Cours 5 : bandes spectrales.

$$\begin{cases} \hat{A}(k) = -\frac{1}{e_p}\Delta. \\ D(\hat{A}(k)) = H^2_k\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right) = \{w \in H^2(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}),\ w(\frac{L}{2}) = e^{ikL} w(-\frac{L}{2}),\ \partial_x w(\frac{L}{2}) = e^{ikL}\partial_x w(-\frac{L}{2})\} \end{cases}$$

e_p borné $0 < c \le e_p \le c^t < +\infty$,

$H = L^2_{e_p}\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)$

$$\lambda_m(k) = \min_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(\hat{A}(k)))} \max_{u \in V_m} \frac{(\hat{A}(k)u,u)_H}{\|u\|^2_H}.$$

$\{w_m(\cdot,k), m \ge 1\}$ base hilbertienne

$0 \le \lambda_1(k) \le \lambda_2(k) \le \dots \le \lambda_m(k)$.

Proposition : $\forall m$, $k \longmapsto \lambda_m(k)$ $\frac{2\pi}{L}$-périodique, paire et lipschitzienne.

Preuve : $\forall k, \forall m$ $w_m(\cdot,k) \in D(\hat{A}(k))$ et $\hat{A}(k)w_m(\cdot,k) = \lambda_m(k)w_m(\cdot,k)$

* $w_m(\cdot,k) \in D(\hat{A}(k)) \Rightarrow w_m(\cdot,k) \in D(\hat{A}(k+\frac{2\pi}{L})) = D(\hat{A}(k))$

$\hat{A}(k+\frac{2\pi}{L})w_m(\cdot,k) = -\frac{1}{e_p}\Delta w_m(\cdot,k) = \lambda_m(k)w_m(\cdot,k)$

comme $0 \le \lambda_1(k+\frac{2\pi}{L}) \le \dots \le \lambda_m(k+\frac{2\pi}{L})$ par déf

alors nécessairement $\underline{\lambda_m(k) = \lambda_m(k+\frac{2\pi}{L})}$ et m̂ base hilbertienne

* $w_m(\cdot,k) \in D(\hat{A}(k)) \Rightarrow \overline{w_m(\cdot,k)} \in D(\hat{A}(-k))$

de plus $-\frac{1}{e_p}\Delta w_m(\cdot,k) = \lambda_m(k)w_m(\cdot,k) \Rightarrow -\frac{1}{e_p}\Delta\overline{w_m(\cdot,k)} = \lambda_m(k)\overline{w_m(\cdot,k)}$

donc nécessairement $\lambda_m(-k) = \lambda_m(k)$ et

$\{\overline{w_m(\cdot,k)}, m \ge 1\}$ base hilbertienne

Lemme

* $\forall w \in H^2_k(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})$, $\exists u \in H^2_{k=0}(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})$ tq. $w(x) = e^{ikx}u(x)$

$\partial_x w = (\partial_x + ik)(e^{ikx}u(x))$

$$\lambda_m(k) = \min_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(A(0)))} \max_{u \in V_m} \frac{\int (\partial_x + ik)^2 u\,\bar{u}\,dx}{\int e_p(x)|u|^2 dx}$$

$$= \min_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(A(0)))} \max_{u \in V_m} \frac{\int [\partial_x^2 u\,\bar{u} + 2ik\,\partial_x u\,\bar{u} - k^2|u|^2]dx}{\int e_p(x)|u|^2 dx}$$

$k \mapsto \lambda_m(k)$ lipschitzienne comme le ... de fonctions lipschitziennes.

Tout ce que nous avons vu jusqu'à présent s'étend dans $\mathbb{R}^n$. Dans la suite, les résultats sont pour le 1D.

