TRANSFORMATION DE FLOQUET BLOCH dans $\mathbb{R}$

Tout ce qui sera fait ici sera fait dans $\mathbb{R}$ mais peut être étendu simplement à $\mathbb{R}^n$.

1. Rappels sur la transformée de FOURIER et les séries de FOURIER

1.1. Transformée de FOURIER

* permet de représenter une fonction comme une somme de fonctions exponentielles complexes.

Définition : si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$ TF de f. ($\hat{f} = TF(f)$)

Propriété fondamentale : si f et $f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\, \hat{f}(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Théorème : La TF est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ et on a $\forall u, v \in L^2(\mathbb{R})$

- $$\int_{\mathbb{R}} u(x)\, \overline{v(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)\, \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi \qquad \text{(Id de Parseval)}$$
- $$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi \qquad \text{(Idté de Plancherel)}$$

et on a la formule d'inversion

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi$$

La propriété fondamentale s'étend aux fonctions $f \in H^1(\mathbb{R})$. Cette propriété permet de montrer que plus f est régulière, plus sa TF décroît à l'∞ et ~~réciproquement~~ inversement.

Exercice : Soit $u_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$ solution de $-\Delta u_\varepsilon - \rho_0(\omega^2 + i\varepsilon)\, u_\varepsilon = f$ dans $\mathbb{R}$ avec $f \in L^2(\mathbb{R})$ et ρ_0 constante (On verra que ce pb est bien posé dans le prochain cours).
Calculer u_ε en utilisant la transformation de FOURIER.

La TF permet de "diagonaliser" l'opérateur $-\Delta$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "TF"] \arrow[d, "-\Delta"'] & \hat{u} \arrow[d, "\xi^2"] \\ -\Delta u \arrow[r, "TF"] & \xi^2 \hat{u} \end{tikzcd}$$

et tous les opérateurs à coefficients constants.

Et si $\rho_0 = \rho$ avec ρ variable ?

Dans ce cours, nous allons expliquer comment "diagonaliser" les opérateurs à coefficients périodiques.

1.2. Séries de Fourier.

Soit L : échelle artificielle pour l'instant qui deviendra la période dans la suite

Proposition. soit $(u_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ $\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |u_m|^2 < +\infty\right)$.

La fonction $\hat{u}$ est définie par $\hat{u}(k) := \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m e^{-imkL}$

alors $\hat{u} \in L^2_{pe}(\mathbb{R})$ où $L^2_{pe}(\mathbb{R}) = \{\hat{u} \in L^2_{loc},\ \hat{u} \text{ est } \frac{2\pi}{L}\text{-périodique}\}$.

Preuve : $\left\{\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\, e^{-imkL}, m\in\mathbb{Z}\right\}$ est une base hilbertienne de $L^2\left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right)$

donc $\hat{u}$ a bien un sens et $\int_{-\pi/L}^{\pi/L} |\hat{u}(k)|^2 dk = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |u_m|^2$.

$\hat{u} \in L^2\left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right)$ et on montre facilement que $\hat{u}$ est $\frac{2\pi}{L}$ périodique

Définition : $\hat{u}$ est la série de Fourier de $(u_m)_{m\in\mathbb{Z}}$

Lemme :

$$\int_{-\pi/L}^{\pi/L} |\hat{u}(k)|^2 dk = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |u_m|^2.$$

Formule d'inversion :

$$u_m = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{u}(k)\, e^{imkL} dk.$$

De la même façon que pour la TF, plus la suite $(u_n)_n$ décroît, plus sa série de Fourier est régulière et réciproquement.

