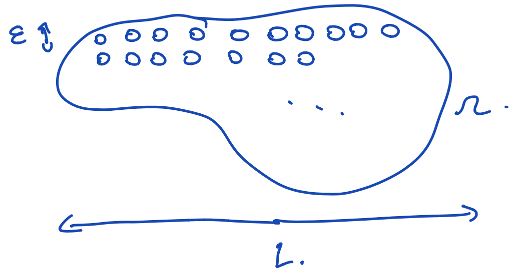
Homogénéisation de problèmes mono-dimensionnels.

1. Introduction générale de l'homogénéisation périodique

Soit un domaine / milieu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ contenant des hétérogénéités



ε : échelle des hétérogénéités. $\varepsilon << L \simeq 1$.
longueur carac. du domaine

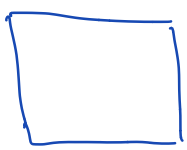
$A_\varepsilon(x) : \Omega \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$

$\rho_\varepsilon(x) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Dans ce cours A_ε et ρ_ε sont ε périodiques.

$\exists \underline{A}$ 1 périodique tq $A_\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ p.p $x \in \Omega$.

$\exists \underline{\rho}$ ——— — $\rho_\varepsilon(x) = \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ pp $x \in \Omega$.



$Y = (0,1)^n$.

$A : Y \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$.

$\rho : Y \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

On s'intéresse à la solution du pb elliptique.

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon + \rho_\varepsilon(x) u_\varepsilon = f \text{ ds } \Omega. \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Extension : EB et eq.

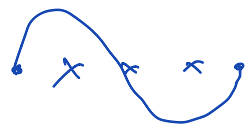
Question : Que peut on dire de u_ε qd la taille des hétérogénéités est petite ?

Simulations numériques : qd ε est petit, u_ε ressemble à une fct° qui ne semble pas voir l'échelle des hétérogénéités

Questions : • qd $\varepsilon \to 0$, u_ε cv vers u_0 ? Si oui dans quel sens ?

• Est ce que u_0 est solu° d'une EDP ? Est ce que cette EDP est du m̂ type que l'EDP de départ ? Peut on déterminer les coef de cette EDP ?

Motivations :
- Physiq : si le domaine a une géométrie simple, des calculs analytiq de la solu° macroscopique peuvent ê réalisés.
- Motiva° numérique : $\varepsilon << 1$ il est coûteux de calculer la solu° u_ε. , paramètre de discrétisa°/pas du maillage



$\underline{h \leq \varepsilon}$. $\underline{h} \sim \frac{\varepsilon}{4}$

permet d'avoir une bonne approx de u_ε.

L'homogénéisa° du pb permettrait de calculer efficacement le comportement macroscopique de la solution.

Dans ce cours, on étudie l'homogénéisation de problèmes 1D :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon). \begin{cases} -\left(a_\varepsilon(x)\, u_\varepsilon'(x)\right)' + \rho_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) = f(x) \text{ ds }]0,1[. \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0 \; . \end{cases}$$

$$]0,1[\, = (0,1)$$

où
- $f \in L^2(]0,1[)$
- $a_\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ où a est une fi° 1 périodiq., L^∞ et bornée inférieurement.
  - $\exists\, a^-, a^+ \quad 0 < a^- \leq a(x) \leq a^+$. pp x.
  - $a(x+1) = a(x)$ pp x.
- $\rho_\varepsilon(x) = \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ où ρ est une fi° 1 per.
  $\exists\, \rho^-, \rho^+ \quad 0 < \rho^- \leq \rho(x) \leq \rho^+$ pp x.

$(\mathcal{P}_\varepsilon)$ est bien posé (Th de Lax Milgram) dans $H^1_0(0,1)$: $\exists !\, u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

$$\exists C > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq C \|f\|_{L^2}.$$

2 - Cas 0-D.