Dans la suite, on notera $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\underline{S(\lambda) = \{w \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}),\ -\frac{d^2w}{dx^2} = \lambda e_p w\}}$

On sait que $\dim S(\lambda) = 2$ (CL) $S(\lambda) = \text{vect}(\varphi_1(\lambda,\cdot), \varphi_2(\lambda,\cdot))$.

$$\begin{cases} \varphi_1(\lambda,-\frac{L}{2}) = 1 \\ \varphi_1'(\lambda,-\frac{L}{2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_2(\lambda,-\frac{L}{2}) = 0 \\ \varphi_2'(\lambda,-\frac{L}{2}) = 1 \end{cases}$$

Régularité de $\lambda \to \varphi_i(\lambda,x)$ ...

On définit également le wronskien de 2 fonctions $f, g \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$

$W(f,g;x) = f'g - g'f \quad \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$.

Théorème : Si $f, g \in S(\lambda)$
* $W(f, g; x)$ indépendant de x. $(= W(f,g))$.
* $W(f,g) = 0 \Leftrightarrow f$ et g sont linéairement dépendantes.
* $W(\varphi_1(\lambda, \cdot), \varphi_2(\lambda, \cdot)) = 1$.

Preuve.
* Soit $f, g \in S(\lambda)$ $\partial_x W(f, g; x) = f''g - g''f = -\lambda\rho_0 fg + \lambda\rho_0 gf = 0$

 W indépendant de x.

* ($\Leftarrow$) évident. ($\Rightarrow$) $W(f,g) = 0$, on suppose $\exists x_0$ $f(x_0) \neq 0$.

 Soit $\psi(x) = f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0) \in S(\lambda)$.

 $\psi'(x) = f'(x)g(x_0) - g'(x)f(x_0) \Rightarrow \psi'(x_0) = 0$

 $\psi(x_0) = 0$

 $\Rightarrow \psi = 0$ d'après le théorème de CL

* $W(\varphi_1(\lambda,\cdot), \varphi_2(\lambda,\cdot)) = W(\varphi_1(\lambda,\cdot), \varphi_2(\lambda,\cdot), -\frac{L}{2}) = 1$

Théorème : $\forall k$, la multiplicité de $\lambda_m(k)$ ne peut être que 1 ou 2 et elle est 2 seulement pour $k = 0$ et $\frac{\pi}{L}$.

Preuve :
* Soit $\lambda \in \sigma(A(k))$ $E_\lambda(k) = \{u \in H^2_k, -\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda\rho_0 u\}$

 $E_\lambda(k) \subset S(\lambda) \Rightarrow \dim E_\lambda(k) \leq 2$

* Soit $\lambda \in \sigma(A(k))$, Si $u \in E_\lambda$
$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda\rho_0 u \\ u\left(\frac{L}{2}\right) = e^{ikL} u\left(-\frac{L}{2}\right) \\ u'\left(\frac{L}{2}\right) = e^{ikL} u'\left(-\frac{L}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} = \lambda\rho_0 \bar{u} \\ \bar{u}\left(\frac{L}{2}\right) = e^{-ikL} \bar{u}\left(-\frac{L}{2}\right) \\ \bar{u}'\left(\frac{L}{2}\right) = e^{-ikL} u'\left(-\frac{L}{2}\right) \end{cases}$$

 u et $\bar{u}$ $\in S(\lambda)$

* On va montrer que pour $k \notin \{0, \frac{\pi}{L}\}$, $(u, \bar{u})$ libre et $S(\lambda) = \text{vect}(u, \bar{u})$

 Si ce n'est pas le cas $\exists\theta$, $\bar{u} = e^{i\theta} u$. $\theta \in \mathbb{R}$.
$$\begin{cases} \bar{u}\left(-\frac{L}{2}\right) = e^{i\theta} u\left(-\frac{L}{2}\right) = e^{-ikL} e^{i\theta} u\left(\frac{L}{2}\right) \\ \bar{u}\left(-\frac{L}{2}\right) = e^{ikL} \bar{u}\left(\frac{L}{2}\right) = e^{ikL} e^{i\theta} u\left(\frac{L}{2}\right) \end{cases} \qquad e^{i\theta} \sin(kL) u\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

