# TP du cours d'homogénéisation

## 1 Résolution numérique de problèmes elliptiques avec diverses conditions aux limites

La première partie de ce TP permet de développer des fonctions utiles à la deuxième partie qui permettra de mettre en pratique et illustrer les résultats de la théorie de l'homogénéisation.

### 1.1 Conditions de type Neumann

Soit $\Omega$ un ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$, $A$ un tenseur qui est uniformément borné

$$\exists\, C > 0,\ \forall (x,y) \in \Omega,\ \forall i,j,\ |A_{ij}(x,y)| \leq C$$

et satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme

$$\exists\, c > 0,\ \forall (x,y) \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad A(x,y)\xi \cdot \xi \geq c|\xi|^2$$

et $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec coefficients variables et condition aux limites de Neumann :
*Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} u - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ A(x,y)\nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. .$$

où $n$ est la normale unitaire sortante à $\Omega$

**Question 1.** Ecrire la formulation variationnelle du problème et vérifier que le problème est bien posé.

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine $\Omega$, et $V_h$ l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis $P^1$ associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(S_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de $V_h$ définie par $w_I(S_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$.

**Question 2.** Quelle est la formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée $u_h$ ? Par construction, la solution approchée s'écrit sous la forme

$$u_h(x,y) = \sum_{I=1}^{N} u_h(S_I) w_I(x,y), \qquad \forall\ (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Exprimer la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$(2) \qquad (\mathbb{M} + \mathbb{K})\vec{U} = \vec{L}\,,$$

de solution le vecteur $\vec{U} \in \mathbb{R}^N$ dont la $I^{\text{ème}}$ composante vaut $u_h(S_I)$. Ci-dessus, $\mathbb{M}$ est la matrice de masse et $\mathbb{K}$ est la matrice de rigidité.

Pour résoudre ce problème, on s'appuie sur `Matlab`. En `Matlab`, la routine `principal_neumann.m` sera le programme principal pour résoudre (2).

### 1.1.1 Maillages

On veut résoudre le problème dans un ouvert $\Omega$ qui est carré. Pour mailler $\Omega$, on choisit le mailleur `Gmsh`. Pour réaliser les calculs, on s'appuie sur `Matlab`. En `Matlab`, la routine `principal_neumann.m` sera le programme principal pour résoudre (2). Pour créer des maillages de l'ouvert carré, voici la procédure à suivre :

— Modifier le fichier `geomCarre.geo` en l'ouvrant avec un éditeur de texte. Par exemple, pour changer le pas du maillage, modifier la valeur de $h$. Enregistrer les changements.
— Lancer `Gmsh` dans un terminal et ouvrir le fichier `geomCarre.geo`.
— Dans la fenêtre `Gmsh`, menu du haut, choisir "`Mesh`". Cliquer ensuite sur "`2D`".
— Pour sauvegarder le maillage ainsi créé, choisir "`Save Mesh`" dans le menu "`File`".

Un fichier `geomCarre.msh` a été créé.
*Attention :* le nom du fichier maillage `.msh` est *par défaut* celui du fichier géométrie `.geo`.

La routine `lecture_msh.m` permet de lire et de récupérer les données du maillage. Les données de sortie sont

`Nbpt,Nbtri,Coorneu,Refneu,Numtri,Reftri,Nbaretes,Numaretes,Refaretes` ?

Les données `Refneu,Nbaretes,Numaretes,Refaretes` ne seront pas utilisées pour l'instant.
Vous pouvez afficher le maillage précédemment créé à l'aide de la routine `affichemaillage.m`.

### 1.1.2 Calcul des Matrices élémentaires, cas constant

On considère pour l'instant le cas où $A = 1$.
Pour calculer les matrices élémentaires sur un triangle, on peut utiliser les formules ci-dessous. Soit $T_\ell$ un triangle de sommets $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$, et $S_3(x_3, y_3)$, nous pouvons utiliser les formules de quadrature suivantes :

$$\int_{T_\ell} F\,d\Omega = \text{aire}(T_\ell)\,F(\frac{S_1+S_2+S_3}{3}) \qquad \text{pour } F \in \mathbb{P}^0.$$

$$\int_{T_\ell} F\,d\Omega = \frac{\text{aire}(T_\ell)}{3}\,\left(F(S_1)+F(S_2)+F(S_3)\right) \qquad \text{pour } F \in \mathbb{P}^1.$$

$$\int_{T_\ell} F\,d\Omega = \frac{\text{aire}(T_\ell)}{3}\,\left(F(\frac{S_1+S_2}{2})+F(\frac{S_1+S_3}{2})+F(\frac{S_3+S_2}{2}))\right) \qquad \text{pour } F \in \mathbb{P}^2.$$

