Introduction à la méthode des éléments finis

Les formulations variationnelles

Sonia Fliss

Pour les Tps

Vous devez venir avec vos ordinateurs portables.

Avant le premier TP (2 octobre), il faudra avoir installé impérativement

1) MATLAB (payant) ou OCTAVE (libre)
2) GMSH

J'enverrai un email contenant des instructions pour l' installation de ces logiciels.

Merci de m'envoyer un email si vous avez des soucis d'ordinateurs, d'installations,...

Le premier TP fera l'objet d'un malus/bonus, ainsi que la participation en petite classe.

Théorème de trace (1)

Rappel

Premier théorème de trace

L'application trace $\gamma_0 : \ C^1(\overline{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega) = \{\text{f mes. sur } \partial\Omega \text{ t.q. } \int_{\partial\Omega} |f|^2 d\Gamma < +\infty\}$

$$v \mapsto \gamma_0(v) = \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$$

vérifie $\exists C_0, \ \forall v \in C^1(\overline{\Omega}), \ \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$

Comme $C^1(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, l'application se prolonge par continuité en $\gamma_0 : \ H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ qui vérifie

$$v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$$

$$\exists C_0, \ \forall v \in H^1(\Omega), \ \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Remarques : L'inégalité suivante est fausse

$$\cancel{\exists C_0, \ \forall v \in C^1(\overline{\Omega}), \ \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}}$$

On ne peut pas parler de la trace d'une fonction de $L^2(\Omega)$

Théorème de trace (1)

- γ_0 n'est pas surjective de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$

Proposition

L'image de γ_0 est un sous-espace strict de $L^2(\partial\Omega)$, constitué de fonctions plus régulières. Cet espace est dense dans $L^2(\partial\Omega)$.

Cet espace est noté $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Proposition

Le noyau de γ_0 est $H^1_0(\Omega)$. Autrement dit

$$H^1_0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Preuve de $\subset$: toute fonction de v de $\mathcal{D}(\Omega)$ vérifie $\gamma_0 v = 0$. De plus, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$

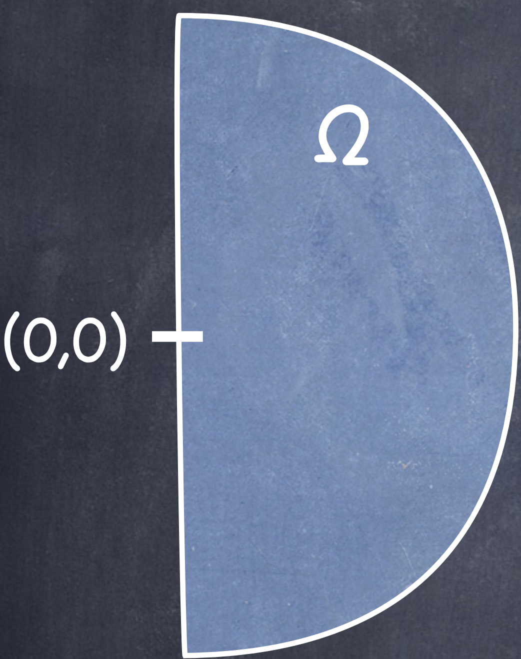
$$\text{Soit } v \in H^1_0(\Omega), \quad \exists\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}} \quad \lim_{n\in\mathbb{N}} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

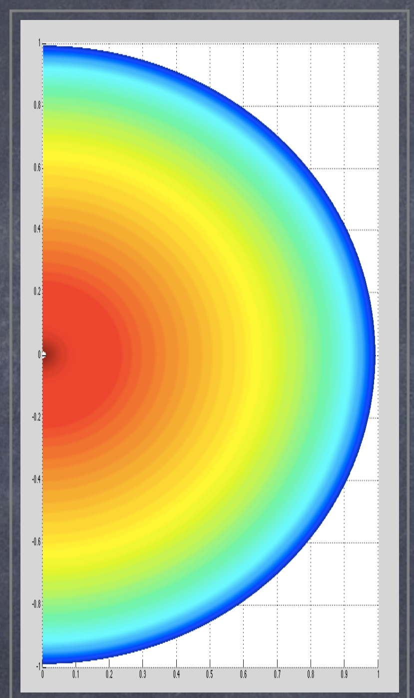
γ_0 étant continue pour la norme H^1 , on trouve $\lim_{n\in\mathbb{N}} \|\gamma_0 v_n - \gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0 \quad \Rightarrow \gamma_0 v = 0$

Théorème de trace (1)

Exemple en 2D :

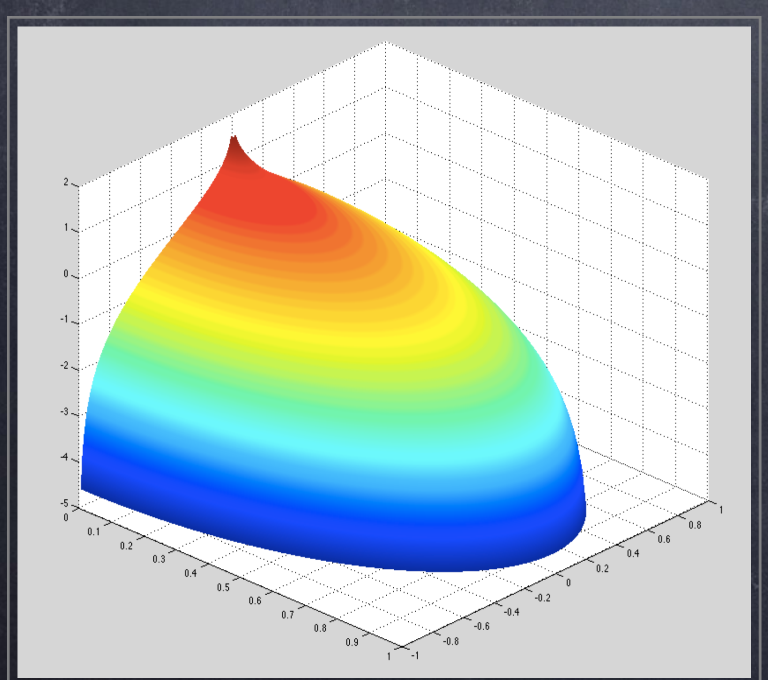
La fonction v: $(x,y) \mapsto \ln(\ln(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}))$





- elle appartient à $C^0(\Omega)$

- mais elle n'appartient pas à $C^0(\overline{\Omega})$
  puisqu'elle n'est pas continue en (0,0).
  On ne peut donc pas définir v(0,0)!



