Développement multiéchelle

Motivation : comprendre en dimension $d > 1$ ce qui se passe dans le problème

$$\left| \begin{array}{ll} -\operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f & \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \partial\Omega \end{array} \right.$$

$a : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, $Y = (0,1)^d$ cellule de périodicité, a périodique

. L'expérience numérique montre que u_ε oscille à une longueur d'onde ε et avec une amplitude qui tend vers 0 (ε?) autour d'une solution limite u_0.

⚠ 1D

. en 1D on sait que u_0 vérifie

$$-\operatorname{div}(\bar{a}\,\nabla u_0) = f \quad \text{où } \bar{a} = \frac{1}{\langle \frac{1}{a} \rangle_Y}$$

$$\overset{\shortparallel}{-(\bar{a}\,u')'}$$

. $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \tilde{a} = \langle a \rangle_Y$

1. Remarques préliminaires

On supposera toujours que $\exists c, C > 0$ $\forall y \in Y$ $0 < c \leq a(y) \leq C < \infty$

le théorème de Lax-Milgram fournit l'existence et l'unicité d'une solution u_ε du problème dans $H_0^1(\Omega)$

Convergence de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$?

Rq : La famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$

En effet, u_ε vérifie la formulation variationnelle

$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v = \int_\Omega f v$

On peut prendre $v = u_\varepsilon$ et on obtient ($f \in L^2(\Omega)$)

$$c \int |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq \int a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |\nabla u_\varepsilon|^2 = \int f u_\varepsilon \underset{C.S}{\leq} \|f\|_{L^2} \|u_\varepsilon\|_{L^2} \underset{\text{Poincaré}}{\leq} C_p \|f\|_{L^2} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}$$

On obtient

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2} \leq \frac{C_p}{c} \|f\|_{L^2}$$

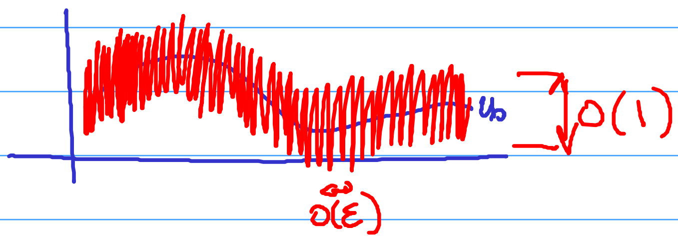
. Comme $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée, on peut extraire une sous suite $(u_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varepsilon_n \to 0$.

telle que $u_{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to\infty]{H_0^1} u_0$ où $u_0 \in H_0^1(\Omega)$

. Grâce au théorème de Rellich on a

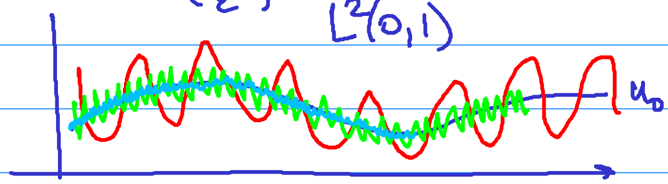
$$u_{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} u_0$$

. Comment reconnaître de la convergence faible ou de la convergence forte dans L^2, dans H^1 ?

. 

La famille converge faiblement dans L^2 vers sa moyenne

Ex : . $\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[L^2(0,1)]{} 0$ faiblement

. 

La famille converge fortement vers u_0 dans L^2

Ex : . $\varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[L^2(0,1)]{} 0$ fortement

· H^1 ?

$$u_\varepsilon \xrightarrow[H^1]{} u_0 \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \xrightarrow[L^2]{} u_0$$

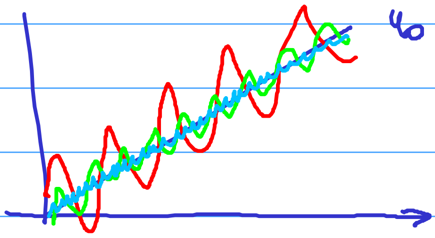
Rellich

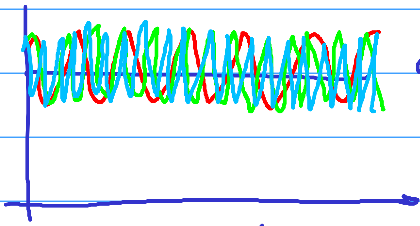
$$\Updownarrow$$

$$\nabla u_\varepsilon \longrightarrow \nabla u_0 \quad \text{faiblement dans } L^2$$