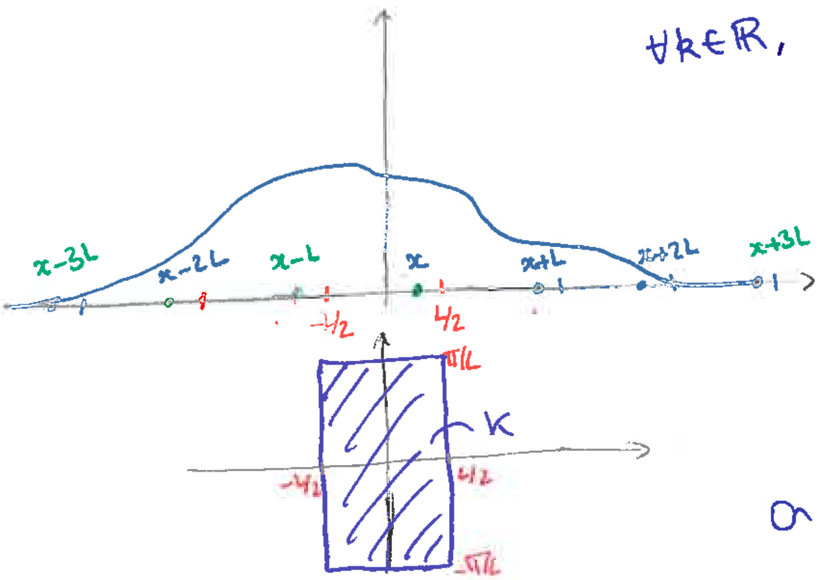
2. Transformation de Floquet Bloch.

2.1 Définition

La TFB sur $\mathbb{R}$ est associée à une échelle de référence $L>0$.

Elle transforme une f° d'une variable $x\in\mathbb{R}$ en une fonction de 2 variables (x, k).

Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\{u(x+mL), m\in\mathbb{Z}\} \in \ell^2$ (suite finie)



$$\forall k\in\mathbb{R},\ \hat{u}(x,k) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} u(x+mL)\, e^{-imkL}$$

- $\forall x\in\mathbb{R}$, $k \longmapsto \hat{u}(x,k)$ est $\frac{2\pi}{L}$-per
- $\forall k\in\mathbb{R}, \forall x$ $\hat{u}(x+L,k) = e^{ikL}\hat{u}(x,k)$

Preuve : $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\hat{u}(x+L,k) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} u(x+L+mL)\, e^{-imkL}$$

$$= e^{ik}\ \hat{u}(x,k).$$

On peut restreindre $\hat{u}$ à $K = \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right)$

Définition : $\mathcal{F}_L : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(K)$
$$u \longmapsto \mathcal{F}_L u = \hat{u}$$

Remarques :
- dans la def précédente, il suffit que $u \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$.
- $\hat{u}$ est C^0 dans K borné donc $\hat{u} \in L^2(K)$.
- $\hat{u}$ est même C^∞ par rapport à x et par rapport à k (la somme est finie)

si $u \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$ $\hat{u}$ est C^0 par rapport à x et C^∞ par rapport à k.
(la continuité en x de u est conservée, la décroissance de u en x est liée à la régularité en k).

Proposition. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ① $\lim\limits_{L\to\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{L}}\, \hat{u}(x;0) = u(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

② $\lim\limits_{L\to 0} \sqrt{L}\, \hat{u}(0;k) = TF(u)(k)$ $\forall k \in \mathbb{R}$.

Preuve : ① . Soit $x \in \mathbb{R}$. $\exists L_0$ assez gd tq $\forall L \geq L_0$ $x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$
$\forall n \neq 0$ $x + nL \notin \operatorname{supp} u$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(x+nL) = u(x).$$

② . Soit $k_0 \in \mathbb{R}$, $\exists L_0$ assez petit tq $\forall L \leq L_0$ $k \in \left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right)$

$$\lim_{L\to 0} \sqrt{L} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(nL)\, e^{-inkL} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-ikx}\, dx$$ (somme de Riemann)

Formule d'inversion : $\forall \hat{u} \in \mathcal{F}(\mathcal{D}(\mathbb{R}))$, $\forall x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$,
$$\left[\mathcal{F}^{-1}\hat{u}\right](x+nL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{u}(x,k)\, e^{-inkL}\, dk.$$

Ce n'est rien d'autre que la formule d'inversion pour les séries de Fourier.

Théorème : ① $\forall u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\displaystyle\int_K \hat{u}(x,k)\, \overline{\hat{v}(x,k)}\, dx\, dk = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, \overline{v(x)}\, dx$. (Parseval)

② $\forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\displaystyle\int_K |\hat{u}(x,k)|^2\, dx\, dk = \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2\, dx$. (Plancherel).