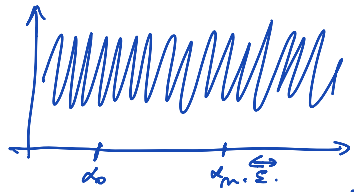
On suppose $\rho_\varepsilon = 0$. et oublions les op. diff.

On s'intéresse à $\quad -a_\varepsilon(x)\, u_\varepsilon(x) = f(x)$ dans $(0,1)$

$$\Rightarrow \quad u_\varepsilon(x) = -\frac{f(x)}{a_\varepsilon(x)}$$

Est-ce que u_ε a une limite ?

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{a_\varepsilon(x)} = \frac{1}{a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}.$$



__Théorème__ : Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ une fonction 1-périodique. $\forall \varepsilon > 0$, on définit $g_\varepsilon(x) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

alors $\forall I$ segment $\subset \mathbb{R}$ $\quad \forall h \in L^1(I)$ $\quad \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_I g_\varepsilon(x) h(x)\,dx = \langle g \rangle \int_I h(x)\,dx$

où $\langle g \rangle = \int_0^1 g(t)\,dt$.

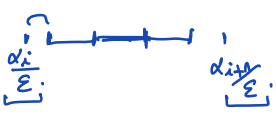
__Remarque__ : on dit que g cv L^∞ faible $*$ vers $\langle g \rangle$.

__Preuve__ : ① Supposons tout d'abord que h est constante par morceaux :

i.e. $\quad h(x) = h_i$ sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$.

avec $\quad \alpha_0 \le \alpha_1 \le \dots \le \alpha_n \quad I = (\alpha_0, \alpha_n)$.

$$\int_I g_\varepsilon(x) h(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} h_i \int_{\frac{\alpha_i}{\varepsilon}}^{\frac{\alpha_{i+1}}{\varepsilon}} g(y)\,dy.$$



$$= \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} h_i \Bigg[\underbrace{\int_{\frac{\alpha_i}{\varepsilon}}^{E\left(\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right)+1} g(y)\,dy}_{\le \|g\|_{L^\infty}} + \underbrace{\int_{E\left(\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right)+1}^{E\left(\frac{\alpha_{i+1}}{\varepsilon}\right)} g(y)\,dy}_{\langle g \rangle \left(E\left(\frac{\alpha_{i+1}}{\varepsilon}\right) - E\left(\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right) - 1\right)} + \underbrace{\int_{E\left(\frac{\alpha_{i+1}}{\varepsilon}\right)}^{\frac{\alpha_{i+1}}{\varepsilon}} g(y)\,dy}_{\le \|g\|_{L^\infty}} \Bigg].$$

$\varepsilon \to 0$. $\qquad \varepsilon \to 0$.

$$\underline{E\left(\frac{\alpha_{i+1}}{\varepsilon}\right) - E\left(\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right) - 1} = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\varepsilon} + O(1).$$

$$\int_I g_\varepsilon(x) h(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \sum_{i=0}^{n-1} h_i \cancel{\varepsilon} \langle g \rangle \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\cancel{\varepsilon}} = \langle g \rangle \int_I h.$$

* On conclut par densité de l'ens. des fonctions cpm dans L^1.

$\forall h \in L^1(I)$, $\exists (h_k)$ $\quad h_k \to h$ dans L^1 et h_k constante par morceaux.

$$\int_I g_\varepsilon h - \langle g \rangle \int_I h = \underbrace{\int_I g_\varepsilon h_k - \langle g \rangle \int_I h_k}_{} + \underbrace{\int_I g_\varepsilon (h - h_k)}_{} - \underbrace{\langle g \rangle \int_I (h - h_k)}_{}$$

<u>Preuve 2</u> : En écrivant $g_\varepsilon - \langle g \rangle$, on peut se ramener au cas où g est à moyenne nulle.

$I = (\alpha, \beta)$.

