# Homogénéisation périodique

Sonia Fliss (ENSTA)
François Alouges (Polytechnique)

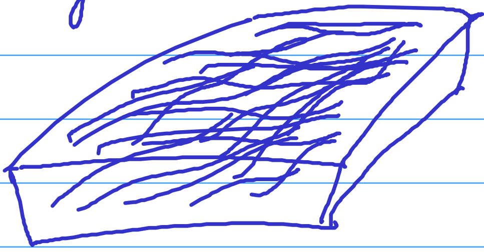
Page web → Sonia (à jour bientôt)
Notes de cours

7 cours magistraux
2 séances de TP → énoncé de TP (Matlab)
└→ compte rendus

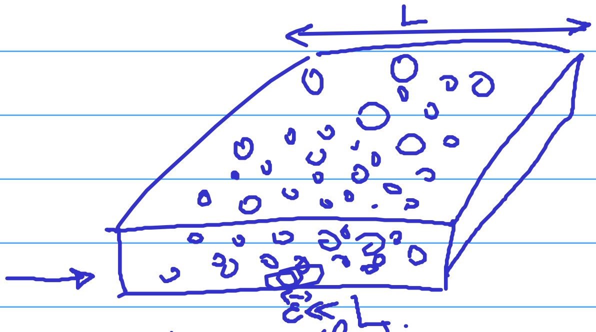
Note finale : souvent mélange 2 CR + Examen

# Homogénéisation périodique

Théorie mathématique visant à modéliser des matériaux hétérogènes



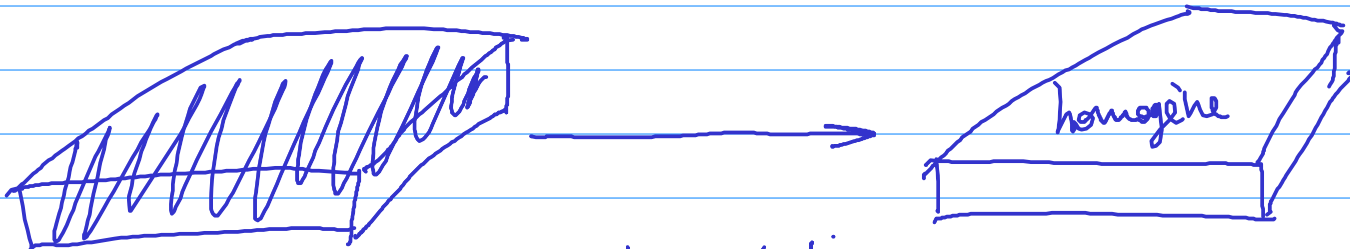
laine de verre
fibres + air




Matériau élastique
+ bulles d'air

Point commun:

- Matériau très hétérogène (plusieurs constituants)
- Pb physique (EDP)
- Chacun des constituants est connu
- Comportement du mélange

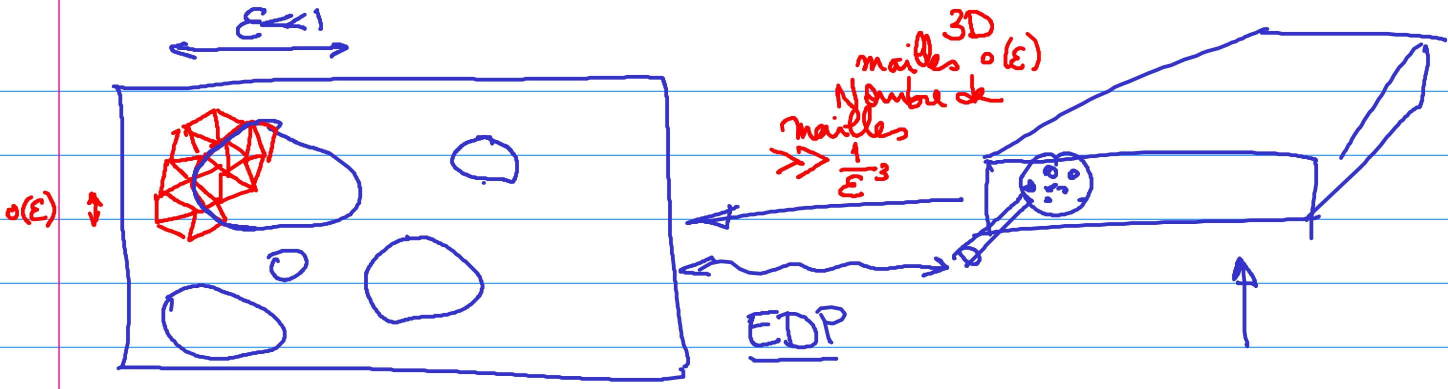



- EDPs est connue(s) dans chacun des matériau
- Répartition (échelle) est aussi connue $\varepsilon \ll 1$

Homogénéisation $\varepsilon \to 0$ EDP ?