Ex : $u_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ $\qquad u_\varepsilon \longrightarrow 0 \ L^2$ fort

$u_\varepsilon'(x) = \cos\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ $\qquad u_\varepsilon' \longrightarrow 0 \ L^2$ faible





2. Développement multiéchelle.

Raisonnement formel qui va permettre de comprendre ce qui se passe. A ce niveau il y aura très peu de justification mathématique

On postule le développement suivant

$$u_\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 u_3\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots$$

où $u_i(x, y)$ est périodique en $y \in Y$

variable rapide $y \in Y$

variable lente $x \in \Omega$

Ex : $V(x) = 1 + \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) x$ $\qquad V = V_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon V_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$

où $V_0(x, y) = 1$, $V_1(x, y) = \sin y \cdot x$

u_ε $\quad -\mathrm{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f$

On plonge le développement multiéchelle et on développe en ε.

Rq : $\quad \nabla\left[v\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right] = \left[\nabla_1 v\right]\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left[\nabla_2 v\right]\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)$

où $v(x,y) : \Omega\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$

$$= \boxed{\nabla_x v}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\boxed{\nabla_y v}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$\nabla \longrightarrow \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y$; $\mathrm{div} \longrightarrow \mathrm{div}_x + \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}_y$

Ici on pose $u_\varepsilon(x) = u_0\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots$

ε^{-2} : $\quad -\mathrm{div}_y\left(a(y)\nabla_y u_0(x,y)\right) = 0$

$$\left(-\left(\mathrm{div}_x + \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}_y\right)\left(a(y)\left(\nabla_x + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y\right)\left[u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y)\ldots\right]\right)\right) = f$$

ε^{-1} : $\quad \mathrm{div}_x \ \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y u_0$; $\mathrm{div}_y \nabla_x u_0$; $\mathrm{div}_y \nabla_y u_1$

On obtient l'équation $\quad -\mathrm{div}_x\left(a(y)\nabla_y u_0\right) - \mathrm{div}_y\left(a(y)\nabla_x u_0\right) - \mathrm{div}_y\left(a(y)\nabla_y u_1\right) = 0$

que l'on réécrit $\quad -\mathrm{div}_y\left(a(y)\left(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1\right)\right) = \mathrm{div}_x\left(a(y)\nabla_y u_0\right)$

ε^0 : $\quad \mathrm{div}_x \nabla_x u_0$; $\mathrm{div}_x \nabla_y u_1$; $\mathrm{div}_y \nabla_x u_1$, $\mathrm{div}_y \nabla_y u_2$

u_0 $\quad -\mathrm{div}_y\left(a(y)\left(\nabla_x u_1 + \nabla_y u_2\right)\right) - \mathrm{div}_x\left(a(y)\nabla_y u_1\right) - \mathrm{div}_x\left(a(y)\nabla_x u_0\right) = f$

ε^1 : $\quad -\mathrm{div}_y\left(a(y)\left(\nabla_x u_2 + \nabla_y u_3\right)\right) - \mathrm{div}_x\left(a(y)\nabla_y u_2\right) - \mathrm{div}_x\left(a(y)\nabla_x u_1\right) = 0$

$\vdots$

Peut-on résoudre $u_0, u_1, u_2, \ldots$?

Reprenons chaque échelle

ε^{-2} : $\quad -\mathrm{div}_y\left(a(y)(\nabla_y u_0)(x,y)\right) = 0 \quad$ sur $\Omega \times Y$

On a pour tout x (paramètre) une EDP en $y \in Y$

Fixons x. $u_0(x,\cdot)$ est périodique en $y \in Y$ et vérifie $\quad -\mathrm{div}_y\left(a(y)\nabla_y u_0\right) = 0 \quad$ sur Y

On sait résoudre ce genre de problème dans $\dot{H}^1_\#(Y)$ (où $u_0 = 0$). Toutes les autres solutions sont des constantes

$\Rightarrow$ $u_0(x,y)$ est une fonction constante en y.