$G(x) = \int_\alpha^x g(t)\,dt$. Comme $\langle g \rangle = 0$ alors G est 1 périodiq.

en effet : $G(x+1) = \int_\alpha^{x+1} g(t)\,dt = \int_\alpha^x g(t)\,dt + \underbrace{\int_x^{x+1} g(t)\,dt}_{\langle g \rangle = 0}$.

$h \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$ $\int_\alpha^\beta g_\varepsilon(t)h(t)\,dt = \int_\alpha^\beta g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)h(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \left[\varepsilon G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]' h(t)\,dt$.

G'

$[G']\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \left[\varepsilon\, G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]'$

$= \underbrace{-\varepsilon \int_\alpha^\beta G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) h'(t)\,dt}$ $\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

car G périodiq $\Rightarrow$ G borné.
h bornée.

<u>Applic° à notre pb 0-D</u> : $u_\varepsilon(x) = \boxed{-\frac{f(x)}{a_\varepsilon(x)}} \xrightarrow{L^2} \underline{-\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle f}$

en effet : $\underline{\forall v \in L^2(0,1)}$. $\underbrace{\int_0^1 \frac{f(x)v(x)}{a_\varepsilon(x)}\,dx}_{(u_\varepsilon, v)_{L^2}}$ $\longrightarrow \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$.

$f(x)v(x) \in L^1$

on appliq le th avec $g = \frac{1}{a}$ et $h = fv$.

Soit $u^*(x) = -\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle f$. $\in L^2(0,1)$.

alors $u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u^*$ et u^* est sol° d'un pb 0-D du m̂ type.

$$-\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle^{-1} u^*(x) = f(x).$$

Ce qui apparaît c'est $\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle^{-1}$ et non $\langle a \rangle$!.

3- Rappels sur les cv fortes et faibles.

<u>Definition</u> : • on dit que $\underbrace{f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f^*}$ ssi $\forall \varphi \in L^2(\Omega)$ $\int_\Omega f_\varepsilon \varphi \longrightarrow \int_\Omega f^* \varphi$.

f_ε cv faible L^2 vers f^*.

• on dit que $\underbrace{f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f^*}$ ssi $\int_\Omega |f_\varepsilon - f^*|^2 \longrightarrow 0$.

f_ε cv fort L^2 vers f^*.

Proposition : si $f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f^*$ alors $f_\varepsilon \xrightharpoonup{L^2} f^*$

Preuve : Soit $\varphi \in L^2(\Omega)$ $\int_\Omega |f_\varepsilon \varphi - f^*\varphi| \leq \underbrace{\|f_\varepsilon - f^*\|_{L^2}}_{\to 0} \|\varphi\|_{L^2}$.

$$\int_\Omega (f_\varepsilon - f^*)\varphi \longrightarrow 0.$$

Proposition : si $f_\varepsilon \xrightharpoonup{L^2} f^*$ (*) et $\|f_\varepsilon\|_{L^2} \longrightarrow \|f^*\|_{L^2}$. (*).

alors $f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f^*$.

Preuve : $\int_\Omega |f_\varepsilon - f^*|^2 d\Omega = \underbrace{\int_\Omega |f_\varepsilon|^2}_{\to \|f^*\|^2} + \int_\Omega |f^*|^2 - 2\underbrace{\int f_\varepsilon f^*}_{\to \int |f^*|^2} \longrightarrow 0.$

Proposition : • (Banach-Steinhauss) si f_ε cv faible vers f^* alors (f_ε) est bornée

• Si (f_ε) est une suite bornée de L^2 alors on peut extraire une ss suite qui cv faible dans L^2.

Corollaire : • si (f_ε) suite bornée de H^1 alors on peut extraire une ss suite qui cv faiblement dans H^1. ($u_\varepsilon \xrightharpoonup{H^1} u$. si $\forall \varphi \in H^1$ $(u_\varepsilon, \varphi)_{H^1} \to (u, \varphi)_{H^1}$

[**Exercice** : $u_\varepsilon \xrightharpoonup{H^1} u$ alors $u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u$.
$\nabla u_\varepsilon \xrightharpoonup{L^2} \nabla u$.).