Propriétés

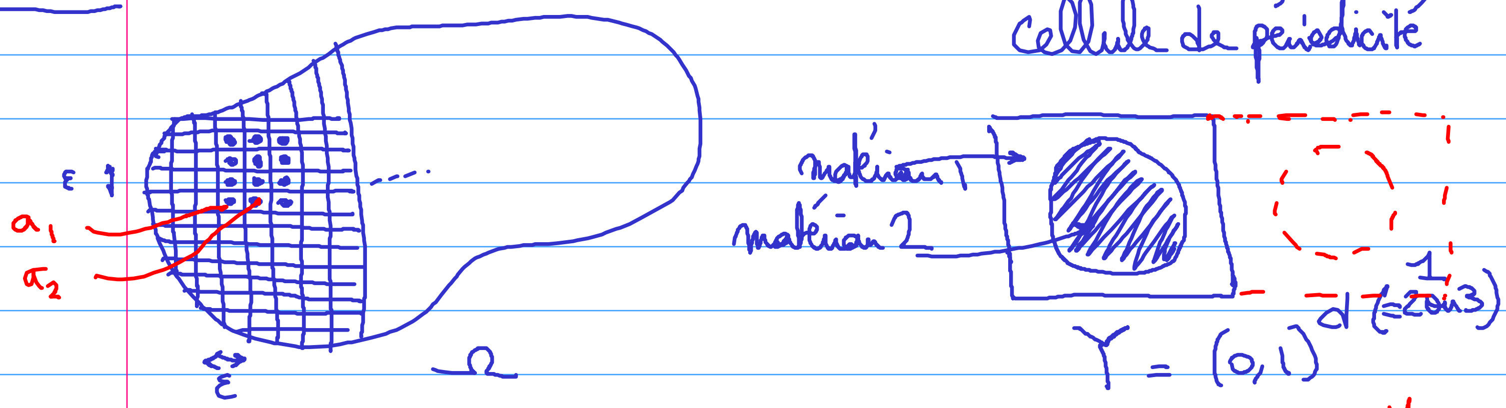
Applications nombreuses : Fabrication additive
Microstructure




En pratique maillages monstrueux

Périodique : (+ simple)
La microstructure est périodique

Notations




$Y = (0,1)^d$ ($= 2$ ou $3$)

Equation : (+ simple possible)

$$\bar{a}(y) = \begin{cases} a_1 & \text{si } y \in M_1 \\ a_2 & \text{si } y \in M_2 \end{cases}$$

$$-\operatorname{div}\left(a(x)\nabla u\right) = f$$

$a(x)$ : Conductivité thermique

$f$ : source

diffusion + périodique

Dans ce cours $a(x) = \underbrace{\bar{a}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}$ où $\bar{a} : Y \to \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \varepsilon$ périodique

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\bar{a}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f & \Omega \\ \text{C.L} \quad u_\varepsilon = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

$\varepsilon \to 0$ ?

Lorsque $\varepsilon \to 0$ a-t-on $u_\varepsilon \xrightarrow{?} u_0$, dans quel sens ? quelle est l'équation satisfaite par $u_0$ ?

---

Rappels sur les méthodes variationnelles pour l'équation de diffusion (coefficients non constants).

$$\left| \begin{array}{l} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = f \\ \text{C.L} \quad \text{Dirichlet} \\ \quad\quad\; \text{Neumann} \quad (\text{Fourier-Robin}) \\ \quad\quad\; \text{Périodique} \end{array} \right.$$

- Ces problèmes sont toujours réécrits sous forme variationnelle
- On résout ces FV avec le théorème de Lax-Milgram

Recettes standards :
- On multiplie par une $f^n$ test et on intègre par parties (Formule de Green)
- Les C.L de type Dirichlet sont mise dans l'espace de Hilbert
- Lorsque l'on ne met pas de condition dans l'espace de Hilbert $\rightsquigarrow$ C.L de Neumann

On réécrit le problème sous F.V.

