Γ - convergence

- Notion de convergence de problèmes de minimisation
- Ennio De Giorgi
- Pas de définition unique. De nombreux cadres...
  cf Andrea Braides « Γ-convergence for beginners »

$$(1)\quad \begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f & \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Si A est une matrice symétrique u_ε minimise la fonctionnelle

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u\cdot\nabla u - \int_\Omega f u \qquad \text{sur } H_0^1(\Omega)$$

Ex : Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange et vérifier que l'on retombe sur (1)

Dans la suite, on va considérer le problème de minimisation

$$(P_\varepsilon) \qquad \min_{u\in H_0^1} J_\varepsilon(u)$$

On a vu que quand $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ faiblement dans H^1
u_0 est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_{eff}\nabla u_0) = f & \Omega \\ u_0 = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

où $$A_{eff\,ij} = \int_Y A(y)(e_j + \nabla_y \chi_j)\cdot e_i \, dy$$ où χ_j sont les correcteurs

$$= \int_Y A(y)(e_j+\nabla_y\chi_j)\cdot(e_i+\underline{\nabla_y\chi_i})\,dy$$

(En effet la formulation variationnelle de l'équation des correcteurs est $\int_Y A(y)(e_j+\nabla\chi_j)\cdot\nabla\varphi=0 \quad \forall\varphi\in \dot{H}^1_\#(Y)$)

Par conséquent, si $A(y)$ est une matrice symétrique $\forall y$, alors A_{eff} est une matrice symétrique.

On déduit que u_0 est la solution du problème de minimisation

$$(P_0) \quad \min_{u\in H^1_0(\Omega)} J_0(u) \qquad \text{avec } J_0(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega A_{eff}\nabla u\cdot\nabla u-\int_\Omega fu$$

$$P_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\rightsquigarrow} P_0$$

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{?} J_0(u_0)$$

<u>Remarque</u>: $J_\varepsilon(u_\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon-\int_\Omega fu_\varepsilon \searrow \int_\Omega fu_0$

- $u_\varepsilon\longrightarrow u_0$ H^1 faible
- $u_\varepsilon\longrightarrow u_0$ L^2 fort Rellich.
- $\nabla u_\varepsilon\longrightarrow\nabla u_0$ L^2 faible (et pas mieux)

$\int_\Omega|\nabla u_\varepsilon|^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\not\longrightarrow} \int_\Omega|\nabla u_0|^2$ en général, il n'y a pas de raison pour que $\int A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon\longrightarrow\int A_{eff}\nabla u_0\cdot\nabla u_0$ car c'est une quantité quadratique en ∇u_ε

La Γ-convergence est un bon cadre pour poser ces problèmes là.

1 - Définitions et propriétés.

<u>Cadre très général</u> : (X,d) espace métrique

$$(P_\varepsilon) \quad \min_{u\in X} J_\varepsilon(u) \quad ; \quad (P_0) \quad \min_{u\in X} J_0(u)$$

Définition : On dit que $(P_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ $\Gamma(d)$ converge dans X vers P_0 si l'on a les deux propriétés suivantes :

- Γ-liminf : $\forall u_0 \in X$ et $\forall (u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in X$ telle que $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{d} u_0$

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq J_0(u_0)$$

- Γ-limsup : $\forall u_0 \in X$, $\exists (u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in X$ telle que $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{d} u_0$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_0(u_0)$$

On note $\qquad P_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\Gamma(d)} P_0$

Remarque : Il y a de nombreuses autres définitions possibles (variantes)
- On peut remplacer $\leq$ par $=$ dans Γ-limsup.
- On peut remplacer la convergence métrique au sens de d par n'importe quelle notion de convergence dans X (par exemple de la convergence faible)
- On peut aussi changer Γ-limsup en

Γ-limsup(2) : $\forall u_0 \in X$, $\forall \eta > 0$, $\exists (u_\varepsilon^\eta)_{\varepsilon>0} \in X$ tq $u_\varepsilon^\eta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{d} u_0$ et

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon^\eta) \leq J_0(u_0) + \eta$$

- Γ-limsup : il faut construire ou exhiber une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui marche. Construction de la « recovery sequence »

Théorème : Sous les hypothèses précédentes $((X,d), P_\varepsilon, P_0)$.
Si $P_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\Gamma(d)} P_0$ dans X et que u_ε est un minimiseur solution de P_ε qui converge (au sens de d) vers $u_0 \in X$, alors : u_0 est un minimiseur de J_0 dans X et $\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) = J_0(u_0)$

<u>Preuve</u> : $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{d} u_0$. Γ-lim inf $\Rightarrow$ $\liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geqslant J_0(u_0)$.