Théorème de Rellich : soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. frontière suffisamment régulière

si (f_ε) bornée dans H^1 alors on peut extraire une sous suite qui cv fortement dans L^2.

Exercice : si $u_\varepsilon \xrightharpoonup[H^1]{} u$. et $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ alors $u \in H^1_0(\Omega)$.

4- Problème 1D particulier. ($\ell = 0$).

On s'intéresse au pb Trouver $u_\varepsilon \in H^1_0(0,1)$.

$$-(a_\varepsilon(x)\, u_\varepsilon'(x))' = f(x) \text{ ds } (0,1).$$

On suppose $a_\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ avec a 1 per...

a_ε et f sont suffisamment réguliers.

Dans ce cas, on peut faire tous les calculs

$$u_\varepsilon'(x) = -\frac{1}{a_\varepsilon(x)}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{C_\varepsilon^{(1)}}{a_\varepsilon(x)}.$$

$$\Rightarrow \underline{u_\varepsilon(x)} = -\int_0^x\left[\frac{dy}{a_\varepsilon(y)}\int_0^y f(t)\,dt\right] + \int_0^x \frac{C_\varepsilon^{(1)}}{a_\varepsilon(y)}\,dy + C_\varepsilon^{(2)} \dots$$

- $u_\varepsilon(0) = 0 \Rightarrow C_\varepsilon^{(2)} = 0.$
- $u_\varepsilon(1) = 0 \Rightarrow C_\varepsilon^{(1)} = \left[\int_0^1 \frac{dy}{a_\varepsilon(y)}\int_0^y f(t)\,dt\right]\left[\int_0^1 \frac{dy}{a_\varepsilon(y)}\right]^{-1}.$

Passage à la limite :
- $\int_0^1 \frac{dy}{a_\varepsilon(y)} \longrightarrow \int_0^1 dy \,\langle \frac{1}{a}\rangle.$ $\quad 1 \in L^2(0,1).$
- $y \longmapsto \int_0^y f(t)\,dt \in L^1(0,1)$

$$\int_0^1 \frac{dy}{a_\varepsilon(y)}\int_0^y f(t)\,dt \longrightarrow \langle\frac{1}{a}\rangle\int_0^1 dy\int_0^y f(t)\,dt.$$

$w(y) = \int_0^y f(t)dt$

$$\Rightarrow C_\varepsilon^{(1)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \left[\langle\frac{1}{a}\rangle\int_0^1 dy\int_0^y f(t)\,dt\right]\left[\langle\frac{1}{a}\rangle\right]^{-1}$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^y f(t)\,dt =: C_0^{(1)}$$

$$u_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\langle\frac{1}{a}\rangle\int_0^x\int_0^y f(t)\,dt + C_0^{(1)}\langle\frac{1}{a}\rangle\int_0^x dy = u^*(x) :\dots$$

On peut montrer que $u^* \in H_0^1(0,1)$ est solution de

$$-a^* u^{*\prime\prime} = f \quad \text{ds } (0,1).$$

avec $a^* = \langle \frac{1}{a}\rangle^{-1}$

La cv simple $u_\varepsilon(x) \to u^*(x)$ $\forall x \in (0,1)$ implique une convergence forte L^2 d'après th de cv dominée.

$$\boxed{u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u^*} \quad (L^2 \text{ fort}). \leftarrow$$

② $\left[u_\varepsilon'(x) = -\frac{1}{a_\varepsilon(x)}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{C_\varepsilon^{(1)}}{a_\varepsilon(x)}\right]$ ne cv pas fortement ds L^2.

Mais u_ε' cv faiblet dans L^2.