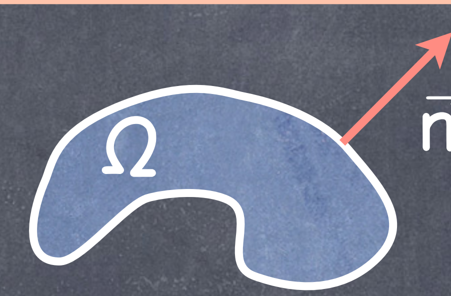
- Elle appartient à $H^1(\Omega)$ (à faire en exercice)

donc d'après le théorème de trace, on peut définir sa trace sur le bord $\partial\Omega$ et c'est une fonction de $L^2(\partial\Omega)$.

Rappel

Généralisation des formules de Green (1)

Théorème



Pour toute fonction $w \in H^1(\Omega)$

(G0 bis) $$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \gamma_0 w\, n_i\, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq n$$

Vous trouverez les notations suivantes : $\boxed{\int_{\partial\Omega} \gamma_0 w\, n_i\, d\Gamma}$ ou $\boxed{\int_{\partial\Omega} w|_{\partial\Omega}\, n_i\, d\Gamma}$ ou $\int_{\partial\Omega} w\, n_i\, d\Gamma$

Corollaire 1

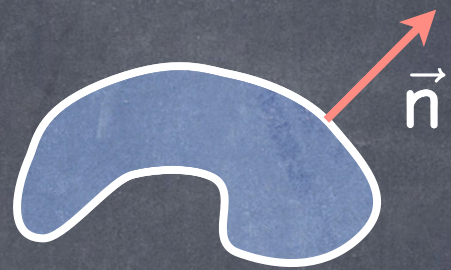
Pour toutes fonctions $u, v \in H^1(\Omega)$

(G1 bis) $$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u\, \gamma_0 v\, n_i\, d\Gamma \qquad 1 \leq i \leq n$$

Vous trouverez les notations suivantes : $\boxed{\int_{\partial\Omega} \gamma_0 u\, \gamma_0 v\, n_i\, d\Gamma}$ ou $\boxed{\int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, n_i\, d\Gamma}$ ou $\int_{\partial\Omega} u\, v\, n_i\, d\Gamma$

Généralisation des formules de Green (2)

Peut on généraliser la Formule de Green d'ordre 2?



$u, v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$

(G2) $$\int_\Omega \left(\triangle u\, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, v\, d\Gamma$$

- L'intégrale volumique s'étend aux fonctions $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$

$$\left| \int_\Omega \triangle u\, v\, d\Omega \right| \underset{C.S.}{\leq} \left(\int_\Omega |\triangle u|^2 d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq \|\triangle u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^1}$$

$$\left| \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, d\Omega \right| \underset{C.S.}{\leq} \left(\int_\Omega |\vec{\nabla} u|^2 d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\vec{\nabla} v|^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^1}$$

Il suffit d'utiliser le théorème de prolongement par continuité.

- Peut on étendre l'intégrale surfacique à ces fonctions ?

C'est le deuxième théorème de trace.

Rappel: $H^2(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega)\ \forall i,j \in \{1,\dots,n\} \}$

$$\|v\|^2_{H^2(\Omega)} = \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 \right) d\Omega$$

Théorème de trace (2)

Deuxième théorème de trace

L'application trace $\gamma_1 : \; C^2(\overline{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega) = \{f \text{ mes. sur } \partial\Omega \text{ t.q. } \int_{\partial\Omega} |f|^2 d\Gamma < +\infty\}$

$$v \mapsto \gamma_1 v = \vec{\nabla} v \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}$$

vérifie $\exists C_1, \; \forall v \in C^2(\overline{\Omega}), \; \|\gamma_1 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1 \|v\|_{H^2(\Omega)}$

Comme $C^2(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^2(\Omega)$, l'application se prolonge par continuité en $\gamma_1 : \; H^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ qui vérifie

$$v \mapsto \gamma_1 v = \vec{\nabla} v \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}$$

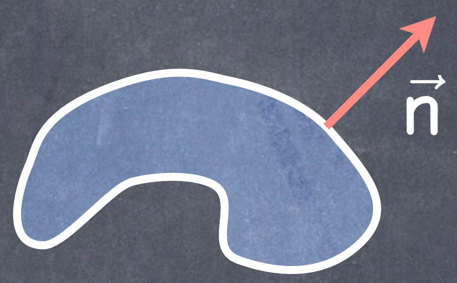
$$\exists C_1, \; \forall v \in H^2(\Omega), \; \|\gamma_1 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1 \|v\|_{H^2(\Omega)}$$

Remarques : L'inégalité suivante est fausse

$$\cancel{\exists C_1, \; \forall v \in C^1(\overline{\Omega}), \; \|\gamma_1 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

On ne peut pas parler de la trace normale d'une fonction de $H^1(\Omega)$

Généralisation des formules de Green (2)