. Soit $v_0 \in X$ quelconque. Γ-lim sup affirme qu'il existe une suite $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{d} v_0$ et telle que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) \leqslant J_0(v_0)$$

. Mais u_ε minimise J_ε

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(v_\varepsilon)$$

. On conclue

$$\underset{\Gamma\text{-lim inf}}{J_0(u_0) \leqslant} \liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \underset{\text{lim inf}\leq\text{lim sup}}{\leqslant} \limsup_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \underset{\text{minimisation}}{\leqslant} \limsup_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) \underset{\Gamma\text{lim sup}}{\leqslant} J_0(v_0)$$

Ainsi u_0 minimise J_0 dans X.

Si de plus on prend $v_0 = u_0$, on a

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) = J_0(u_0). \qquad \blacksquare$$

2. Application à l'homogénéisation

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u\cdot\nabla u - \int_\Omega f u \quad ; \quad J_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A_{eff}\nabla u\cdot\nabla u - \int_\Omega f u$$

$$(P_\varepsilon)\ \min_{u\in H_0^1(\Omega)} J_\varepsilon(u) \quad ; \quad (P_0)\ \min_{u\in H_0^1(\Omega)} J_0(u)$$

$X = H_0^1(\Omega)$ $\quad$ d : - Ou bien on prend la distance L^2

- Ou bien on prend la convergence faible.

<u>Théorème</u> : Sous ces hypothèses $P_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\Gamma(d)} P_0$ dans H_0^1.

<u>Preuve</u>: Il faut démontrer les deux propriétés Γ-liminf et Γ-limsup

- <u>Γ-liminf</u>: $\forall u_0 \in H^1_0$, $\forall v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{d} u_0$ $\quad \liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geqslant J_0(u_0)$.

Soit $u_0 \in H^1_0$, et $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{d} u_0$ $\qquad \alpha : \liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon)$

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - \int_\Omega f u_\varepsilon$$

. Si d est la cv L^2, on n'a pas de contrôle de la norme H^1. La suite (u_ε) peut ne pas être bornée dans H^1. On pourrait avoir $\alpha = +\infty$. Mais dans ce cas il n'y a rien à démontrer

. si d est la cv faible H^1, comme $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ cv faiblement, elle est bornée dans H^1 et $(J_\varepsilon(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ est bornée. $\alpha \neq +\infty$

Si $\alpha \neq +\infty$, la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (ou au moins une suite extraite) est nécessairement bornée dans H^1.

A partir de maintenant on travaillera avec une suite extraite telle que $\quad \lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}) = \alpha$

(A est uniformément bornée et coercive $\quad \underbrace{J_\varepsilon(u_\varepsilon)}_{\text{borné}} \geqslant \underbrace{\frac{C_{coer}}{2}\int|\nabla u_\varepsilon|^2 - C_{Poin}\|f\|_{L^2}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}}_{\text{contrôle } \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2} \text{ borné}}$)

On peut supposer maintenant (compte tenu de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bornée H^1 $\quad u_\varepsilon \longrightarrow u_0 \left| \begin{array}{l} L^2 \\ \text{faiblement } H^1 \end{array}\right.$)

$\exists\, u_1 \in L^2(\Omega, \dot{H}^1_\#)$ tel que
$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2s} \nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)$$

($\underset{\Omega}{v_\varepsilon} \xrightarrow{2s} \underset{\Omega\times Y}{v_0}$ signifie $\forall \psi$ <u>admissible</u> $\displaystyle\int_\Omega v_\varepsilon(x)\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)dx \to \iint_{\Omega\, Y} v_0(x,y)\psi(x,y)\,dx\,dy$)

$$\int_\Omega \left(\psi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^2 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \iint (\psi(x,y))^2\,dx\,dy$$

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon-\int_\Omega f u_\varepsilon$$

$$\int_\Omega f u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_\Omega f u_0 \qquad u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u_0 \ L^2$$

Il suffit de montrer que $\displaystyle\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon \geq \int_\Omega A_{eff}\nabla u_0\cdot\nabla u_0$

⚠ un peu faux

$$\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\nabla u_\varepsilon-\nabla_x u_0-\nabla_y \underset{\varphi}{u_1}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\cdot\left(\nabla u_\varepsilon-\nabla_x u_0-\nabla_y \underset{\varphi}{u_1}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx \overset{\text{coercivité de } A}{\geq} 0.$$