Preuve : D'après les séries de Fourier :
$\forall x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ $\displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L} |\hat{u}(x,k)|^2\, dk = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u(x+nL)|^2$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} |\hat{u}(x,k)|^2\, dx\, dk = \int_{-L/2}^{L/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u(x+nL)|^2\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-L/2}^{L/2} |u(x+nL)|^2\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2\, dx$$

Mêmes arguments pour l'identité de Parseval.

Pour étendre la TFB à L^2, on utilise maintenant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème : . la TFB se prolonge en une isométrie entre $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(K)$

. C'est de plus un isomorphisme et on a la formule d'inversion :

$$\forall \hat{f} \in L^2(K), \quad pp\, x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right), \forall m \in \mathbb{Z} \quad (\mathcal{F}_L^{-1} \hat{f})(x+mL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{f}(x,k) e^{imkL} dk.$$

Preuve : . on a montré l'id de Plancherel dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ puis on utilise la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et on définit pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{F}_L u(x,k) = \hat{u}(x,k) = \lim_{N \to +\infty} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{|m|<N} \dots$$ mais en fait cette série a un sens en tant que série de fonctions dans L^2.

. $\forall \hat{f} \in L^2(K)$, $\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{f}(x,k) e^{imkL} dk$ a bien un sens et en utilisant les mêmes arguments que pour l'identité de Plancherel, on montre que $\tilde{\mathcal{F}}_L^{-1} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f} = \mathcal{F}_L f$ montrons que $\tilde{\mathcal{F}}_L^{-1} \hat{f} = f$

$$\tilde{\mathcal{F}}_L^{-1} \hat{f}(x+mL) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left[\sum_{p \in \mathbb{Z}} f(x+pL) e^{-ipkL}\right] e^{imkL} dk$$

p.p x, $\left(f(x+pL) e^{i(m-p)kL}\right)_{p \in \mathbb{Z}}$ est dans $L^2\left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right)$ et $\sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} |f(x+pL)|^2 dk < +\infty$

donc on peut intervertir somme et intégrale et

$$\mathcal{F}_L^{-1} \hat{f}(x+mL) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f(x+pL) \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} e^{i(m-p)kL} dk$$

$$= \sum_{p \in \mathbb{Z}} f(x+pL) \delta_{mp} = f(x+mL)$$

Les 3 propriétés suivantes font de la TFB, l'outil privilégié pour l'étude des EDP avec coef per. de translation proportionnelle à L :

Propriétés : * $\mathcal{F}_L$ diagonalise les opérateurs de translation proportionnelle à L : $\mathcal{F}_L(\tau_q u)(x;k) = e^{-iqkL} \mathcal{F}_L(u)(x;k)$.

$\forall u \in L^2(\mathbb{R})$ $(\tau_q u)(x) = u(x+qL)$,

* $\mathcal{F}_L$ commute avec les multiplications par des fonctions L-périodiques.

Soit $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, p.p $x \in \mathbb{R}$ $a(x+L) = a(x)$.

$\forall u \in L^2(\mathbb{R})$ $\mathcal{F}_L(au)(x;k) = a(x) \mathcal{F}_L(u)(x;k)$ p.p x,k.

Application directe : $\mathcal{F}_L$ est une isométrie entre $L^2(\mathbb{R}, a(x)dx)$ et $L^2(K, a(x)dx)$ où a est une fonction L^∞ L-périodique.

* $\mathcal{F}_L$ commute avec les opérateurs différentiels en x :

$$\forall u \in H^1(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}_L\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\mathcal{F}_L u)$$

Exercice : Faire la preuve de ces 3 propriétés en prenant $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ puis par densité.

* Dépendance en la "période" L

$\forall u \in L^2(\mathbb{R})$, $\forall x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$, $\forall k \in \left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right)$ $\mathcal{F}_L u(x;k) = \sqrt{L}\, \mathcal{F}_1 u_L\left(\frac{x}{L}; Lk\right)$

où $u_L(x) = u(xL)$.