$u, v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$

(G2) $$\int_\Omega \left(\triangle u\, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, v\, d\Gamma$$

$$\shortparallel$$

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_1 u\, \gamma_0 v\, d\Gamma$$

- L'intégrale volumique s'étend aux fonctions $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$

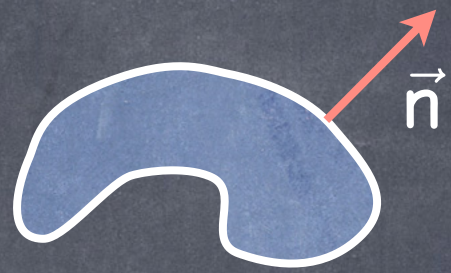
$$\left| \int_\Omega \left(\triangle u\, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega \right| \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \, \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

- L'intégrale surfacique s'étend aux fonctions $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ car dans ce cas $\gamma_1 u$ et $\gamma_0 v$ sont dans $L^2(\partial\Omega)$.

$$\left| \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, v\, d\Gamma \right| \underset{\text{C.S.}}{\leq} \|\gamma_1 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \, \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\Omega \, \|u\|_{H^2(\Omega)} \, \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

d'après les 1er et 2ème théorèmes de trace

Généralisation des formules de Green (2)



$u, v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$

(G2) $$\int_\Omega \left(\triangle u\, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, v\, d\Gamma$$

$$= \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u\, \gamma_0 v\, d\Gamma$$

Théorème

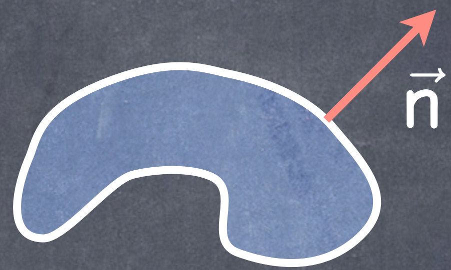
Pour toutes fonctions $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$

(G2 bis) $$\int_\Omega \left(\triangle u\, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \gamma_1 u\, \gamma_0 v\, d\Gamma$$

Vous trouverez les notations suivantes : $\boxed{\int_{\partial\Omega} \gamma_1 u\, \gamma_0 v\, d\Gamma}$ ou $\boxed{\int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma}$ ou $\int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, v\, d\Gamma$

Une petite parenthèse (hors programme)

On vient de voir que pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$



(G2) $$\int_\Omega \left(\triangle u \, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} \, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

Peut on étendre la formule aux fonctions $u \in H^1(\Omega, \triangle)$, $v \in H^1(\Omega)$?

On rappelle que $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega, \triangle)$

mais il n'y a pas égalité...

Rappel: $H^1(\Omega, \triangle) = \{ v \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \triangle v \in L^2(\Omega) \}$ $\quad \|v\|^2_{H^1(\Omega,\triangle)} = \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right|^2 d\Omega$

Une petite parenthèse (hors programme)

On vient de voir que pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$

(G2) $$\int_\Omega \left(\triangle u\, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma$$

Peut on étendre la formule aux fonctions $u \in H^1(\Omega, \triangle)$, $v \in H^1(\Omega)$?

- On peut étendre l'intégrale volumique

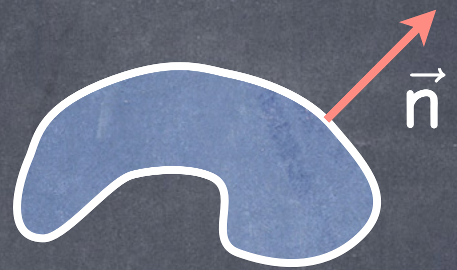
$$\left|\int_\Omega \triangle u\, v\, d\Omega\right| \underset{C.S.}{\leq} \left(\int_\Omega |\triangle u|^2 d\Omega\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 d\Omega\right)^{1/2} \leq \|\triangle u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1(\Omega,\triangle)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\left|\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, d\Omega\right| \underset{C.S.}{\leq} \left(\int_\Omega |\vec{\nabla} u|^2 d\Omega\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\vec{\nabla} v|^2 d\Omega\right)^{1/2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1(\Omega,\triangle)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Rappel: $H^1(\Omega, \triangle) = \{ v \in H^1(\Omega) \text{ t.q. } \triangle v \in L^2(\Omega) \}$ $\qquad \|v\|^2_{H^1(\Omega,\triangle)} = \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right|^2 d\Omega$

Une petite parenthèse (hors programme)

On vient de voir que pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$



(G2) $$\int_\Omega \left(\triangle u\, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma$$

Peut on étendre la formule aux fonctions $u \in H^1(\Omega, \triangle)$, $v \in H^1(\Omega)$?

- On peut étendre l'intégrale volumique

$$\left|\int_\Omega \triangle u\, v\, d\Omega\right| \underset{C.S.}{\leq} \left(\int_\Omega |\triangle u|^2 d\Omega\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 d\Omega\right)^{1/2} \leq \|\triangle u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1(\Omega,\triangle)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

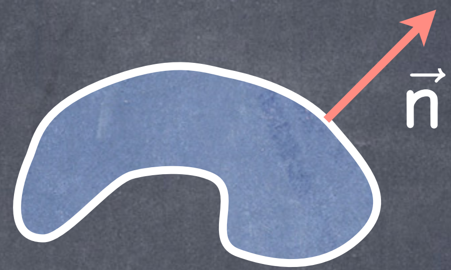
$$\left|\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, d\Omega\right| \underset{C.S.}{\leq} \left(\int_\Omega |\vec{\nabla} u|^2 d\Omega\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\vec{\nabla} v|^2 d\Omega\right)^{1/2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1(\Omega,\triangle)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

- Quant à l'intégrale surfacique...