En effet, on a $\forall \varphi \in L^2(0,1)$.

$$\int_0^1 u_\varepsilon'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_0^1 \frac{1}{a_\varepsilon(x)} \underbrace{\underbrace{\int_0^x f(t)\,dt}_{\in L^2} \underbrace{\varphi(x)}_{\in L^2}}_{L^1} dx - C_\varepsilon^{(1)} \int_0^1 \frac{\overset{\in L^2(0,1)}{\varphi(x)}}{a_\varepsilon(x)}\,dx \quad C L^1(0,1)$$

$$\longrightarrow -\left\langle \frac{1}{a}\right\rangle \int_0^1 \int_0^x f(t)\,dt\, \varphi(x)\,dx - C_0^1 \left\langle \frac{1}{a}\right\rangle \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

$$= \int_0^1 u^{*\prime}(x)\varphi(x)\,dx.$$

Donc $u_\varepsilon' \xrightarrow{L^2} u^{*\prime} \Rightarrow \boxed{u_\varepsilon \xrightarrow{H^1} u^*.} \leftarrow$

$* \boxed{a_\varepsilon u_\varepsilon' \xrightarrow{L^2} a^* u^{*\prime}} \leftarrow$

5. Problème 1D général

On considère le pb suivant : Trouver $u_\varepsilon \in H_0^1(0,1)$, solu de

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \left\{ -\left(a_\varepsilon(x) u_\varepsilon'(x)\right)' + \underline{\ell_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x)} = f(x) \text{ ds } (0,1). \right.$$

où f, a_ε, ℓ_ε vérifient les hyp du début.

Théorème : Soit (u_ε) l'uniq solu de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ alors $u_\varepsilon \xrightarrow{H^1} u^*$ ds $H^1(0,1)$ et $u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u^*$ dans $L^2(0,1)$ où $u^* \in H_0^1(0,1)$ est l'uniq solution de

$$-a^* u^{*\prime\prime}(x) + \ell^* u^*(x) = f(x) \text{ ds } (0,1).$$

où $a^* = \left\langle \frac{1}{a}\right\rangle^{-1}$. $\quad \ell^* = \langle \ell \rangle$.

Preuve : on a vu au début du cours que $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ est bien posé.

$$\exists C \quad \forall \varepsilon > 0. \quad \|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq C \|f\|_{L^2}. \qquad (*)$$

(1) Donc $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est borné dans $H^1(0,1)$. Quitte à extraire une ss suite, on a

$$\underline{u_\varepsilon \xrightarrow[H^1]{} u^*} \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \xrightarrow[L^2]{} u^*. \quad \text{(on note facilt que c'est la m lim)}$$

(Th de Rellich).

Cela nous donne que $u^* \in H_0^1(0,1)$. Caractérisons cette limite !

② $(*) \Rightarrow$ $v_\varepsilon(x) = a_\varepsilon(x)\, u_\varepsilon'(x)$ borné dans $H^1(0,1)$ uniformément

En effet $\|v_\varepsilon\|_{L^2} = \|a_\varepsilon u_\varepsilon'\|_{L^2} \underset{\substack{\downarrow \\ \|a\|_{L^\infty} = a^+}}{\le} a^+ \|u_\varepsilon'\|_{L^2} \underset{\text{car } (*)}{\le} a^+ C \|f\|_{L^2}.$

$\Rightarrow \|v_\varepsilon'\|_{L^2} = \|(a_\varepsilon u_\varepsilon')'\|_{L^2} = \|f - \rho_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2} + \rho^+ \|u_\varepsilon\|_{L^2}$

$\underset{\text{car } (*)}{\le} C \|f\|_{L^2}.$

⚠ Résultat vrai que 1D.

Quitte à extraire une ss suite, $v_\varepsilon \xrightarrow{H^1} v^*$ et $v_\varepsilon \xrightarrow{L^2} v^*$ (Th de Rellich).