(1) $\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tq } \forall v \in V \\ \quad a(u,v) = \ell(v) \end{array}\right.$

où $V$ est un espace de Hilbert, $a$ bilinéaire continue coercive sur $V$
$\ell$ est linéaire continue sur $V$

Cadre standard pour appliquer le Th. de Lax-Milgram.

__Th__ : Sous les hypothèse précédents, $\exists !$ u solution de (*) qui vérifie

$$\exists C \quad \forall \ell \qquad \|u\|_V \leq C \|\ell\|_{V'}$$

où

$$\|\ell\|_{V'} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\ell(v)}{\|v\|_V}$$

Dans nos applications $V \subset H^1(\Omega)$ espace de Sobolev (et $\Omega$ sera toujours un ouvert borné régulier)

$$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \ / \ \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\in \mathcal{D}'(\Omega)} \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, d \}$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1} = \int_\Omega u v \, dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

__Prop__ : $H^1(\Omega)$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

Avec ces outils, on peut résoudre le problème de Neumann

$$\left| \begin{array}{ll} u - \operatorname{div}(a(x) \nabla u) = f & \Omega \quad , f \in L^2(\Omega) \\ \underbrace{a(x) \frac{\partial u}{\partial n}}_{(a(x)\nabla u) \cdot n} = g & \end{array} \right.$$

__Rq__ : si $a(x) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la condition de Neumann est $(a(x) \nabla u) \cdot n = g$. c'est différent de $\frac{\partial u}{\partial n} = g$
$\underset{M \quad V}{}$

$\cancel{a(x) \frac{\partial u}{\partial n} = g}$

Stupide !!

$$\begin{cases} u - \operatorname{div}(\overset{>0}{a(x)}\nabla u) = f \\ (a(x)\nabla u)\cdot n = g \end{cases}$$

$V = H^1(\Omega)$

$\exists\, c, C > 0$

$\forall x \in \Omega \quad 0 < c \leq a(x) \leq C$

(si $a$ est une matrice

$0 < c\,\mathrm{Id} \leq a(x) \leq C\,\mathrm{Id}$)

les v.p. de $a$ sont toujours ds $[c, C]$

$v \in V$, on multiplie, on intègre.

$$\int_\Omega u v + \int_\Omega (a(x)\nabla u)\cdot\nabla v - \int_{\partial\Omega} \underbrace{(a(x)\nabla u)\cdot n}_{g}\, v = \int_\Omega f v$$

$$\underbrace{\int_\Omega u v + \int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla v}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f v + \int_{\partial\Omega} g v}_{\ell(v)}$$

$g \in L^2(\partial\Omega)$

continue sur $H^1$

continuité et coercivité de $a$ :

CS $\quad \left|\int u v\right| \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$

$$\left|\int a(x)\nabla u\cdot\nabla v\right| \leq C\,\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}$$

<u>Continuité</u>

$$|a(u,v)| \leq \max(1,C)\left(\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}\right)$$
$$\leq \max(1,C)\underbrace{\left(\|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}\right)}_{\|u\|_{H^1}}\underbrace{\left(\|v\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2}\right)}_{\|v\|_{H^1}}$$

<u>Coercivité</u>

$$a(u,u) = \int_\Omega u^2 + \int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla u \geq \min(1,c)\int_\Omega \left(u^2 + |\nabla u|^2\right)dx$$
$$= \min(1,c)\,\|u\|_{H^1}^2$$

**Trace :** Dans $H^1(\Omega)$ on peut parler de valeur au bord

$$\exists\, \gamma_0 : \begin{array}{ccc} H^1(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\partial\Omega) \\ u & \longmapsto & \gamma_0(u) \end{array}$$

qui prolonge la valeur au bord de $C(\bar{\Omega})$

$$\begin{array}{ccc} C(\bar{\Omega}) & \longrightarrow & C(\partial\Omega) \\ u & \longmapsto & u|_{\partial\Omega} \end{array}$$

$\exists\, C > 0,\ \forall u \in H^1(\Omega)$

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

- $\gamma_0$ n'est pas surjective sur $L^2(\partial\Omega)$

$$\gamma_0(H^1) = H^{1/2}(\partial\Omega)$$

(ce sont des fonctions " $\frac{1}{2}$ fois dérivables " dans $L^2$ sur le bord)

- On peut généraliser à $g \in \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)' = H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

A l'aide de l'application trace, on peut définir

$$H^1_0(\Omega) = \gamma_0^{-1}(\{0\}) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