Si v est dans $H^1(\Omega, \triangle)$ mais pas dans $H^2(\Omega)$, $\gamma_1 v \notin L^2(\partial\Omega)$ mais on peut lui donner un sens plus faible. Il faudrait remplacer

$$\int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, v\, d\Gamma \longrightarrow {}_{(\mathrm{Im}\,\gamma_0)'} \langle \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}\, , v|_{\partial\Omega} \rangle_{\mathrm{Im}\,\gamma_0}$$

Une petite parenthèse (hors programme)



On vient de voir que pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$

(G2) $$\int_\Omega \left(\triangle u\, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma$$

Peut on étendre la formule aux fonctions $u \in H^1(\Omega, \triangle)$, $v \in H^1(\Omega)$?

La réponse est OUI mais c'est plus compliqué !

$$\int_\Omega \left(\triangle u\, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = {}_{\mathrm{Im}\gamma_0'} < \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega} >_{\mathrm{Im}\gamma_0}$$

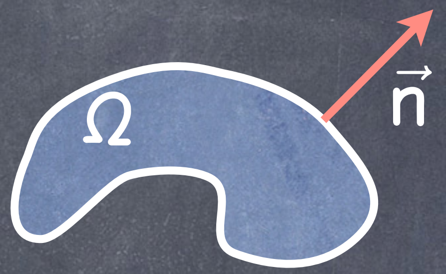
Dans ce cours, dès qu'une fonction est dans $H^1(\Omega, \triangle)$, on fera l'hypothèse qu'elle est dans $H^2(\Omega)$ pour simplifier et on appliquera la formule de Green avec des intégrales.

On admettra que cette hypothèse n'est pas nécessaire, les preuves sont seulement un peu plus techniques.

Formulations variationnelles

Dans cet amphi, nous nous intéressons à la résolution des problèmes

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega \\ \text{+conditions aux limites} \end{array} \right.$



avec $f \in L^2(\Omega)$.

1) avec conditions de Dirichlet homogènes

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

2) avec conditions de Dirichlet non homogènes

$$u = g \quad \text{sur } \partial\Omega \qquad \text{avec} \quad g \in \ldots$$

3) avec conditions de Neumann (non) homogènes

$$\nabla u \cdot n = g \quad \text{sur } \partial\Omega \qquad \text{avec } g \in L^2(\partial\Omega).$$

4) Le cas des conditions de Fourier $\nabla u \cdot \vec{n} + \lambda u = g$ sur $\partial\Omega$ avec $g \in L^2(\partial\Omega)$ sera étudié dans l'exercice 1 (TD2).

$\boxed{\text{Les conditions aux limites jouent un rôle crucial !}}$

Conditions aux limites de type Dirichlet homogènes

Soit $f \in L^2(\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{ll} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$

On multiplie l'équation volumique par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\Omega + \int_\Omega u\, v\, d\Omega = \int_\Omega f\, v\, d\Omega$$

$u \in H^1(\Omega)$ et $\triangle u = u - f \in L^2(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \underline{u \in H^1(\Omega, \triangle)}$

$\underline{\text{On suppose } u \in H^2(\Omega)}$ et on a $v \in H^1(\Omega)$, on peut donc appliquer la formule de Green

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma + \int_\Omega u\, v\, d\Omega = \int_\Omega f\, v\, d\Omega \quad \text{(d'après G2 bis)}$$

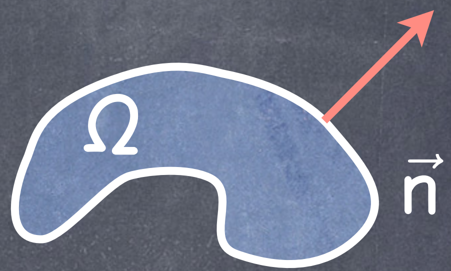
Rappel Pour toutes fonctions $\underline{u \in H^2(\Omega),\ v \in H^1(\Omega)}$

(G2 bis) $$\int_\Omega \left(\triangle u\, v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma$$

Conditions aux limites de type Dirichlet homogènes

Soit $f \in L^2(\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega \\ \boxed{u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega} \end{array} \right.$



Pour toute fonction test $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma}_{\text{Que faire de ce terme?}} + \int_\Omega u v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$ (d'après G2 bis)

Si on considère $v \in H^1_0(\Omega)$, l'intégrale surfacique disparaît

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

Comme $u \in H^1(\Omega)$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a également $u \in H^1_0(\Omega)$.

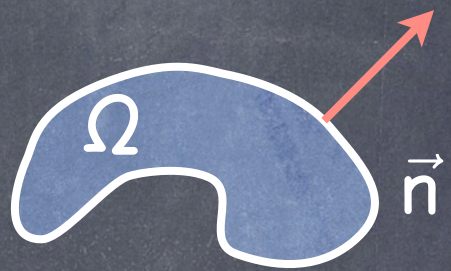
Rappel.
$H^1_0(\Omega)$ est défini come l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. On montre de plus que

$$H^1_0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Conditions aux limites de type Dirichlet homogènes

Soit $f \in L^2(\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \boxed{u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega} & \end{array} \right.$



$$\Downarrow$$

Trouver $\boxed{u \in H_0^1(\Omega)}$ telle que

$$\boxed{\forall v \in H_0^1(\Omega)} \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega$$

Remarques :

- La solution u et les fonctions test v appartiennent au même espace $H_0^1(\Omega)$, un espace de Hilbert (c'est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$)
- La condition aux limites apparaît dans la définition de l'espace (ici $H_0^1(\Omega)$) . On parle de condition aux limites essentielle.