Autrement dit u_0 ne dépend pas de y $\quad \nabla_y u_0 = 0$.

$$u_0(x, \cancel{y})$$

ε^{-1} : $\quad -\mathrm{div}_y\left(a(y)\left(\underbrace{\nabla_x u_0}_{\text{paramètre}} + \nabla_y u_1\right)\right) = \mathrm{div}_x\left(a(y)\cancel{\nabla_y u_0}\right) = 0$

On pose l'EDP en y :

$$-\mathrm{div}_y\left(a(y)\nabla_y u_1(x,y)\right) = \mathrm{div}_y\left(a(y)\overbrace{\nabla_x u_0}^{\text{C'st dépend que de } x}\right) \quad \text{sur } y \in Y$$

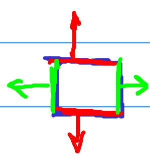
x étant fixé, On a de nouveau un problème $-\mathrm{div}(a\nabla) = g$ avec des conditions périodiques. Le bon cadre pour résoudre est de se placer dans $\dot{H}^1_\#(Y)$ (et éventuellement de rajouter une constante).

Alternative de Fredholm : $\cdot\ \int g = 0 \quad \rightarrow \exists !\ u_1(x,\cdot) \in \dot{H}^1_\#(Y)$

$\cdot\ \int g \neq 0 \quad \rightarrow$ pas de solution

Ici, la fonction $a(y)\nabla_x u_0$ est Y périodique

$$\int_Y \mathrm{div}_y(f^{n} \text{ périodique}) = 0 = \int_{\partial Y} (f^{n} \text{ périodique}) \cdot n$$



Il existe $u_1(x,y)$ périodique en y, $\int_Y u_1(x,y) = 0$

solution de

(1) $$-\mathrm{div}_y\big(a(y)\nabla_y u_1\big) = \mathrm{div}_y\big(a(y)\nabla_x u_0\big) \quad \text{sur } Y$$

Les autres solutions sont obtenues en rajoutant une constante (qui dépend de x).

$$u_\varepsilon \sim u_0(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$\varepsilon^0 : \quad -\mathrm{div}_y\Big(a(y)\big(\nabla_x u_1 + \nabla_y u_2\big)\Big) - \mathrm{div}_x\Big(a(y)\big(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1\big)\Big) = f$$

$$-\mathrm{div}_y\big(a(y)\nabla_y u_2\big) = \underset{-u_0}{f} + \mathrm{div}_y\big(a(y)\nabla_x u_1\big) + \mathrm{div}_x\Big(a(y)\big(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1\big)\Big)$$

Miracle : Si on veut que ce problème ait une solution, il faut que le terme de droite soit de moyenne nulle

$$\int_Y \Big[f(x) + \cancelto{=0}{\mathrm{div}_y\big(a(y)\nabla_x u_1\big)} + \mathrm{div}_x\Big(a(y)\big(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1\big)\Big)\underset{-u_0(x)}{}\Big]\,dy = 0$$

Cette équation ne fait intervenir que u_0 et u_1.

$$\int_Y f(x)\,dy = f(x)\int_Y 1\,dy = f(x)$$

On obtient finalement :

(2) $$u_0 - \mathrm{div}_x\left[\int_Y a(y)\big(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1\big)\,dy\right] = f. \quad \text{sur } \Omega \quad (x)$$

(1) $$-\mathrm{div}_y\Big(a(y)\big(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1\big)\Big) = 0 \quad \text{sur } Y \quad (y)$$

Vocabulaire : (1) s'appelle le problème de cellule
(2) s'appelle l'équation homogénéisée
u_1 s'appelle le correcteur

<u>Stratégie</u> : . On utilise ① pour résoudre u_1 en fonction de u_0.
. On reporte u_1 dans ② et on résout en u_0.