$=$ " fonctions de $H^1(\Omega)$ qui sont nulles au bord "

**Densité :**
- $C_0^\infty(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$
- $C_0^\infty(\Omega)$ dense dans $H^1_0(\Omega)$, pas dense dans $H^1(\Omega)$
- $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ dense dans $H^1(\Omega)$

La trace permet aussi de résoudre le problème de Dirichlet (homogène)

$$\left| \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = f & \Omega \\ \underbrace{u = 0}_{\text{Dirichlet}} & \partial\Omega \end{array} \right. \qquad f \in L^2(\Omega) \quad 0 < c \leq a(x) \leq C$$

$V = \{ u \in H^1(\Omega), \text{ " } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ " } \}$
$V = H^1_0(\Omega)$

$v \in V$, on multiplie et on intègre. On trouve que $u$ doit vérifier

Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$, $\forall v \in H^1_0(\Omega)$ $\displaystyle\int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv$

On peut appliquer le théorème de Lax-Milgram.
On a besoin de l'inégalité de Poincaré (continuité de $\ell$)

$$\exists C_p \quad \forall u \in H^1_0(\Omega) \qquad \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq C_p \int_\Omega u^2$$

__CSQ:__ On peut équiper $H^1_0(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1_0} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

$H^1_0(\Omega)$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert, la norme induite est équivalente à la norme $H^1$ standard.

$\ell(v) = \displaystyle\int_\Omega fv$ est une forme linéaire continue sur $H^1_0$

C.S : $\forall v \in H^1_0(\Omega)$ $\left|\int_\Omega f v\right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{C_p}} \|f\|_{L^2}}_{C} \underbrace{\|\nabla v\|_{L^2}}_{\|v\|_{H^1_0}}$

Inégalité de Poincaré Wirtinger :

$\forall u \in H^1_0$ $\qquad \|\nabla u\|_{L^2} \geq C \|u\|_{L^2}$ $\qquad$ (Poincaré classique)

Faux dans $H^1$ en prenant $u = cte \neq 0$
ce sont les seules fonctions qui ne vérifient pas Poincaré

$$\dot{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \ / \ \int_\Omega u = 0 \right\}$$

. $\exists C \ \forall u \in \dot{H}^1(\Omega)$ $\qquad \|\nabla u\|_{L^2} \geq C \|u\|_{L^2}$ $\qquad$ P.W.

équivalent . $\exists C \ \forall u \in H^1(\Omega)$ $\qquad \underbrace{\|\nabla u\|_{L^2}}_{\nabla v} \geq C \underbrace{\left\| u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \right\|_{L^2}}_{=: v \in \dot{H}^1(\Omega)}$

Le problème de Neumann non coercif.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = f & (1) \\ (a(x)\nabla u)\cdot n = g \ \ (=0) & (2) \end{cases}$$

Pbs : . Il ne peut pas y avoir de solution unique
$u$ solution, $u + Cte$ est aussi solution
. On intègre (1) sur $\Omega$

$$\int_\Omega f \underset{(1)}{=} \int_\Omega -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = -\int_{\partial\Omega} (a(x)\nabla u)\cdot n \underset{(2)}{=} -\int_{\partial\Omega} g$$

Nécessairement, il va falloir une condition supplémentaire ($\int_\Omega f = -\int_{\partial\Omega} g$) pour espérer avoir une solution.

- $V = H^1(\Omega)$ (pas de condition de Dirichlet)

$v \in V$ on multiplie, on intègre. On trouve que $u$ vérifie :

$$\underbrace{\int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla v}_{} = \int_\Omega f v + \int_{\partial\Omega} g v$$

On n'a pas coercivité parce que l'on n'a pas d'inégalité de Poincaré sur $H^1(\Omega)$.

- $V = \dot{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \int u = 0\}$

même formulation variationnelle

sur $\dot{H}^1$ $\left(\int|\nabla u|^2\right)^{1/2}$ est une norme.

$\int a(x)\nabla u\cdot\nabla v$ est bilinéaire, continue, <u>coercive</u> sur $\dot{H}^1$

[Exo] <u>Théorème</u> : $\exists!\ u \in \dot{H}^1 \mid \forall v \in \dot{H}^1$

$$\int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla v = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} g v$$

<u>Preuve</u> : Appliquer Lax-Milgram

⚠ Cette solution vérifie-t-elle l'équation de départ ?