Conditions aux limites de type Dirichlet homogènes

Soit $f \in L^2(\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$

$$\Downarrow$$

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u\, v \, d\Omega = \int_\Omega f\, v \, d\Omega$$

Remarques : La F.V. admet au plus une solution.

Si u_1 et u_2 sont solutions alors

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \vec{\nabla}(u_1 - u_2) \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega (u_1 - u_2)\, v \, d\Omega = 0$$

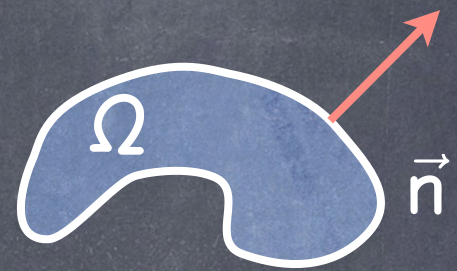
En particulier pour $v = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left[\left| \vec{\nabla}(u_1 - u_2) \right|^2 + |u_1 - u_2|^2 \right] d\Omega = 0 \Rightarrow \|u_1 - u_2\|^2_{H^1(\Omega)} = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2$$

Conditions aux limites de type Dirichlet homogènes

Soit $f \in L^2(\Omega)$.



Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que
$$\left| \begin{array}{rl} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega$$

Remarques : • La solution u de la F.V. est unique.

La solution du problème de départ est donc également unique.

• Dépendance continue par rapport à la donnée f

Si on choisit v = u dans la F.V.

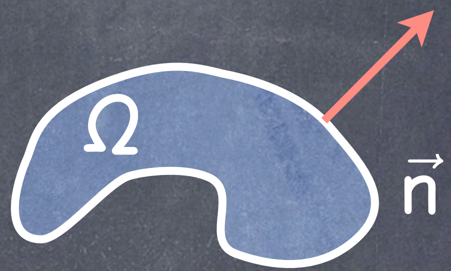
$$\int_\Omega \left[|\vec{\nabla} u|^2 + |u|^2 \right] d\Omega = \int_\Omega f \, u \, d\Omega \quad \Rightarrow \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \underset{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Conditions aux limites de type Dirichlet homogènes

Soit $f \in L^2(\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{rl} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$



$$\Downarrow$$

Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega$$

Remarques :

- La solution u de la F.V. est unique. La solution du problème de départ est donc également unique.
- Dépendance continue par rapport à la donnée f

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

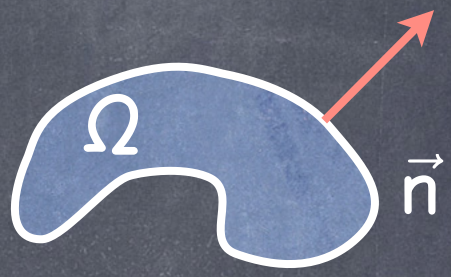
- La F.V. et le problème de départ sont équivalents. En effet...

Conditions aux limites de type Dirichlet homogènes

Soit $f \in L^2(\Omega)$.

Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$



1) On cherche u dans $H^1_0(\Omega)$ donc $u = 0 \quad$ sur $\partial\Omega$

On a donc retrouvé la condition aux limites du problème de départ.

Rappel de l'amphi 1.

$H^1_0(\Omega)$ est défini come l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. On montre de plus que

$$H^1_0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Conditions aux limites de type Dirichlet homogènes

Soit $f \in L^2(\Omega)$.

Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

2) On aimerait appliquer la formule (G2 bis) mais on ne sait pas a priori que $u \in H^2(\Omega)$ ou au moins que $u \in H^1(\Omega, \triangle)$

On choisit ensuite $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$

$v \in \mathcal{D}(\Omega)$: v à support compact $K \subset \Omega$ + $v \in C^0(K)$, $\vec{\nabla} v \in C^0(K)^n \Rightarrow \quad v \in H^1(\Omega)$

$+ \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad v \in H^1_0(\Omega)$

On passe par une dérivation au sens des distributions

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\Omega \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^n < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} > \underset{\uparrow}{=} - \sum_{i=1}^n < \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v >$$

$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$

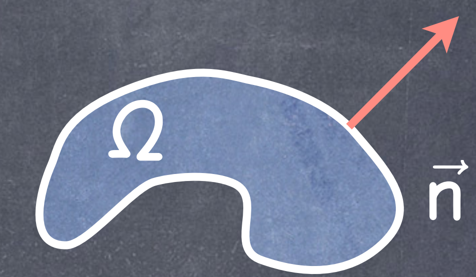
dér. au sens des distrib.

$$= - < \triangle u, v >$$

Conditions aux limites de type Dirichlet homogènes

Soit $f \in L^2(\Omega)$.

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que



$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

2) On choisit ensuite $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$

On passe par une dérivation au sens des distributions

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = - < \Delta u, v >$$

et en utilisant également

$$\int_\Omega u v \, d\Omega = < u, v > , \quad \int_\Omega f v \, d\Omega = < f, v > \qquad \text{car } u, \ f \in L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

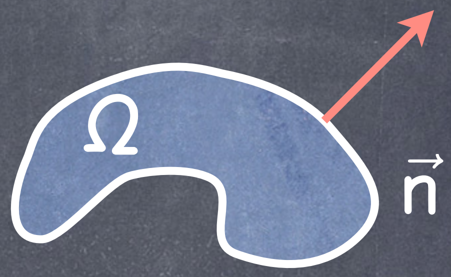
$$\Rightarrow \quad < -\Delta u + u - f, v > = 0, \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta u + u - f = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta u + u = f \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \qquad \text{car } f \in L^2(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\Delta u + u = f \quad \text{presque partout dans } \Omega}$$

Conditions aux limites de type Dirichlet homogènes



Soit $f \in L^2(\Omega)$.

Trouver $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega$$

$$\Updownarrow$$

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{rl} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$

Il y a donc équivalence entre les 2 problèmes. Qu'a-t-on gagné?