Extension aux espaces de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$ et $H^2(\mathbb{R})$.

+ $\mathcal{F}_L$ est une isométrie de $H^1(\mathbb{R})$ dans $H^{1,0}(K) = L^2\left(-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}; H^1\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)\right)$

$$= \Big\{ \hat{u},\ \underbrace{\int_k \int_x |\hat{u}|^2 + \left|\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right|^2}_{\|\hat{u}\|^2_{H^{1,0}(K)}} < +\infty \Big\}$$

Exercice : faire la preuve (à la maison).
Est ce un isomorphisme ?

Preuve : la réponse est non !

- Soit $\hat{u} \in H^{1,0}(K) \subset L^2(K)$ alors $u = \mathcal{F}_L^{-1}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, p.p $x \in \left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)$ $u(x+nL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{u}(x,k)\, e^{inkL}\, dk$.

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, p.p $x \in \left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)$ $\frac{du}{dx}(x+nL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{d\hat{u}}{dx}(x,k)\, e^{inkL}\, dk$ (interversion $\int$ et $\frac{d}{dx}$)

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}$ $u \in H^1\left(-\frac{L}{2}+nL, \frac{L}{2}+nL\right)$.

- $u \in H^1(\mathbb{R})$ ssi $u^-\left(+\frac{L}{2}+nL\right) = u^+\left(+\frac{L}{2}+nL\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ (MA201)

$L/2+(n-1)L \quad L/2+nL \qquad L/2+(n+1)L$

$$u^-\left(\frac{L}{2}+nL\right) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{u}\left(\frac{L}{2},k\right) e^{inkL}\, dk,$$

$$u^+\left(\frac{L}{2}+nL\right) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{u}\left(-\frac{L}{2},k\right) e^{i(n+1)kL}\, dk$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$ $u^-\left(\frac{L}{2}+nL\right) - u^+\left(\frac{L}{2}+nL\right) = 0$ ssi $\left(\hat{u}\left(\frac{L}{2},k\right) - \hat{u}\left(-\frac{L}{2},k\right)e^{ikL}, e^{inkL}\right)_{L^2\left(\frac{-\pi}{L},\frac{\pi}{L}\right)} = 0$

ssi $\underline{\hat{u}\left(\frac{L}{2},k\right) - \hat{u}\left(-\frac{L}{2},k\right)e^{ikL} = 0 \text{ p.p } k}$

+ **Définition** : soit $\forall k \in \left(-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\right)$ $H^1_k\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right) = \left\{ w \in H^1\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right), w\left(\frac{L}{2}\right) = e^{ikL} w\left(-\frac{L}{2}\right) \right\}$

* **Proposition** : $H^1_k\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert.

+ **Définition** : soit $H^{1,0}_{QP}(K) = \left\{ \hat{u} \in H^{1,0}(K),\ \text{p.p } k \ \ \hat{u}(\cdot;k) \in H^1_k\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right) \right\}$

* **Proposition** : $H^{1,0}_{QP}(K)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^{1,0}(K)}$ est un espace de Hilbert.

+ **Théorème** : $\mathcal{F}_L$ est un isomorphisme unitaire de $H^1(\mathbb{R})$ dans $H^{1,0}_{QP}(K)$.

Exercice : Et pour $H^2(\mathbb{R})$?

Exercice : * Soit $u_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$ solution de $-\Delta u_\varepsilon - \rho_p(\omega^2 + i\varepsilon) u_\varepsilon = f$ dans $\mathbb{R}$ avec $f \in L^2(\mathbb{R})$ et ρ_p 1-per L^∞ (on verra que ce problème est bien posé dans le prochain cours)

Donner une expression semi-analytique de u_ε en utilisant la TFB.

* Soit $u_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$ solution de $-\mathrm{div}(a_p \nabla u_\varepsilon) - \rho_p(\omega^2 + i\varepsilon) u_\varepsilon = f$ dans $\mathbb{R}$

avec $a_p \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et $\rho_p \in L^\infty$, toutes deux 1-périodiques.