laplace–Beltrami Δ_{S} sur S^2. L'opérateur défini sur $\mathrm{L}^2(G)$, qui coïncide formellement avec $-\Delta_{\mathrm{S}}$ et dont le domaine est associé à la condition de Neumann homogène sur ∂G est auto-adjoint à résolvante compacte. En conséquence, ses valeurs propres $(\lambda_l)_{l\geq 0}$, ordonnées par ordre croissant $(\lim_{l\to\infty} \lambda_l = +\infty)$, sont telles que $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_l > 0$, pour $l > 0$. De plus, soient $(\psi_l)_{l\geq 0}$ les vecteurs propres associés : $(\psi_l)_{l\geq 0}$ est une base orthonormée de $\mathrm{L}^2(G)$. Comme $g \in \mathrm{L}^2(C_R) = \mathrm{L}^2(0, R; \mathrm{L}^2(G))$, on a

$$g(r,\theta,\varphi) = \sum_{l\geq 0} g_l(r)\,\psi_l(\theta,\varphi), \text{ avec } g_l = (g, \psi_l)_{0,G}.$$

Soit $\chi \in \mathcal{D}(0, R)$ quelconque : on pose $w(r,\theta,\varphi) = \chi(r)\,\psi_l(\theta,\varphi)$. Par construction $w \in \mathcal{H}$. De la propriété d'orthogonalité étendue, en remarquant que $\Delta w = r^{-2}\{\chi'' + 2r\,\chi' - \lambda_l\,\chi\}\,\psi_l$, on déduit $r^2\,g_l'' + 2r\,g_l' - \lambda_l\,g_l = 0$ dans $\mathcal{D}'(0, R)$, pour $l \geq 0$. À l'aide de $g \in \mathrm{L}^2(C_R)$, la résolution de ces équations différentielles donne :

$$g(r,\theta,\varphi) = \frac{b_0}{r} + \sum_{1\leq l\leq l_0} b_l r^{\alpha_l^-}\,\psi_l(\theta,\varphi) + a_0 + \sum_{l\geq 1} a_l\,r^{\alpha_l^+}\,\psi_l(\theta,\varphi), \text{ avec } \alpha_l^{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda_l}.$$

Ici, l_0 est tel que $\alpha_l^- > -3/2$ si et seulement si $l \leq l_0$. La condition $g_{|\Gamma_j} \in \mathrm{L}^2(\Gamma_j)$, $1 \leq j \leq F$, nous permet d'éliminer les termes en $r^{-(1+\gamma)}$, $\gamma > 0$: $b_l = 0$ pour $0 \leq l \leq l_0$. Ensuite, on remarque que chaque terme appartient à $\mathrm{H}^1(G)$. Par ailleurs, d'après [7], $\|r^{\alpha_l^+}\,\psi_l\|_{1,C_R} = \mathcal{O}(l\,R^{\alpha_l^+})$ et, comme $g(R,\cdot,\cdot) \in \mathrm{L}^2(G)$, $\sum_{l\geq 1} R^{2\alpha_l^+}\,a_l^2 < \infty$. Par conséquent, pourvu que $0 < R' < R$, $\|g\|_{1,C_{R'}} < \infty$. Ainsi, g est bien de régularité H^1 au voisinage des sommets rentrants.

En conclusion, $g \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, et la preuve s'achève comme dans le cas $d = 2$. □

Références bibliographiques

[1] Assous F., Ciarlet P., Jr., Une caractérisation de l'orthogonal de $\Delta(\mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega))$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, C. R. Acad. Sc. Paris t. 325 Série I (1997) 605–610.

[2] Assous F., Degond P., Heintzé E., Raviart P.-A., Segré J., On a finite element method for solving the three-dimensional Maxwell equations, J. Comput. Phys. 109 (1993) 222–237.

[3] Ben Belgacem F., Bernardi C., Costabel M., Dauge M., Un résultat de densité pour les équations de Maxwell, C. R. Acad. Sc. Paris t. 324 Série I (1997) 731–736.

[4] Bonnet-Ben Dhia A.-S., Hazard C., Lohrengel S., A singular field method for the solution of Maxwell's equations in polyhedral domains, SIAM J. Appl. Math. (à paraître).

[5] Costabel M., A remark on the regularity of solutions of Maxwell's equations on Lipschitz domains, Math. Meth. Appl. Sci. 12 2 (1990) 365–368.

[6] Girault V., Raviart P.-A., Finite element methods for Navier Stokes equations, Series in Computational Mathematics 1341, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[7] Grisvard P., Singularities in boundary value problems, RMA 22, Masson, Paris, 1992.

[8] Lohrengel S., Étude mathématique et résolution numérique des équations de Maxwell dans un domaine non régulier, Thèse de l'Université Paris VI (à paraître).