 De la même façon $e^{i\theta} \sin(kL) u'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$

Si $\begin{bmatrix} u\left(\frac{L}{2}\right) \neq 0 \\ \text{ou } u'\left(\frac{L}{2}\right) \neq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{i\theta} \sin kL = 0$ impossible si $k \notin \{0, \frac{\pi}{L}\}$

Si $u\left(\frac{L}{2}\right) = u'\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow u = 0$ (TCL) impossible car u est un vect. prop

* si $k \notin \{0, \frac{\pi}{L}\}$ $\lambda \in \sigma(A(k))$ est simple. $(\dim E_\lambda(k) = 1)$

Par l'absurde, supposons $\exists u, v$ 2 fonctions propres linéairement indépendantes

$v \in S(\lambda) \Rightarrow$ $v = \alpha u + \beta\bar{u}$

$$\left.\begin{aligned} v\left(\frac{L}{2}\right) &= \alpha u\left(\frac{L}{2}\right) + \beta\bar{u}\left(\frac{L}{2}\right) = \alpha e^{ikL} u\left(-\frac{L}{2}\right) + \beta e^{-ikL} \bar{u}\left(-\frac{L}{2}\right) \\ v\left(\frac{L}{2}\right) &= e^{ikL} v\left(-\frac{L}{2}\right) = \alpha e^{ikL} u\left(-\frac{L}{2}\right) + \beta e^{ikL} \bar{u}\left(-\frac{L}{2}\right) \end{aligned}\right] \Rightarrow \begin{aligned} &\beta \sin kL\, \bar{u}\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \\ &\beta \sin kL\, \bar{u}'\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \\ &\beta = 0 \\ &v = \alpha u \end{aligned}$$

2

Lemme : Pour $k,k' \in [0,\pi)^2$ $\begin{cases} k\neq k' \\ k\neq -k'\end{cases} \Rightarrow \sigma(A(k))\cap\sigma(A(k')) = \emptyset$.

dém : supposons $\exists \lambda \in \sigma(A(k))\cap\sigma(A(k'))$

+ soit ω vect prop de $A(k)$ pour λ, $\omega\neq 0$ on a $S(\lambda) = \text{vect}(\omega,\bar\omega)$
+ soit v vect prop de $A(k')$ pour λ, $v\neq 0$.

$v\in S(\lambda) \Rightarrow v = \alpha\omega+\beta\bar\omega \Rightarrow \alpha\omega(\frac{L}{2})+\beta\bar\omega(\frac{L}{2}) = e^{ik'L}\left(\alpha\omega(-\frac{L}{2})+\beta\bar\omega(-\frac{L}{2})\right)$

$= \alpha e^{ikL}\omega(-\frac{L}{2})+\beta e^{-ikL}\bar\omega(-\frac{L}{2})$

$$\begin{cases} \alpha(e^{ik'L}-e^{ikL})\,\omega(-\frac{L}{2}) + \beta(e^{ik'L}-e^{-ikL})\,\bar\omega(-\frac{L}{2}) = 0 \\ \alpha(e^{ik'L}-e^{ikL})\,\omega'(-\frac{L}{2}) + \beta(e^{ik'L}-e^{-ikL})\,\bar\omega'(-\frac{L}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \omega(-\frac{L}{2}) & \bar\omega(-\frac{L}{2}) \\ \omega'(-\frac{L}{2}) & \bar\omega'(-\frac{L}{2}) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \alpha(e^{ik'L}-e^{ikL}) \\ \beta(e^{ik'L}-e^{-ikL}) \end{bmatrix} = 0$$