<u>Réponse</u> : • Oui à condition que $\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0$

• Sinon non

En effet, $u$ vérifie $\forall v \in \dot{H}$ $\int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla v = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv$

Soit $v \in C^\infty(\Omega) \not\subset \dot{H}^1(\Omega)$, on construit
$$w = v - \frac{1}{|\Omega|}\int v \in \dot{H}^1(\Omega)$$ (w est de moyenne nulle)

$$\int a(x)\nabla u \cdot \nabla w = \int_\Omega f w + \int_{\partial\Omega} g w$$

nul au bord

$$\Leftrightarrow \int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v - \frac{1}{|\Omega|}\int f \int v + \cancel{\int_{\partial\Omega} g v} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v \int_{\partial\Omega} g$$

$$= \int_\Omega f v \underbrace{- \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f \int_\Omega v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v \int_{\partial\Omega} g}_{=0}$$

- si $\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0$,

on retrouve l'équation classique

$$\forall v \in C^\infty \qquad \int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v$$

c'est-à-dire que $u$ vérifie $-\mathrm{div}\,(a(x)\nabla u) = f$ $\mathcal{D}'(\Omega)$

- sinon on a résolu

$$\int a(x)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega \left(f - \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g\right)\mathbb{1}(x)\right) v$$

autrement dit

$$-\mathrm{div}\,(a(x)\nabla u) = f(x) - \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g\right)\mathbb{1}(x) \quad \text{sur } \Omega$$
$\mathcal{D}'(\Omega)$

# Alternative de Fredholm :

On considère le problème

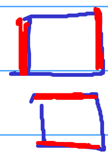
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = f & \in L^2 \\ (a(x)\nabla u)\cdot n = g = 0 & \in L^2(\partial\Omega) \end{cases}$$

alors on a l'alternative suivante :

- soit $\int_\Omega f + \cancel{\int_{\partial\Omega} g} = 0$, $\exists!$ solution $u \in H^1(\Omega)$ de ce problème (qu'on résout par Lax-Milgram)
- soit $\int_\Omega f + \cancel{\int_{\partial\Omega} g} \neq 0$ il n'y a pas de solution

# Conditions périodiques

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = f & \text{sur } Y = (0,1)^2 \\ u(0,y) = u(1,y) & \forall y \in (0,1) \\ u(x,0) = u(x,1) & \forall x \in (0,1) \\ (a(x)\nabla u\cdot n)(0,y) = -(a(x)\nabla u\cdot n)(1,y) \\ (a(x)\nabla u\cdot n)(x,0) = -(a(x)\nabla u\cdot n)(x,1) \end{cases}$$



F.V Trouver $u \in V$, $\forall v \in V$

$$\int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v$$

où $V = \{u \in H^1(\Omega) \;/\; u(0,y) = u(1,y),\ u(x,0) = u(x,1)\ \forall x,y \in (0,1)\}$

$= H^1_\#(\Omega)$

On prendra plutôt $V = \dot{H}^1_{\#}(\Omega) = \{u \in H^1_{\#}, \int u = 0\}$

[Exo] On a le même résultat qu'avant :

- Ou bien $\int f = 0$, $\exists ! u$ sol de $\dot{H}^1_{\#}(\Omega)$, toutes les autres solutions sont obtenues en ajoutant une constante
- Ou bien $\int f \neq 0$ et il n'y a pas de solution.

## I $\boxed{\text{Approximation par éléments finis des problèmes elliptiques}}$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

F.V. Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$, $\forall v \in H^1_0(\Omega)$ $\qquad V = H^1_0(\Omega)$

$$a(u,v) = \ell(v)$$

$$a(u,v) = \int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla v \ ; \quad \ell(v) = \int_\Omega f v$$

Méthode numérique permettant le calcul effectif d'une approximation $u_h$ de $u$

Approximation interne : $\cdot$ $V_h \subset V$ sous espace de dimension finie de $V$

$\cdot$ On résout

Trouver $u_h \in V_h$, $\forall v_h \in V_h$, $\quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$

$\exists!$ sol $u_h \in V_h$ de ce problème (Lax-Milgram)

On explicite une base de $V_h$ : $V_h = \text{vect}\{\varphi_i, \ i=1,\dots,N\}$
Les $\varphi_i$ s'appellent les fonctions de base.