**Question 3.** En déduire pour tout triangle $T_\ell$, et toutes fonctions de base $w_I$ et $w_J$, les intégrales

$$\int_{T_\ell} w_I w_J\,d\Omega \quad \text{et} \quad \int_{T_\ell} \nabla w_I \cdot \nabla w_J\,d\Omega$$

On rappelle que les fonctions de base locales sont égales aux coordonnées barycentriques $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$. En un point $(x, y)$ du triangle, celles-ci sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x,y) &= \frac{1}{D}(y_{23}(x-x_3) - x_{23}(y-y_3)) \\
\lambda_2(x,y) &= \frac{1}{D}(y_{31}(x-x_1) - x_{31}(y-y_1)) \\
\lambda_3(x,y) &= \frac{1}{D}(y_{12}(x-x_2) - x_{12}(y-y_2))
\end{aligned}$$

où $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ pour $i$ et $j$ différents dans $\{1, 2, 3\}$, et $D = x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23}$. Notons que $D$ est égal, au signe près, à deux fois la surface du triangle.

Soit $T_\ell$ un triangle de sommets $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$ et $S_3(x_3, y_3)$. Compléter les routines `matK_elem.m` et `matM_elem.m` qui à partir des coordonnées des 3 sommets d'un triangle donnent respectivement les matrices élémentaires de rigidité et de masse.

*Il est conseillé de vérifier le calcul des matrices élémentaires en le comparant à un calcul fait à la main pour le triangle de référence (composé des sommets* $(0,0)$*,* $(1,0)$ *et* $(0,1)$*).*

### 1.1.3 Assemblage des matrices

On rappelle l'algorithme d'assemblage

> $\mathbb{M} = 0$, $\mathbb{K} = 0$
> **Pour** $\ell = 1, L$
> Détermination des coordonnées des sommets du triangle $\ell$
> Calcul des contributions élémentaires $\mathbb{M}^\ell$, $\mathbb{K}^\ell$
> **Pour** $i = 1, 3$
> $I = \text{local} \to \text{global}(\ell, i)$
> **Pour** $j = 1, 3$
> $J = \text{local} \to \text{global}(\ell, j)$
> $\mathbb{M}_{IJ} = \mathbb{M}_{IJ} + \mathbb{M}^\ell_{ij}$ et $\mathbb{K}_{IJ} = \mathbb{K}_{IJ} + \mathbb{K}^\ell_{ij}$
> **Fin pour** $j$
> **Fin pour** $i$
> **Fin pour** $\ell$

**Question 4.** Compléter la partie assemblage des matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}$.

**Question 5.** Calcul du second membre : rappeler l'expression du second membre $\vec{L}$ pour une donnée générale $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. En approchant la donnée $f$ par son interpolation $\pi_h f$ dans la base $(w_I)_{I=1,N}$, donner une approximation du second membre $\vec{L}$ faisant intervenir la matrice de masse.

On admettra que quand on remplace $f$ par son interpolée $\pi_h f$ de $V_h$, l'approximation par des éléments finis $P^1$ du problème n'est pas altérée.

### 1.1.4 Validation

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée $u_h$ correcte. Pour cela, on résout le problème (1) avec $A = 1$ et une solution $u$ connue égale à $u(x, y) = \cos(\pi x)\cos(2\pi y)$, pour $(x, y) \in \overline{\Omega}$.

**Question 6.** Calculer la donnée $f$ correspondante et modifier la routine `f.m`.

**Question 7.** En assimilant $u$ à son interpolée $\pi_h u$, donner une estimation de la norme $L^2$ de l'erreur, $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$, faisant intervenir la matrice de masse $\mathbb{M}$. On pourra tracer $\log(1/h) \mapsto \log\big(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)}\big)$ pour différentes valeurs de $h$ et vérifier que cela correspond à l' estimation d'erreur théorique. Même question pour la semi-norme $H^1$ de l'erreur, $|u - u_h|_1 = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2}$