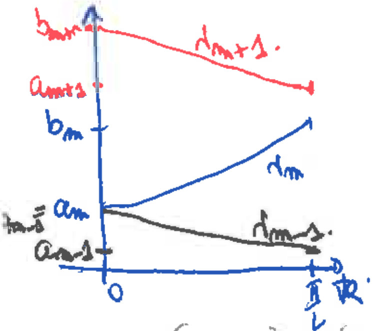
Or on a : $\det A = \left[\omega(-\frac{L}{2})\bar\omega'(-\frac{L}{2}) - \omega'(-\frac{L}{2})\bar\omega(-\frac{L}{2})\right] \neq 0$.

en effet $W(\omega,\bar\omega,-\frac{L}{2}) \underset{\substack{\uparrow \\ \omega \text{ et } \bar\omega \in S(\lambda)}}{=} W(\omega,\bar\omega) \neq 0$ car ω et $\bar\omega$ sont linéairement indépendants

donc $\alpha(e^{ik'L}-e^{ikL}) = 0$ et $\beta(e^{ik'L}-e^{-ikL}) = 0$

comme $k\neq k'$ et $k\neq -k'$ ceci implique $\alpha=\beta=0$
$\Rightarrow v = 0$ CONTRADICTION

Corollaire : • chaque fonction $k\mapsto \lambda_m(k)$ est strictement monotone sur $(0,\frac{\pi}{L})$
• Si on pose $I_m = \lambda_m([0,\frac{\pi}{L}]) = [a_m, b_m]$ alors $a_{m+1}\geqslant b_m$.



Preuve : • Pour montrer que λ_m est monotone, il suffit de montrer qu'elle est injective (car elle est C^0)

Supposons $\lambda_m(k) = \lambda_m(k') = \lambda$ $0<k<k'<\pi$.
donc $\lambda\in\sigma(A(k))\cap\sigma(A(k'))$ ce qui impossible
* La stricte monotonie de λ_m entraine $b_m > a_m$

Si on avait $a_{m+1} < b_m$, on aurait $(a_m,b_m)\cap(a_{m+1},b_{m+1})\neq\emptyset$

Soit $\lambda\in(a_m,b_m)\cap(a_{m+1},b_{m+1})$, $\exists k,k'\in(0,\pi)^2$ $\lambda = \lambda_m(k) = \lambda_{m+1}(k')$
Si $k\neq k'$ alors $\lambda\in\sigma(A(k))\cap\sigma(A(k'))$ impossible, soit $k=k'$ alors λ v p double de $A(k)$ impossible

Théorème : $k\mapsto \lambda_1(k)$ est strictement croissante sur $(0,\frac{\pi}{L})$ et vérifie $\lambda_1(0)=0$
valeur propre simple de $A(0)$.

Preuve : Soit u constant sur $(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})$, $u\in D(A(0)) = H^2_{per}(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})$
et $A(0)u = 0$ comme $A(0)$ positif, $\boxed{\lambda_1(0)=0}$.

• $A(0)u = 0 \Rightarrow \int_{-L/2}^{L/2}|u'|^2 = 0 \Rightarrow \underline{u'=0}$ sur $(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})$

• $k\neq 0$, $A(k)u = 0 \Rightarrow \int_{-L/2}^{L/2}|u'|^2 = 0 \Rightarrow u = 0$ mais la cste n'est pas $H^2_k(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})$ donc

donc $\forall k\neq 0\ \lambda_1(k) > 0$

On va étendre ce résultat aux autres bandes spectrales.

Soit $D(\lambda) = \varphi_1(\lambda, \frac{L}{2}) + \varphi_2'(\lambda, \frac{L}{2})$

<u>Théorème</u> : $\forall k$, les valeurs $\{\lambda_m(k), m \in \mathbb{N}\}$ sont exactement les solutions de

$$D(\lambda) = 2\cos kL.$$

On a donc $D(\lambda)=2$ ssi $\exists n \geq 1$ tq $\lambda = \lambda_n(0)$ $\quad D(\lambda) = -2$ ssi $\exists n \geq 1$ $\lambda = \lambda_n(\pi)$.