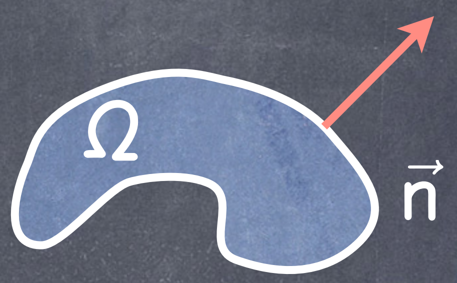
On verra à la prochaine séance que la F.V. est un problème bien posé (**existence,** unicité d'une solution et continuité par rapport aux données) en utilisant le théorème de Lax Milgram.

L'approximation de la F.V. par la méthode des éléments finis sera l'objet des séances suivantes.

Conditions aux limites de type Dirichlet non homogènes

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \ldots$

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{rl} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$



A quel espace doit appartenir la donnée g ?

Est ce qu'une donnée surfacique dans $L^2(\partial\Omega)$ suffit? NON !

Comme on cherche $u \in H^1(\Omega)$, pour que la condition aux limites ait un sens, il faut que

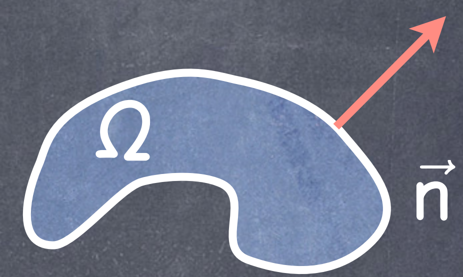
$$\boxed{g \in \mathrm{Im}(\gamma_0) \ (\equiv H^{1/2}(\partial\Omega))}$$

Rappel L'application trace $\gamma_0 : \begin{array}{l} H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega) \\ v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega} \end{array}$ n'est pas surjective. L'image de γ_0 est un sous-espace strict de $L^2(\partial\Omega)$, constitué de fonctions plus régulières

Conditions aux limites de type Dirichlet non homogènes

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \mathrm{Im}(\gamma_0)$

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left|\begin{array}{ll} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right.$



On multiplie l'équation volumique par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\Omega + \int_\Omega u\, v\, d\Omega = \int_\Omega f\, v\, d\Omega$$

$u \in H^1(\Omega)$ et $\triangle u = u - f \in L^2(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \underline{u \in H^1(\Omega, \triangle)}$

$\underline{\text{On suppose } u \in H^2(\Omega)}$ et on a $v \in H^1(\Omega)$, on peut donc appliquer la formule de Green

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega}\, d\Gamma + \int_\Omega u\, v\, d\Omega = \int_\Omega f\, v\, d\Omega$$ (d'après G2 bis)

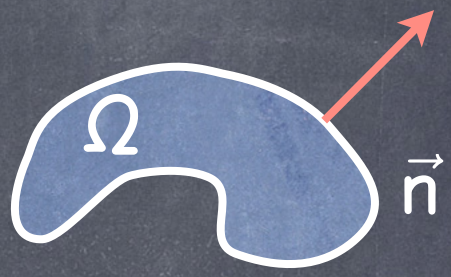
Si on considère $v \in H^1_0(\Omega)$, l'intégrale surfacique disparaît

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, d\Omega + \int_\Omega u\, v\, d\Omega = \int_\Omega f\, v\, d\Omega$$

Conditions aux limites de type Dirichlet non homogènes

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \mathrm{Im}(\gamma_0)$

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{ll} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$



$$\Updownarrow$$

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u = g$ sur $\partial\Omega$ et

$\forall v \in H^1_0(\Omega)$ $$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega$$

Remarques :

- La solution u de la F.V. est unique.

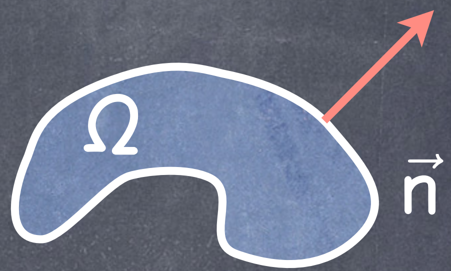
La solution du problème de départ est donc également unique.

- La F.V. et le problème de départ sont équivalents.

C'est exactement la même démonstration que dans le cas des conditions de Dirichlet homogènes.

Conditions aux limites de type Dirichlet non homogènes

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \mathrm{Im}(\gamma_0)$



Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left|\begin{array}{ll} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right.$

$$\Updownarrow$$

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u = g$ sur $\partial\Omega$ et

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u\, v \, d\Omega = \int_\Omega f\, v \, d\Omega$$

<u>**Remarques :**</u> La solution u et les fonctions test v n'appartiennent pas au même espace.

Comme γ_0 est surjective de $H^1(\Omega)$ dans $\mathrm{Im}(\gamma_0)$, on sait que

$\exists u_g \in H^1(\Omega), \quad u_g|_{\partial\Omega} = g \qquad u_g$ est un relèvement de g.

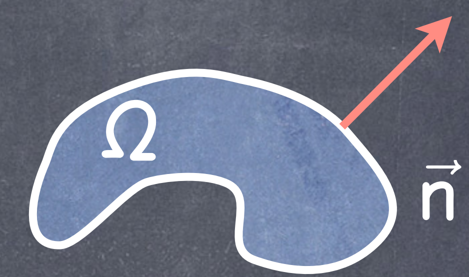
On montre facilement que $u_0 = u - u_g$ est dans $H^1_0(\Omega)$ et vérifie

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \int_\Omega \vec{\nabla} u_0 \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u_0\, v \, d\Omega = \int_\Omega \left(f\, v - \vec{\nabla} u_g \cdot \vec{\nabla} v - u_g\, v\right) d\Omega$$

Conditions aux limites de type Dirichlet non homogènes

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in Im(\gamma_0)$

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u = g$ sur $\partial\Omega$ et



$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

$$\Updownarrow$$

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ avec $u = u_0 + u_g$ où

- $u_g \in H^1(\Omega)$, $u_g|_{\partial\Omega} = g$
- $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ est telle que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \int_\Omega \vec{\nabla} u_0 \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u_0 v \, d\Omega = \int_\Omega \left(f v - \vec{\nabla} u_g \cdot \vec{\nabla} v - u_g v \right) d\Omega$$

Remarques : La solution est indépendante du choix du relèvement!