### 1.1.5 Calcul des Matrices élémentaires, cas variable

On considère maintenant le cas général $A = A(x, y)$.
Une nouvelle difficulté apparait dans le calcul des matrices élémentaires : la prise en compte des coefficients variables. En effet, les intégrales

$$\int_{T_\ell} A(M)\nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M)\, d\Omega$$

ne peuvent pas toujours être calculées exactement. Nous allons approcher ces intégrales à l'aide de formules de quadratures dites à N points : pour $F$ une fonction continue par morceaux de $T_\ell$

$$\int_{T_\ell} F\, d\Omega \simeq \sum_{q=1}^{N} \omega_\ell^q F(M_\ell^q).$$

où $M_\ell^q$ sont des points de quadrature dans $T_\ell$ et $\omega_\ell^q$ les poids positifs associés aux points de quadrature. Il existe de nombreux points de quadrature (Gauss, Gauss-Lobatto,...) qui fournissent des approximations des intégrales. Ces méthodes se différencient par le fait qu'elles intègrent exactement les polynômes d'un ordre donné , ce qui caractérise leur précision. On utilisera ici la formule de quadrature à 4 points de Gauss Lobatto qui est d'ordre 3 et qui est définie sur le triangle de référence $\hat{T}$ par

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{M}^q$ | $(1/3, 1/3)$ | $(1/5, 1/5)$ | $(1/5, 3/5)$ | $(3/5, 1/5)$ |
| $\hat{\omega}^q$ | $-9/32$ | $25/96$ | $25/96$ | $25/96$ |

Pour chaque triangle $T_\ell$, nous allons utiliser la transformation géométrique $F_\ell$ qui envoie le triangle de référence $\hat{T}$ dans $T_\ell$. En effectuant le changement de variable $M = F_\ell(\hat{M})$, l'intégrale sur $T_\ell$ devient

$$(3) \quad \int_{T_\ell} A(M)\nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M)\, d\Omega =$$
$$\int_{\hat{T}} A(F_\ell(\hat{M}))[dF_\ell(\hat{M})^T]^{-1}\nabla \hat{w}_I(\hat{M}) \cdot [dF_\ell(\hat{M})^T]^{-1}\nabla \hat{w}_J(\hat{M})\, |\det dF_\ell(\hat{M})|\, d\hat{\Omega}$$

où $dF_\ell(\hat{M})$ est la matrice jacobienne en $\hat{M}$.

**Question 8.** À l'aide de ces éléments, modifier le calcul de la matrice de rigidité élémentaire.

**Question 9.** Valider le calcul de la matrice élémentaire dans le cas où $A$ est l'identité puis seulement diagonale, pour le triangle de référence puis pour un triangle quelconque. On pourra comparer au calcul de la matrice élémentaire fait précédemment.

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée $u_h$ correcte. Pour cela, on résout le problème (1) avec $A(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + 2$ une solution $u$ que vous choisirez.

**Question 10.** Calculer la donnée $f$ correspondante, modifier la routine `f.m`, et en assimilant $u$ à son interpolée $\pi_h u$, tracer $\log(1/h) \mapsto \log\left(\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$ et $\log(1/h) \mapsto \log\left(|u-u_h|_1/|u|_1\right)$ pour différentes valeurs de $h$.Commenter.

**Question 11.** Représenter la solution dans le cas d'un terme source quelconque et $A(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)+2$, $\sin(4\pi x)\sin(4\pi y)+2$, $\sin(8\pi x)\sin(8\pi y)+2$, $\sin(16\pi x)\sin(16\pi y)+2$, $\sin(32\pi x)\sin(32\pi y)+2$. Commenter.

## 1.2 Conditions de type Dirichlet

On s'intéresse maintenant à la résolution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites de Dirichlet :
*Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que*

$$(4) \qquad \begin{cases} u - \nabla \cdot (A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

**Question 12.** Ecrire la formulation variationnelle du problème et montrer que le problème est bien posé dans $H_0^1(\Omega)$ (indiquer seulement les différences par rapport à la question 1).

### 1.2.1 Maillages

On veillera à donner une référence particulière aux nœuds du bord.

### 1.2.2 Discrétisation

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine $\Omega$, et $V_h$ l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis $P^1$ associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(M_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de $V_h$ définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$.

Pour définir une approximation interne de $H_0^1(\Omega)$, on procède de la façon suivante. On suppose que les nœuds de la frontière $\partial\Omega$ ont une référence de 1 ($M_I$ est sur le bord si $\mathrm{Refneu}(I) = 1$) et que les nœuds à l'intérieur ont une référence 0 ($M_I$ est à l'intérieur si $\mathrm{Refneu}(I) = 0$). On introduit :

$$V_h^0 \;=\; \mathrm{Vect}\,(w_I,\ \text{tel que } \mathrm{Refneu}(M_I) = 0)\,.$$

Soit $N_0$ la dimension de $V_h^0$. Par construction, $V_h^0 \;\subset\; H_0^1(\Omega)$.