<u>Preuve</u> : * Soit λ valeur propre de $A(k)$ et u un vect. prop associé

$u \in S(\lambda) \Rightarrow \quad u = \alpha_1 \varphi_1(\lambda, \cdot) + \alpha_2 \varphi_2(\lambda, \cdot) \quad (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$.

$u(\frac{L}{2}) = e^{ikL} u(-\frac{L}{2}) \Rightarrow \alpha_1 \varphi_1(\lambda, \frac{L}{2}) + \alpha_2 \varphi_2(\lambda, \frac{L}{2}) = e^{ikL} \alpha_1$.

$u'(\frac{L}{2}) = e^{ikL} u'(-\frac{L}{2}) \Rightarrow \alpha_1 \varphi_1'(\lambda, \frac{L}{2}) + \alpha_2 \varphi_2'(\lambda, \frac{L}{2}) = e^{ikL} \alpha_2$

On a donc e^{ikL} est val prop de $\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda, \frac{L}{2}) & \varphi_2(\lambda, \frac{L}{2}) \\ \varphi_1'(\lambda, \frac{L}{2}) & \varphi_2'(\lambda, \frac{L}{2}) \end{pmatrix} = M(\lambda)$.

$\operatorname{tr} M(\lambda) = D(\lambda)$ et $\det M(\lambda) = 1$, le pol caractéristique est donné par

$$P(\lambda) = X^2 - D(\lambda) X + 1.$$

$P(e^{ikL}) = 0 \Rightarrow D(\lambda) = 2\cos kL$

* Réciproquement si λ est solution de $D(\lambda) = 2\cos kL$ alors e^{ikL} val propre de $M(\lambda)$

$\exists (a_1, a_2) \neq (0,0)$ vect. prop de $M(\lambda)$ $\quad a_1 \varphi_1(\lambda, \frac{L}{2}) + a_2 \varphi_2(\lambda, \frac{L}{2}) = e^{ikL} a_1$

$a_1 \varphi_1'(\lambda, \frac{L}{2}) + a_2 \varphi_2'(\lambda, \frac{L}{2}) = e^{ikL} a_2$

On vérifie $w = a_1 \varphi_1(\lambda, \cdot) + a_2 \varphi_2(\lambda, \cdot)$ est k-QP et $w \in S(\lambda)$.

<u>Théorème</u> : Chaque fonction $k \mapsto \lambda_{2n}(k)$ est strictement décroissante sur $(0, \pi)$.

$k \mapsto \lambda_{2n+1}(k)$ croissante sur $(0, \pi)$.

<u>Preuve</u> : On va montrer que $k \mapsto \lambda_2(k)$ est strictement décroissante.

Supposons que λ_2 est $\nearrow$. Nous savons que $\lambda_2(0) \geq \lambda_2(\pi)$ (th précédent)

Si $\lambda = \lambda_2(0) = \lambda_1(\pi)$, on aurait d'après le th précédent $D(\lambda) = 2 = -2$ impossible.

Donc $\lambda_2(0) > \lambda_1(\pi)$ et $]\lambda_1(\pi), \lambda_2(0)[\neq \emptyset$

$D(\lambda_1(\pi)) = -2$ et $D(\lambda_2(0)) = 2$. Comme la fonction $D(\lambda)$ est C^0, elle parcourt toutes les valeurs entre -2 et 2 quand $\lambda \in]\lambda_1(\pi), \lambda_2(0)[$

$\forall k \in (0, \pi)$, $\exists \lambda$ tq $D(\lambda) = 2\cos k$ et on vient de montrer que $\lambda \in A(k)$

* $\lambda > \lambda_1(\pi) > \lambda_1(k)$ car λ_1 est st $\nearrow$
* $\lambda < \lambda_2(0) < \lambda_2(k)$ car λ_2 est st $\nearrow$

$\lambda_1(k) < \lambda < \lambda_2(k)$ or λ_2 est la 2e val. prop d. CONTRADICTION.