③ $v \in L^2(0,1)$. $\displaystyle\int_0^1 (\rho_\varepsilon u_\varepsilon - \rho^* u^*)\, v = \underbrace{\int_0^1 \rho_\varepsilon (u_\varepsilon - u^*)\, v}_{\substack{\downarrow u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u^* \\ 0}} + \underbrace{\int_0^1 \underbrace{(\rho_\varepsilon - \rho^*)}_{\in L^\infty} \underbrace{u^* v}_{\in L^1}}_{\substack{\downarrow \varepsilon \to 0 \text{ car } \rho^* = \langle \rho \rangle \\ 0}}$

Lemme général (pe nous venons de prouver).
$w_\varepsilon \xrightarrow{L^2} w^*$
$g_\varepsilon \xrightarrow{L^\infty} g^*$ $\Rightarrow g_\varepsilon w_\varepsilon \xrightarrow{L^2} g^* w^*$

$\rho_\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} \rho^* u^*.$

④ $u_\varepsilon \xrightarrow{H^1} u^*$; $\Rightarrow u_\varepsilon' \xrightarrow{L^2} u^{*\prime}$

$a_\varepsilon u_\varepsilon' = v_\varepsilon \xrightarrow{L^2} v^*$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{d'après le lemme} \\ w_\varepsilon = v_\varepsilon \\ g_\varepsilon = 1/a_\varepsilon}}{\Rightarrow}$ $\dfrac{1}{a_\varepsilon} v_\varepsilon \xrightarrow{L^2} \langle \tfrac{1}{a} \rangle v^*.$

$\Rightarrow \underbrace{u^{*\prime} = \langle \tfrac{1}{a} \rangle v^*, \quad v^* = \langle \tfrac{1}{a} \rangle^{-1} u^{*\prime}}$

⑤ $v_\varepsilon \xrightarrow{H^1} v^* \Rightarrow v_\varepsilon' \xrightarrow{L^2} v^{*\prime}$

$v_\varepsilon' = (a_\varepsilon u_\varepsilon')' = \rho_\varepsilon u_\varepsilon - f \xrightarrow[\text{Lemme}]{L^2} \rho^* u^* - f.$

$\Rightarrow (v^*)' = \rho^* u^* - f.$

or $v^* = \langle \tfrac{1}{a} \rangle^{-1} u^{*\prime} \Rightarrow \langle \tfrac{1}{a} \rangle^{-1} (u^*)'' = \rho^* u^* - f.$

$\Rightarrow -a^* (u^*)'' + \rho^* u^* = f$ ds $(0,1)$.

<u>CCL</u> : On vient de mq $u^* \in H_0^1(0,1)$ est solution de :

$$(\mathcal{J}^*) \left[-a^*(u^*)'' + \rho^* u^* = f \text{ ds } (0,1) \right.$$

On mq toute suite extraite qui cv, cv vers une solution de $\mathcal{J}^*$.

$(\mathcal{J}^*)$ est bien posé dans $H_0^1(0,1)$ ($a^* > 0$, $\rho^* > 0$).

toutes les valeurs d'adhérence sont égales et donc toute la suite <u>cv</u>.

<u>Récapitulatif</u> : $u_\varepsilon \xrightarrow{H^1} u^*$ $\quad u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u^*$.

<u>Corollaire</u> : $v_\varepsilon \xrightarrow{L^2} v^* = a^*(u^*)'$

<u>Remarque</u> : Le résultat s'étend facilement en supposant que :

$$\left.\begin{array}{ll} \rho_\varepsilon \xrightarrow{L^\infty - *} \rho^* & L^\infty \text{ faible } * . \\ \dfrac{1}{a_\varepsilon} \xrightarrow{L^\infty - *} \dfrac{1}{a^*} . & \end{array}\right]$$

et a_ε et ρ_ε non nécessairement <u>périodique</u> !

La périodicité elle nous permet seulement d'expliciter les limites ρ^* et $\dfrac{1}{a^*}$.

<u>exemple</u> : si a_ε est QP. $a_\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ avec $a(x) = \underset{\text{1 périodiq}}{A}(\cos\theta x, \sin\theta x)$

$A(R_1 x, \dots, R_n x)$.