**Question 13.** La solution approchée $u_h$ s'écrit sous la forme

$$u_h(x,y) \;=\; \sum_{I,\,\mathrm{Refneu}(M_I)=0} u_h(M_I) w_I(x,y), \qquad \forall\ (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Exprimer la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$\mathbb{A}^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0\,, \tag{5}$$

où la $I^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\vec{U}^0 \in \mathbb{R}^{N_0}$ vaut $u_h(M_I)$ et où on écrira $\mathbb{A}^0 = \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0$, avec $\mathbb{M}^0$ la matrice de masse, et $\mathbb{K}^0$ la matrice de rigidité.

Dans la pratique, on ne peut pas assembler directement la matrice intervenant dans (5). Voici comment nous procédons pour arriver à la résolution du système linéaire (5).

### 1.2.3 Assemblage des matrices et vecteur second membre

La routine `principal_dirichlet.m` est le programme principal pour résoudre le problème (4).

**Question 14.** Reprendre la partie assemblage de la section précédente, permettant de construire la matrice $\mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{K}$ et le vecteur $\vec{L}$ où on a pris en compte toutes les fonctions de base (même celles qui ne sont pas nulles au bord).

**Question 15.** On introduit une matrice (creuse/sparse) $\mathbb{P}$ qui envoie $V_h$ dans $V_h^0$ (donc de taille $N_0 \times N$), qui garde invariant les fonctions de base de $V_h$ associées à des noeuds intérieurs et qui élimine les fonctions de base associées à des noeuds du bord (qui ne contient donc que des 1 et des 0). On pourra valider la construction de cette matrice numériquement (il suffira de représenter sur le maillage, $\mathbb{P}\mathbb{V}$ pour un vecteur $\mathbb{V}$ quelconque et vérifier que le résultat est inchangé sauf au bord où il est nul).
Il suffira ensuite d'écrire

$$\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^t, \quad \text{et } \vec{L}^0 = \mathbb{P}\vec{L}$$

et résoudre (5) pour avoir $\vec{U}^0$. Pour retrouver la solution en chaque point du maillage (et un vecteur associé de taille $N$), il suffira d'écrire

$$\vec{U} = \mathbb{P}^t \vec{U}^0$$

### 1.2.4 Validation du code

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée $u_h$ correcte. Pour cela, on résout le problème (4) avec un tenseur $A$ et une solution $u$ que vous choisirez.

**Question 16.** Calculer la donnée $f$ correspondante, modifier la routine `f.m` et en assimilant $u$ à son interpolée $\pi_h u$, tracer $\log(1/h) \mapsto \log\left(\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$ et $\log(1/h) \mapsto \log\left(|u-u_h|_1/|u|_1\right)$ pour différentes valeurs de $h$.

## 1.3 Conditions périodiques

Soit $\Omega = [0, L]^2$ un carré de taille $L$, on s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites périodique et coefficients variables :
*Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que*

$$(6) \qquad \begin{cases} u - \nabla \cdot \big(A(x, y)\nabla u\big) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u|_{x=0} = u|_{x=L} \text{ et } u|_{y=0} = u|_{y=L} \\ A(x, y)\nabla u \cdot e_x\Big|_{x=0} = A(x, y)\nabla u \cdot e_x\Big|_{x=L} \text{ et } A(x, y)\nabla u \cdot e_y\Big|_{y=0} = A(x, y)\nabla u \cdot e_y\Big|_{y=L} \end{cases}.$$

**Question 17.** Ecrire la formulation variationnelle du problème et montrer que le problème est bien posé dans $H^1_\#(\Omega)$ (indiquer seulement les différences par rapport à la question 1).

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation **périodique** du domaine $\Omega$, et $V_h$ l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis $P^1$ associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(M_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de $V_h$ définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$. La triangulation est **périodique** si

— $M_I$ est un noeud appartenant au bord droit si et seulement si il existe un noeud $M_J$ appartenant au bord gauche ayant la même ordonnée ;

— $M_I$ est un noeud appartenant au bord bas si et seulement si il existe un noeud $M_J$ appartenant au bord haut ayant la même abscisse.

. Pour définir une approximation interne de $H^1_\#(\Omega)$, on procède de la façon suivante (c'est un peu plus compliqué que pour $H^1_0(\Omega)$).