On étend le résultat à toutes les val prop en utilisant un raisonnement par récurrence.

Les 2 suites $\{\lambda_n(0), n \geq 1\}$ et $\{\lambda_n(\pi), n \geq 1\}$ vérifient donc :

$$0 = \lambda_1(0) < \lambda_1(\pi) \leq \lambda_2(\pi) < \lambda_2(0) \leq \lambda_3(0) \leq \dots \leq \lambda_{2n-1}(0) < \lambda_{2n-1}(\pi) \leq \lambda_{2n}(0)$$

$I_n = \lambda_n([0, \pi])$ $\quad I_{2n-1} = [\lambda_{2n-1}(0), \lambda_{2n-1}(\pi)]$ $\quad I_{2n} = [\lambda_{2n}(\pi), \lambda_{2n}(0)]$

I_n : n^e bande spectrale. <u>L'intersection de 2 bandes spectrales est soit vide soit réduite à un point</u>.

$$\bigcup_{n \geq 1} I_n = \{\lambda \geq 0, |D(\lambda)| \leq 2\}.$$

$\forall n \geq 1 \quad G_{2n-1} =]\lambda_{2n-1}(\pi), \lambda_{2n}(\pi)[\qquad G_{2n} =]\lambda_{2n}(0), \lambda_{2n+1}(0)[.$

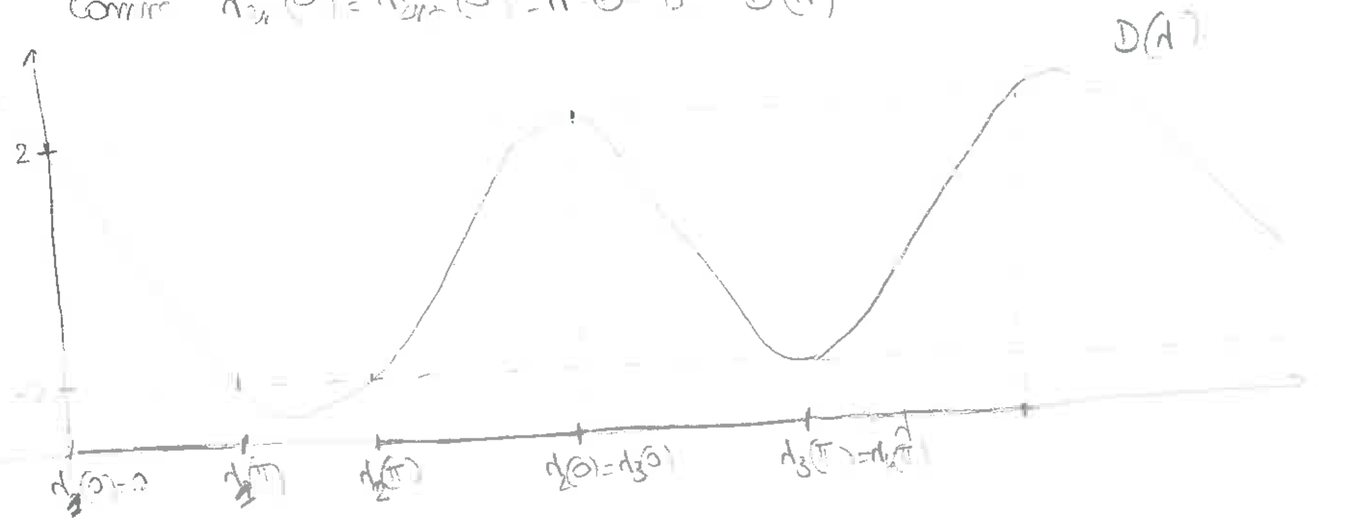
$\mathbb{R}^+ \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \qquad G_n$ gap spectral.