Le problème variationnel discret devient un système linéaire

$$KU = b$$

$$K_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) \quad , \quad b_i = \ell(\varphi_i)$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x)$$

a est coercive $\Rightarrow$ K est définie positive
si a est symétrique $\Rightarrow$ K est symétrique

Pour mesurer l'erreur entre $u$ et $u_h$ on a le lemme de Céa :

<u>Lemme</u> (J. Céa) : $\exists C$ (ind de $\ell$) tq

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

<u>Preuve</u> :
$$a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$$
$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$
$$\Rightarrow a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Or comme a est coercive sur $V \supset V_h$

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u-u_h, u-u_h)$$
$$\leq a(u-u_h, u-u_h+v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

On prend $v_h = u_h - w_h$ où $w_h \in V_h$ est quelconque

$$\alpha \|u-u_h\|_V^2 \leq a(u-u_h, u-w_h) \leq M \|u-u_h\|_V \|u-w_h\|_V$$

on simplifie par $\|u-u_h\|_V$

$$\|u-u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u-w_h\|_V \qquad \forall w_h \in V_h$$

<u>Conclusion:</u> $\|u-u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \underbrace{\inf_{w_h \in V_h} \|u-w_h\|_V}_{\mathrm{dist}(u, V_h)}$ ne dépend pas du pb à résoudre

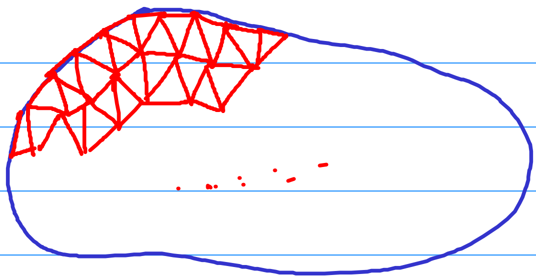
l'erreur d'approximation → dépend du pb à résoudre

$\mathrm{dist}(u, V_h)$ erreur d'interpolation

<u>Les éléments finis</u>

Consiste à proposer des espaces $V_h$ canoniques

(<u>Rappel</u> : $V_h \subset V \subset H^1(\Omega)$)



On construit un maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine

$$V_h = \{ u \in V \,/\, u|_K \text{ est polynomial de degré } \leq k \text{ sur } K, \forall K \subset \mathcal{T}_h \}$$
$$= P^k(\mathcal{T}_h).$$

[D. Braess : Finite elements]

$a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ <u>Estimations d'erreur</u>

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x)\nabla u) = f \\ \text{C.L.} \end{cases}$$ (⚠ il faudrait $a$ + régulier)

Lemme de Céa : $\underset{①}{\|u-u_h\|_{H^1}} \leq C \underset{②}{\inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_{H^1}}$

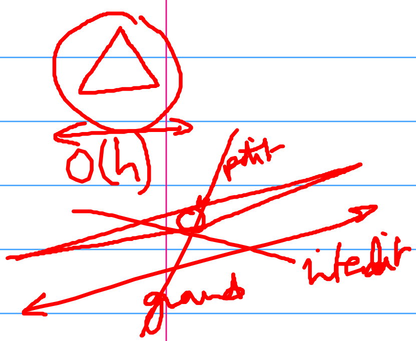
L'erreur d'interpolation (2) s'estime par

$V_h = P^{k}(\mathcal{T}_h)$

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1} \le C h^k |u|_{H^{k+1}}$$ où $C$ ne dépend pas de $h$

à condition que :

$\forall h > 0$ — $\mathcal{T}_h$ est une famille régulière de triangulations de $\Omega$




- $\displaystyle \sup_h \left( \sup_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\mathrm{diam}(K)}{h} \right) \le C_1$
- $\displaystyle \sup_h \sup_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\mathrm{diam}(K)}{\rho(K)} \le C_2$

avec $\rho(K)$ diamètre du cercle inscrit dans $K$.

— $u \in H^{k+1}(\Omega)$

Remarques :
- ça sert à quelque chose de faire du $P^2$ (ou $P^3$) seulement si la solution exacte est au moins $H^3$ (ou $H^4$)
- En utilisant le lemme de Céa et l'inégalité d'interpolation, on trouve

$$\|u - u_h\|_{H^1} \le C h^k |u|_{H^{k+1}}$$

On a également une estimation d'erreur $L^2$

- $\displaystyle \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{L^2} \le C h^{k+1} |u|_{H^{k+1}}$
- $\|u - u_h\|_{L^2} \le C h^{k+1} |u|_{H^{k+1}}$ Aubin-Nitsche

(⚠ pas une conséquence de Céa)