1. Tout d'abord, toutes les fonctions de base correspondant à des nœuds intérieurs sont dans l'espace d'approximation $V_h^\#$ (elles sont nulles au bord donc en particulier périodiques) ;
2. ensuite pour tout noeud $M_I$ de la frontière $x = 0$ , on sait qu il existe un nœud $M_J$ de la frontière $x = L$ ayant la même ordonnée : la somme des 2 fonctions de base correspondantes est dans l'espace d'approximation $V_h^\#$ ;
3. et pour tout noeud $M_I$ de la frontière $y = 0$ , on sait qu il existe un nœud $M_J$ de la frontière $y = L$ ayant la même abscisse : la somme des 2 fonctions de base correspondantes est dans l'espace d'approximation $V_h^\#$ ;
4. signalons enfin le cas particulier des noeuds du coin pour lequel c'est la somme des 4 fonctions de base correspondantes qui est dans l'espace d'approximation $V_h^\#$ ;

Par construction, $V_h^\# \subset H^1_\#(\Omega)$.

**Question 18.** Etendre la technique vue pour les conditions de dirichlet aux conditions périodiques en créant une matrice de $V_h$ dans $V_h^\#$.

La routine `principal_periodique.m` est le programme principal pour résoudre le problème (6). Compléter le code et valider le.

## 2 Homogénéisation : mise en oeuvre et validation

Nous nous intéressons dans ce TP au problème de Poisson dans un matériau ayant une microstructure périodique

*Trouver* $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ *telle que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{7}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $A_\varepsilon$ un tenseur caractéristique du matériau qui satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme et qui s'écrit

$$A_\varepsilon(\mathbf{x}) = A(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$$

avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\varepsilon$ la période de la microstructure et $A$ un tenseur $1-$périodique.

Nous allons commencer par calculer la solution exacte de ce problème pour différentes périodes ($\varepsilon$ sera donc un paramètre du problème). Nous verrons notamment que les calculs deviennent prohibitifs pour des périodes de la microstructure très petites quand on veut avoir une bonne approximation de la solution. En effet, le pas du maillage devra être choisi assez petit par rapport à la période. Nous nous intéresserons ensuite à la solution du problème homogénéisé. Pour cela, il faudra calculer les coefficients du tenseur homogénéisé en résolvant les problèmes de cellule puis résoudre le problème à coefficients homogénéisés qui lui est beaucoup moins coûteux. Enfin, on validera ce processus en comparant la solution exacte et la solution homogénéisée, qualitativement et quantitativement.

### 2.1 Solution exacte

#### 2.1.1 Discrétisation

**Question 1.** En utilisant les routines écrites dans le précédent TP, écrire un programme principal qui résout le problème (7) discret avec des éléments finis $P^1$. La période $\varepsilon$ du milieu sera un paramètre de votre programme qui pourra être changé facilement.

#### 2.1.2 Validation du code

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée $u_{\varepsilon,h}$ correcte. Pour cela, on résout le problème (7) avec une solution $u$ égale à $u(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1)\,\sin(\pi x_2)$, pour $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$ et $A = \mathrm{Id}$.

**Question 2.** Calculer la donnée $f$ correspondante et modifier la routine `f.m`.

**Question 3.** Comparer qualitativement la solution exacte et la solution discrète.

**Question 4.** Faites de même pour

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 + \sin(2\pi x_1) & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 + \sin(2\pi x_1) & 0 \\ 0 & 4 + \sin(2\pi x_1) \end{pmatrix} \qquad \text{(iv)} \quad A = (2 + \sin(2\pi x_1)) * (4 + \sin(2\pi x_2)) * \mathrm{Id}$$

### 2.2 Solution du problème homogénéisé

#### 2.2.1 Les problèmes de cellule

Pour déterminer le tenseur homogénéisé, il faut résoudre les problémes de cellule suivants (écrits directement sous leur forme variationnelle)

*Pour* $i \in \{1,2\}$, *trouver* $w_i \in V$ *telle que*

$$\forall \phi \in V, \quad \int_Y (A(y)\,\nabla_y w_i(y), \nabla_y \phi(y))\,dy = -\int_Y (A(y)\,e_i, \nabla_y \phi(y))\,dy \tag{8}$$

où $Y = (0,1)^2$, $y = (y_1, y_2)$ et $V = \{\psi \in H^1_\#(Y),\ \int_Y \psi(y)\,dy = 0\}$.