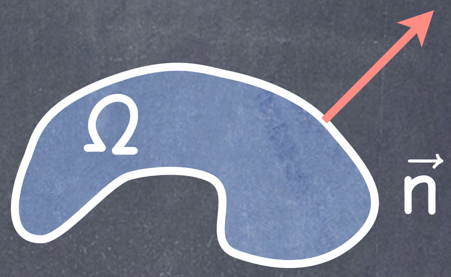
- Pour tout $g \in Im(\gamma_0)$, comment construire un u_g ?

Exemple simple : pour g=C (une constante), il suffit de choisir u_g=C.

Dans le cas général, on verra qu'on aura simplement besoin de le faire au niveau discret et que c'est relativement simple.

Conditions aux limites de type Dirichlet non homogènes

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \mathrm{Im}(\gamma_0)$



Trouver $u \in H^1(\Omega)$ avec $u = u_0 + u_g$ où

- $u_g \in H^1(\Omega),\ u_g|_{\partial\Omega} = g$
- $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ est telle que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \quad \int_\Omega \vec{\nabla} u_0 \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u_0 \, v \, d\Omega = \int_\Omega \left(f v - \vec{\nabla} u_g \cdot \vec{\nabla} v - u_g \, v \right) d\Omega$$

C'est ce problème dont on étudiera le caractère bien posé (grâce au théorème de Lax Milgram) et que l'on pourra discrétiser par la méthode des éléments finis.

Conditions aux limites de type Neumann

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{ll} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot n = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$

On multiplie l'équation volumique par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω

$$-\int_\Omega \triangle u \, v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega$$

$u \in H^1(\Omega)$ et $\triangle u = u - f \in L^2(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \underline{u \in H^1(\Omega, \triangle)}$

On suppose $u \in H^2(\Omega)$ et on a $v \in H^1(\Omega)$, on peut donc appliquer la formule de Green

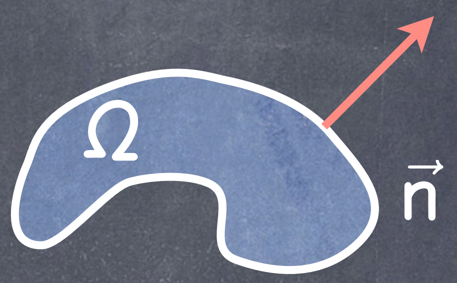
$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega \qquad \text{(d'après G2 bis)}$$

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma \qquad \text{(d'après la cond. aux lim.)}$$

Conditions aux limites de type Neumann

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega \\ \boxed{\nabla u \cdot n = g \quad \text{sur } \partial\Omega} \end{array} \right.$



$$\Downarrow$$

Trouver $\boxed{u \in H^1(\Omega)}$ telle que

$$\boxed{\forall v \in H^1(\Omega)}, \quad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u\, v \, d\Omega = \int_\Omega f\, v\, d\Omega + \boxed{\int_{\partial\Omega} g\, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma}$$

Remarques :

- La solution u et les fonctions test v appartiennent au même espace $H^1(\Omega)$, un espace de Hilbert.

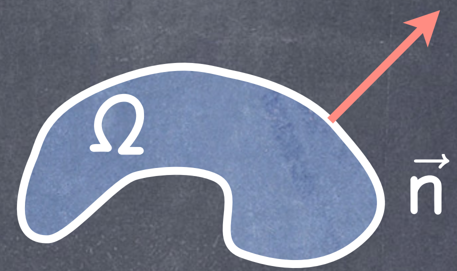
- La conditions aux limites n'apparaît pas dans la définition de l'espace (ici $H^1(\Omega)$) mais directement dans la F.V.

  On parle de condition aux limites naturelle.

Conditions aux limites de type Neumann

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\left| \begin{array}{ll} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot n = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$



$$\Downarrow$$

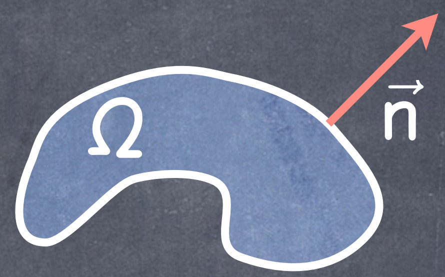
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

Remarques : • La solution u de la F.V. est unique et donc la solution du problème départ est aussi unique.

• La F.V. et le problème de départ sont équivalents. En effet...

Conditions aux limites de type Neumann



Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

1) On aimerait appliquer la formule (G2 bis) mais on ne sait pas a priori que $u \in H^2(\Omega)$ ou au moins que $u \in H^1(\Omega, \triangle)$

On commence par choisir $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$

$v \in \mathcal{D}(\Omega)$: v à support compact $K \subset \Omega$ + $v \in C^0(K)$, $\vec{\nabla} v \in C^0(K)^n \;\Rightarrow\; v \in H^1(\Omega)$

Comme $v|_{\partial\Omega} = 0$, dans la F.V. il reste

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

On passe par une dérivation au sens des distributions

comme au transparent 25

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\Omega \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^n < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} > \underset{\uparrow}{=} - \sum_{i=1}^n < \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v > = - < \triangle u, v >$$

$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ der. au sens des distrib.