En développant ceci est équivalent à :

$$\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon \geq 2\underbrace{\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\left(\nabla u_0+\nabla_y \underset{\varphi}{u_1}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)}_{I}-\underbrace{\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\nabla u_0+\nabla_y \underset{\varphi}{u_1})\cdot(\nabla u_0+\nabla_y \underset{\varphi}{u_1})}_{II}$$

Or $\displaystyle\underbrace{\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\left(\nabla u_0+\nabla_y \underset{\varphi}{u_1}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx}_{(I)}=\int_\Omega \nabla u_\varepsilon\cdot \underbrace{A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\nabla_x u_0+\nabla_y \underset{\varphi}{u_1}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)}_{\varphi\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)}dx$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\iint_{\Omega Y}\left(\nabla u_0+\nabla_y u_1(x,y)\right)\cdot A(y)\left(\nabla_x u_0+\nabla_y \underset{\varphi}{u_1}(x,y)\right)dxdy$$

$$=\iint_{\Omega Y} A(y)(\nabla u_0+\nabla_y u_1)\cdot(\nabla u_0+\nabla_y \underset{\varphi}{u_1})\,dxdy.$$

et (II) $\displaystyle\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\nabla u_0(x)+\nabla_y \underset{\varphi}{u_1}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\cdot\left(\nabla u_0+\nabla_y \underset{\varphi}{u_1}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0}\iint_{\Omega Y}A(y)(\nabla u_0+\nabla_y \underset{\varphi}{u_1})\cdot(\nabla u_0+\nabla_y \underset{\varphi}{u_1})\,dxdy$

⚠ La démonstration est fausse si u_1 n'est pas assez régulière ($\nabla_y u_1$ non admissible)

En passant à la lim inf

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon \geq \iint_{\Omega Y}A(y)\left(\nabla u_0+\nabla_y u_1(x,y)\right)\cdot\left(\nabla u_0+\nabla_y u_1(x,y)\right)dxdy.$$

Et

$$\int_\Omega\int_Y A(y)(\nabla u_0+\nabla_y u_1(x,y))\cdot(\nabla u_0+\nabla_y u_1(x,y))\,dx\,dy$$

$$\geq \min_{w\in L^2(\Omega,H^1_\#)} \int_\Omega\int_Y A(y)(\nabla u_0+\nabla_y w)\cdot(\nabla u_0+\nabla_y w)\,dx\,dy.$$

$$= \int_\Omega A_{eff}\nabla u_0\cdot\nabla u_0 .$$

En effet (*) $\displaystyle\int_Y A(y)(\xi+\nabla_y W)\cdot(\xi+\nabla_y W)$ On fixe x : $\xi=\nabla u_0(x)$
$W(y)=w(x,y)$

$$A_{eff\,ij}=\int A(y)(e_j+\nabla\chi_j)\cdot(e_i+\nabla\chi_i)$$

$\xi=\sum_{i=1}^{3}\xi_i e_i$ $\qquad A_{eff}\,\xi\cdot\xi=\sum_{ij}A_{eff\,ij}\,\xi_j\,\xi_i$

$$=\int_\Omega A(y)\Big(\xi+\nabla\sum_j(\xi_j\chi_j)\Big)\cdot\Big(\xi+\nabla\sum_j(\xi_j\chi_j)\Big)$$

Et $W=\sum\xi_j\chi_j$!! C.à.d $W=\sum\xi_j\chi_j$ minimise (*)
En effet, le minimum de (*) vérifie $\int A(y)(\xi+\nabla_y W)\cdot\nabla_y\theta=0$ $\forall\theta\in H^1_\#(Y)$
et c'est l'équation du correcteur.

Le correcteur minimise l'énergie :
La solution (u_0,u_1) du problème homogénéisé vérifie la formulation variationnelle

$$\int_\Omega\int_Y A(y)(\nabla u_0+\nabla_y u_1)\cdot(\nabla\phi_0+\nabla_y\phi_1)\,dx\,dy=\int_\Omega f\phi_0$$

$$\forall\phi_0\in \underset{H^1_0}{C_c^\infty(\Omega)},\ \forall\phi_1\ \underset{L^2(\Omega,H^1_\#(Y))}{C_c^\infty(\Omega,C^\infty_\#(Y))}.$$

qui n'est rien d'autre (dans le cas A symétrique) que

(u_0, u_1) minimise $\frac{1}{2} \iint_{\Omega Y} A(y)(\nabla u_0 + \nabla_y u_1)\cdot(\nabla u_0 + \nabla_y u_1)\, dx\, dy - \int_\Omega f u_0\, dx$

Si $\nabla_y u_1$ n'est pas admissible $\rightsquigarrow$ On remplace u_1 par φ régulière en x, y.