Corollaire : $\forall n \geq 1$. la fonction D est strictement décroissante de I_{2n-1} dans $[-2, 2]$ et strictement croissante de I_{2n} dans $[-2, 2]$.

Preuve : Soit $\lambda_m^{-1} : I_m \to [0, \pi]$ la bijection. Elle est strictement monotone.
$D(\lambda_m(k)) = 2\cos k \Rightarrow \forall \lambda \in I_m \quad D(\lambda) = 2\cos \lambda_m^{-1}(\lambda)$
$k \in (0, \pi) \quad k \mapsto 2\cos k$ est ... donc D est strictement monotone et sa monotonie est inversée par rapport à λ_m.

Corollaire : Si $G_{2n} = \emptyset$ $(\lambda = \lambda_{2n}(0) = \lambda_{2n+1}(0))$ alors $D'(\lambda) = 0$.
Si $G_{2n-1} = \emptyset$ $(\lambda = \lambda_{2n-1}(\pi) = \lambda_{2n}(\pi))$ alors $D'(\lambda) = 0$.

Preuve : D est croissante sur $(\lambda_n(\pi), \lambda_{2n}(0))$ puis décroissante sur $(\lambda_{2n+1}(0), \lambda_{2n+2}...)$
comme $\lambda_{2n}(0) = \lambda_{2n+1}(0) = \lambda$ donc $D'(\lambda) = 0$



Exemple :

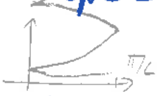
Récapitulatif.

$$\begin{cases} \hat{A}(k) = -\frac{1}{\rho}\Delta \\ D(\hat{A}(k)) = H^2_k(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}) \end{cases} \qquad H = L^2_\rho(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}).$$

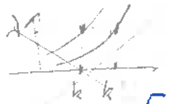
$\exists$ une base hilbertienne de H $\{\psi_m(\cdot,k), m\geq 1\}$.

$0 \leq \lambda_1(k) \leq \lambda_2(k) \leq \dots \leq \lambda_m(k) \longrightarrow +\infty$

* $\forall m$ $k \longmapsto \lambda_m(k)$ $\frac{2\pi}{L}$-périodique, paire et lipschitzienne.
* $\forall k$ la multiplicité de $\lambda_m(k)$ ~~est~~ peut être que 1 et 2 et elle est de 2 seulement pour $k=0$ et $\frac{\pi}{L}$

* $\forall k \neq k' \in [0,\pi]$ $\quad \sigma(\hat{A}(k)) \cap \sigma(\hat{A}(k')) = \emptyset$



* Chaque fonction $k \longmapsto \lambda_m(k)$ est strictement monotone sur $[0,\frac{\pi}{L}]$, strictement $\nearrow$ si m est impair et strictement $\searrow$ si m est pair.

Si on pose $I_m = [a_m, b_m]$ bandes spectrales.

$a_m = \lambda_m(0)$ et $b_m = \lambda_m(\frac{\pi}{L})$ si m impair. $\quad a_m = \lambda_m(\frac{\pi}{L})$, $b_m = \lambda_m(0)$ si m pair.

$a_{m+1} \geq b_m$: l'intersection de 2 bandes spectrales est soit vide soit réduite à un point.

$0 = \lambda_1(0) < \lambda_1(\frac{\pi}{L}) \leq \lambda_2(\frac{\pi}{L}) < \lambda_2(0) \leq \lambda_3(0) < \lambda_3(\frac{\pi}{L}) \leq \dots \leq \lambda_{2n-1}(0) < \lambda_{2n-1}(\frac{\pi}{L}) \leq \dots$

* $-\Delta\varphi_i = \rho\lambda\varphi_i(\lambda,\cdot)$. $\quad \varphi_1(\lambda,0)=1$ $\varphi_1'(\lambda,0)=0$, $\varphi_2(\lambda,0)=0$ $\varphi_2'(\lambda,0)=1$.