Conditions aux limites de type Neumann

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

1) On commence par choisir $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$

On passe par une dérivation au sens des distributions

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = - < \triangle u, v >$$

et en utilisant également

$$\int_\Omega u \, v \, d\Omega = < u, v > \, , \; \int_\Omega f \, v \, d\Omega = < f, v > \quad \text{car } u, \; f \in L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

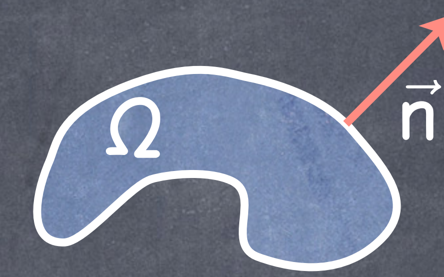
$$\Rightarrow \quad < -\triangle u + u - f, v > = 0, \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad -\triangle u + u - f = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad -\triangle u + u = f \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \qquad \text{car } f \in L^2(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\triangle u + u = f \quad \text{presque partout dans } \Omega}$$

Conditions aux limites de type Neumann



Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

2) On choisit ensuite $v \in H^1(\Omega)$

On sait maintenant que $\triangle u = u - f \in L^2(\Omega)$ donc $u \in H^1(\Omega, \triangle)$. On suppose $u \in H^2(\Omega)$ et on peut appliquer la formule (G2 bis)

La F.V. devient $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$-\int_\Omega \triangle u \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

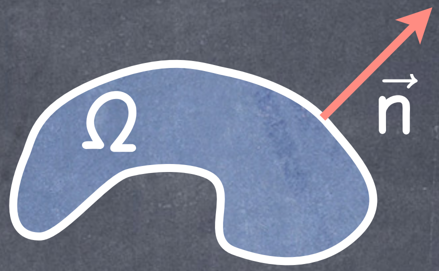
On vient de démontrer que $-\triangle u + u = f$ dans $L^2(\Omega)$ donc il reste

$$\forall v \in H^1(\Omega), \left(\vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} - g, v|_{\partial\Omega} \right)_{L^2(\partial\Omega)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall \psi \in \mathrm{Im}\gamma_0, \quad \left(\vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} - g, \psi \right)_{L^2(\partial\Omega)} = 0$$

comme $\mathrm{Im}\,\gamma_0$ est dense dans $L^2(\partial\Omega) \Rightarrow \forall \psi \in L^2(\partial\Omega), \left(\vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} - g, \psi \right)_{L^2(\partial\Omega)} = 0$

Conditions aux limites de type Neumann



Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

2) On choisit ensuite $v \in H^1(\Omega)$

On sait maintenant que $\triangle u = u - f \in L^2(\Omega)$ donc $u \in H^1(\Omega, \triangle)$. On suppose $u \in H^2(\Omega)$ et on peut appliquer la formule (G2 bis)

La F.V. devient $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$-\int_\Omega \triangle u \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

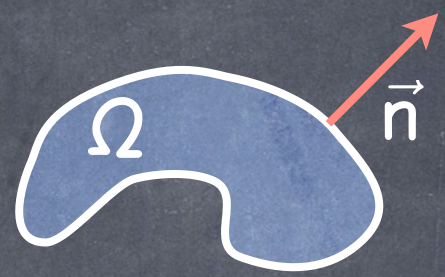
On vient de démontrer que $-\triangle u + u = f$ dans $L^2(\Omega)$ donc il reste

$$\forall v \in H^1(\Omega), \qquad \int_{\partial\Omega} \left(\vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} - g \right) v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma = 0$$

ce qui implique $\quad \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = g \quad$ dans $L^2(\partial\Omega)$

ou encore $\quad \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = g \quad$ presque partout sur $\partial\Omega$

Conditions aux limites de type Neumann



Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u \, v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

$$\Updownarrow$$

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que
$$\left| \begin{array}{ll} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot n = g & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Il y a donc équivalence entre les 2 problèmes. Qu'a-t-on gagné?

> On verra à la prochaine séance que la F.V. est un problème **bien posé** (existence et unicité d'une solution) en utilisant le **théorème de Lax Milgram**.

> L'approximation de la F.V. par la **méthode des éléments finis** sera l'objet des séances suivantes.

Comparaison entre les conditions aux limites essentielles et naturelles

Soit $f \in L^2(\Omega)$.

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

$$\Updownarrow$$

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\left| \begin{array}{ll} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- La condition aux limites intervient dans l'espace: C.L. essentielle.
- Il est impossible de prendre en compte cette condition directement dans la F.V.
- Pourquoi ne pas prendre $v \in H^1(\Omega)$ et garder le terme $\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n \, v \, d\Gamma$?

Pour une fct de H^1 $,\nabla u \cdot n$ n'a pas de sens.

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_\Omega u v \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

$$\Updownarrow$$

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\left| \begin{array}{ll} -\triangle u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- La condition aux limites intervient naturellement dans la F.V.: C.L. naturelle
- Dans la F.V. pourquoi ne pas chercher u dans ...

$$\cancel{\{v \in H^1(\Omega), \vec{\nabla} v \cdot \vec{n} = 0\}}$$

pour une fonction de H^1 $,\vec{\nabla} v \cdot \vec{n}$ n'a pas de sens.

$$\cancel{\{v \in H^2(\Omega), \vec{\nabla} v \cdot \vec{n} = 0\}}$$

la forme bilinéaire n'est pas coercive sur cet espace : on ne peut pas appliquer le théorème de Lax Milgram.

Introduction à la méthode des éléments finis

Les formulations variationnelles

Sonia Fliss