On arrive à :

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int A\left(\tfrac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \geq 2 \iint A(y)(\nabla u_0 + \nabla_y u_1)\cdot(\nabla u_0 + \nabla_y \varphi)\, dx\, dy$$

$$- \iint A(y)(\nabla u_0 + \nabla_y \varphi)\cdot(\nabla u_0 + \nabla_y \varphi)\, dx\, dy$$

φ^n régulière qui converge vers u_1 dans $L^2(\Omega, H^1_\#(Y))$

L'expression de droite converge vers la même chose qu'avant c.a.d

$$\iint_{\Omega Y} A(y)(\nabla u_0 + \nabla_y u_1)\cdot(\nabla u_0 + \nabla_y u_1)\, dx\, dy. \geq \int A_{eff} \nabla u_0 \cdot \nabla u_0$$

- $\underline{\Gamma\text{-limsup}}$: $\forall u_0 \in H^1_0$, $\exists u_\varepsilon \in H^1_0$ tq $\lim\sup_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_0(u_0)$.
  $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{d} u_0$

Soit $u_0 \in H^1_0$, on veut construire u_ε.

Le correcteur $u(x,y) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x)\, X_j(y)$

φ régulière

u_1 admissible? oui pour l'instant

On a envie de prendre $u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ φ

on va montrer qu'il fonctionne (presque).

- $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{d} u_0$? $\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2} = \varepsilon \left(\int_\Omega \left(u_1\left(x, \tfrac{x}{\varepsilon}\right)\right)^2 \right)^{1/2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ φ

- $u_\varepsilon \longrightarrow u_0$ H^1 faible $\varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ H^1 φ

$$\nabla\left(\varepsilon \overset{\varphi}{u_1}\left(x,\tfrac{x}{\varepsilon}\right)\right) = \underbrace{\varepsilon\left(\nabla_x \overset{\varphi}{u_1}\right)\left(x,\tfrac{x}{\varepsilon}\right)}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\nabla_y \overset{\varphi}{u_1}\left(x,\tfrac{x}{\varepsilon}\right)}_{\downarrow\, 0}$$ si u_1 est suff régulier.

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_\Omega A\left(\tfrac{x}{\varepsilon}\right)\left(\nabla u_0 + (\nabla_y \overset{\varphi}{u_1})\left(x,\tfrac{x}{\varepsilon}\right) + \underline{\varepsilon \nabla_x \overset{\varphi}{u_1}\left(x,\tfrac{x}{\varepsilon}\right)}\right)\cdot\left(\nabla u_0 + \nabla_y \overset{\varphi}{u_1} + \underline{\varepsilon \nabla_x \overset{\varphi}{u_1}}\right)$$

$$- \underbrace{\int_\Omega f(u_0 + \varepsilon \overset{\varphi}{u_1})}_{} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_\Omega f u_0$$

Tous les termes en ε tendent vers 0 (de nouveau si u_1 est suffisament régulière)
Si u_1, $\nabla_y u_1$ sont admissibles

$$\frac{1}{2}\int A\left(\tfrac{x}{\varepsilon}\right)\left(\nabla u_0 + \nabla_y \overset{\varphi}{u_1}\left(x,\tfrac{x}{\varepsilon}\right)\right)\cdot\left(\nabla u_0 + \nabla_y \overset{\varphi}{u_1}\left(x,\tfrac{x}{\varepsilon}\right)\right)dx$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\iint_{\Omega Y} A(y)\left(\nabla u_0 + \nabla_y \overset{\varphi}{u_1}(x,y)\right)\left(\nabla u_0 + \nabla_y \overset{\varphi}{u_1}(x,y)\right)dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega A_{eff}\nabla u_0\cdot\nabla u_0$$ parce que l'on a pris pour u_1 le correcteur associé à u_0.

Ceci démontre que $\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_\Omega A_{eff}\nabla u_0\cdot\nabla u_0 - \int f u_0 = J_0(u_0)$

Si u_1, $\nabla_y u_1$ ne sont pas admissibles, on met φ.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\iint A(y)(\nabla u_0 + \nabla_y\varphi)\cdot(\nabla u_0 + \nabla_y\varphi) - \int_\Omega f u_0$$

Si $(\varphi^n)_n$ est une suite qui converge vers u_1 dans $L^2(\Omega, H^1_\#)$
l'expression de droite converge vers $J_0(u_0)$.
On a construit ainsi une fonction φ^n qui approche $J_0(u_0)$ aussi

près que l'avant. C.a.d :

$\forall u_0, \forall \eta \quad \exists u_\varepsilon^\eta \qquad \limsup_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon^\eta) \leq J_0(u_0) + \eta$