**Question 1.** Rappeler pourquoi ce problème est bien posé.

Il existe plusieurs méthodes pour prendre en compte la contrainte sur la moyenne. Nous vous proposons d'utiliser la méthode dite de *pénalisation* qui consiste à calculer plutôt la solution du problème suivant : soit $\eta > 0$, *Pour* $i \in \{1,2\}$, *trouver* $w_i^\eta \in H^1_\#(Y)$ *telle que* $\forall \phi \in H^1_\#(Y)$,

$$\int_Y (A(y)\,\nabla_y w_i^\eta(y), \nabla_y \phi(y))\,dy + \eta \int_Y w_i^\eta(y)\,\phi(y)\,dy = -\int_Y (A(y)\,e_i, \nabla_y \phi(y))\,dy \tag{9}$$

**Question 2.** Montrer que ce problème est bien posé pour tout $\eta > 0$. Comment varie la constante de coercivité avec $\eta$ ? Quelles sont les conséquences sur la matrice EF associée ?

**Question 3.** Montrer que pour tout $i \in \{1,2\}$,

$$\exists\, C > 0, \quad ||w_i^\eta - w_i||_{H^1} \leq C\eta$$

Dans la suite, on discrétisera les problèmes (9) avec une constante $\eta$ choisie assez petite.

#### 2.2.2 Discrétisation des problèmes de cellule

**Question 4.** En utilisant les routines écrites dans le précédent TP, assembler la matrice EF associée aux problémes (9). On remarquera que c'est la même matrice EF qui intervient pour résoudre les deux problèmes de cellule.

**Question 5.** En utilisant le fait que $\nabla y_i = e_i$, calculer les seconds membres exactement.

**Question 6.** Utiliser la méthode de pseudo-élimination pour prendre en compte les conditions périodiques.

#### 2.2.3 Première validation

**Question 7.** On veut vérifier que le code calcule une solution approchée $w_{i,h}^\eta$ correcte. Pour cela, on résout le problème (8) en considérant $A =$Id. Calculer les solutions exactes et comparer qualitativement avec la solution calculée.

**Question 8.** Faites de même pour le cas (i).

#### 2.2.4 Calcul du tenseur homogénéisé et deuxième validation

On rappelle que le tenseur homogénéisé est donné par

$$A^{\text{eff}}_{jk} = \int_Y (A(y)(e_k + \nabla_y w_k(y)), e_j + \nabla_y w_j(y))\,dy$$

**Question 9.** En utilisant les matrices EF déjà assemblée et la remarque de question 5., coder le calcul des coefficients du tenseur homogénéisé.

**Question 10.** On validera le calcul en considérant les tenseurs des 4 cas donnés précédemment pour lesquels les tenseurs homogénéisés correspondants sont donnés par

$$\text{(i)} \quad A^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad A^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)} \quad A^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(iv)} \quad A^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 4 * \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 * \sqrt{15} \end{pmatrix}$$

### 2.2.5 Calcul de la solution du probléme homogénéisé

Le problème homogénéisé est le suivant

*Trouver $u_0 \in H^1(\Omega)$ telle que*

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(A^{\text{eff}} \nabla u_0\right) = f & \text{dans } \Omega \\ u_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} . \tag{10}$$

**Question 11.** En utilisant les routines codées au TP précédent, calculer la solution approchée $u_{0,h}$ du probléme homogénéisé en utilisant des élements finis $\mathbb{P}^1$.

### 2.2.6 Comparaison de la solution exacte et la solution du problème homogénéisé

On veut vérifier que la solution du problème homogénéisé est proche de la solution exacte quand $\varepsilon$ est assez petit.

**Question 1.** En utilisant le même maillage (assez fin), calculer la solution exacte pour un $\varepsilon$ fixé et la solution du problème homogénéisé et les comparer qualitativement. Faire varier le paramètre $\varepsilon$. Qu'observez vous ?

**Question 2.** Tracer l'erreur $\|u_{\varepsilon,h} - u_{0,h}\|_{L^2(\Omega)}$ en fonction de $\varepsilon$ en utilisant un maillage assez fin. On pourra tracer $\log(1/\varepsilon) \mapsto \log\left(\|u_{\varepsilon,h} - u_{0,h}\|_{L^2(\Omega)} / \|u_{0,h}\|_{L^2(\Omega)}\right)$ pour différentes valeurs de $\varepsilon$.

**Question 3.** Faire de même pour la norme $H^1$. Commenter.

**Question 4.** Proposer et implémenter une meilleure approximation de $u_{\varepsilon,h}$ pour la norme $H^1$. Commenter.