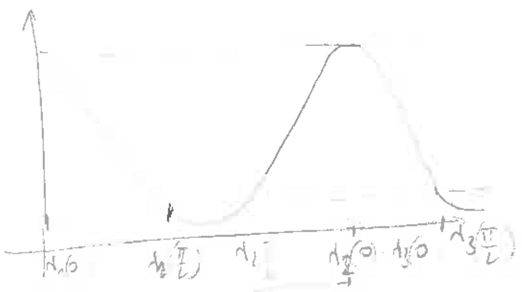
$\mathcal{D}(\lambda) = \varphi_1(\lambda,\frac{L}{2}) + \varphi_2'(\lambda,\frac{L}{2})$.

$\forall k$ $\{\lambda_m(k), m\in\mathbb{N}\}$ sont les solutions de $\mathcal{D}(\lambda) = 2\cos kL$.

$\mathcal{D}(\lambda) = 2$ ssi $\exists m$ $\lambda = \lambda_m(0)$ et $\mathcal{D}(\lambda) = -2$ ssi $\exists m$ $\lambda = \lambda_m(\frac{\pi}{L})$.

* $\forall n \geq 1$ la fonction $\mathcal{D}$ est strictement décroissante de I_{2n-1} dans $[-2,2]$ et strictement croissante de I_{2n} dans $[-2,2]$.
* $G_{2n} =]\lambda_{2n}(0), \lambda_{2n+1}(0)[$ et $G_{2n-1} =]\lambda_{2n-1}(\frac{\pi}{L}), \lambda_{2n}(\frac{\pi}{L})[$ gaps spectraux

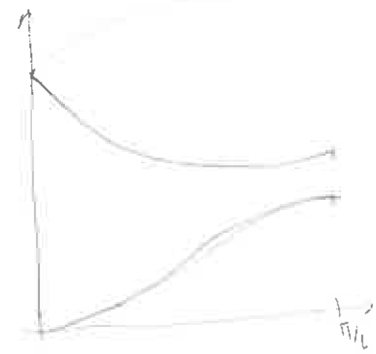
Si $G_{2n} = \emptyset$ alors $\mathcal{D}'(\lambda) = 0$ $\lambda = \lambda_{2n}(0)$. $\quad$ si $G_{2n-1} = \emptyset$ alors $\mathcal{D}'(\lambda) = 0$ $\lambda = \lambda_{2n-1}(\frac{\pi}{L})$



* $\lambda \longmapsto \mathcal{D}(\lambda)$ est C^∞
* $k \longmapsto \lambda_m(k)$ est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{L}[$.

$\lambda_m'(k).\ \mathcal{D}'(\lambda_m(k)) = 2\sin(kL)$

* $\forall k \in]0,\frac{\pi}{L}[$ $\quad \lambda_m'(k) \neq 0$.
* $k \longmapsto \lambda_m(k)$ est C^∞ sur $]0,\frac{\pi}{L}[$
* $\mathcal{D}'(\lambda) \neq 0$ pour $\lambda = \lambda_m(\frac{\pi}{L})$ ou $\lambda = \lambda_m(0)$ alors $\lambda_m'(\frac{\pi}{L})$ ou $\lambda_m'(0) = 0$.



* $\lambda_m''(k)\ \mathcal{D}'(\lambda_m(k)) + (\lambda_m'(k))^2 \mathcal{D}''(\lambda_m(k)) = -2\cos kL$.

Si $\mathcal{D}'(\lambda_m(0)) = 0$ alors $\lambda_m'(0^+) \neq 0$. $\lambda_{m+1}'(0^+) \neq 0$.

Si $\mathcal{D}'(\lambda_m(\frac{\pi}{L})) = 0$ alors $\lambda_m'(\frac{\pi}{L}^-) \neq 0$ $\lambda_{m+1}'(\frac{\pi}{L}^-) \neq 0$