① $$-\mathrm{div}_y\left(a(y)\nabla_y u_1(x,y)\right) = \mathrm{div}_y\left(a(y)\underbrace{\nabla_x u_0(x)}_{\text{cst en } y}\right) \quad y\in Y$$

On peut écrire $\nabla_x u_0 = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}u_0 \\ \vdots \\ \partial_{x_d}u_0 \end{pmatrix} = \partial_{x_1}u_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + \dots + \partial_{x_d}u_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_d}$

$$\mathrm{div}_y\left(a(y)\nabla_x u_0(x)\right) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)\, \mathrm{div}_y\left(a(y)e_i\right)$$

<u>Prop</u> ③ $u_1(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)\, \chi_i(y)$ où χ_i vérifie

$$-\mathrm{div}_y\left(a(y)\nabla_y \chi_i(y)\right) = \mathrm{div}_y\left(a(y)e_i\right) \quad \chi_i \in H^1_\#(Y)$$

<u>Preuve</u> : faire le calcul, l'équation est linéaire

<u>Voc</u> : χ_i sont « les correcteurs »

On peut précalculer les χ_i une fois pour toutes (il y en a d) et recomposer u_1 à partir de ∇u_0 grâce à ③

<u>Rq</u> : Au stade où on en est, on aurait

$$u_\varepsilon \sim \begin{matrix} u_0(x) \\ +\varepsilon\,\overline{u}_1(x) \end{matrix} + \underbrace{\varepsilon \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)\, \chi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}_{\text{moyenne nulle}} + \varepsilon^2 \dots$$

. On reporte dans ② :

$$u_1(x,y) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)\, \chi_i(y)$$

② u_0 $$-\mathrm{div}_x\left(\int_Y a(y)\left(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1\right)dy\right) = f$$

On obtient

$$u_0 - \mathrm{div}_x \left(\int_Y a(y) \left(\nabla_x u_0(x) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x) \nabla_y \chi_i(y) \right) dy \right) = f \quad x \in \Omega$$

On écrit en coordonnées

$$u_0 - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\int_Y a(y) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \chi_i}{\partial y_j}(y) \right) dy \right] = f$$

$$u_0 - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right) = f$$

où $$A_{jk} = \int_Y a(y) \left(\underbrace{\delta_{jk}}_{\text{Kronecker}} + \frac{\partial \chi_k}{\partial y_j}(y) \right) dy \qquad (4)$$

Rq: On a supposé que a est à valeurs réelles, mais tout ceci s'étend au cas où a est à valeurs matricielle (le faire)

Conclusion provisoire :
le problème homogénéisé est de la forme
$$u_0 - \mathrm{div}(A \nabla u_0) = f$$

où A est <u>une matrice</u> donnée par la formule (4).

Dans le cas 1-D, on peut calculer cette matrice (c'est un scalaire!) explicitement

$$A = \frac{1}{\int_Y \frac{1}{a(y)} dy}$$

En dimension supérieure, c'est plus délicat. On a

$$A_{jk} = \int_Y a(y)\left(\delta_{jk} + \frac{\partial \chi_k(y)}{\partial y_j}\right) dy$$

où les correcteurs χ_k vérifient

$$\left| \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y\left(a(y)\, \nabla_y \chi_k\right) = \operatorname{div}_y\left(a(y)\, e_k\right) \qquad y \in Y \\ \chi_k \in H^1_{\#}(Y) \qquad\qquad\qquad k = 1 \dots d \end{array} \right.$$

d problèmes à résoudre

<u>Rq</u>: bien que a soit scalaire, A est une matrice.

<u>Questions</u>:

- Est-ce que le problème homogénéisé est elliptique?
  <u>Rep</u>: oui
- Est-ce que on une borne sur A? <u>Rep</u>: oui
- si a est une matrice symétrique alors A est symétrique
- Peut-on justifier le développement multiéchelle
  $$u_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} u_0(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + O_{H^1}(\varepsilon) \quad ?$$
- Quid des ordres suivants $u_2, u_3 \dots$?