Régime harmonique

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \omega^2 u = f$$ dans $\mathbb{R}$ avec f à support compact. et $\omega>0$.

Par absorption limite, on trouve que la solution sortante est définie par

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi^2-\omega^2} e^{ix\xi}\, d\xi + i\pi \sum_{\pm} \frac{\hat{f}(\pm\omega)}{2\omega} e^{\pm ix\omega}\right]$$

Régime temporel

$$+\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = F(x,t) \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall t>0$$

On montre que $$\hat{U}(t,\xi) = \mathcal{F}_x(U(t,x)) = \int_0^t \hat{F}(s,\xi)\, \frac{\sin \xi(t-s)}{\xi}\, ds$$

$$U(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi\in\mathbb{R}} \int_0^t \hat{F}(s,\xi) \frac{\sin\xi(t-s)}{\xi}\, ds\, e^{ix\xi}\, d\xi$$

Si on suppose que $F(x,t) = H(t)e^{-i\omega t} f(x)$ avec supp f compact

$$\hat{U}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)\int_0^t e^{-i\omega s}\, \frac{e^{i\xi(t-s)} - e^{-i\xi(t-s)}}{2i\xi}\, ds.$$

$$= \frac{\hat{f}(\xi)}{2i\xi}\left[\frac{e^{-i\omega t} - e^{i\xi t}}{-i(\omega+\xi)} - \frac{e^{-i\omega t} - e^{-i\xi t}}{-i(\omega-\xi)}\right]$$

$$= \frac{\hat{f}(\xi)}{2\xi}\left[\frac{e^{-i\omega t} - e^{i\xi t}}{\omega+\xi} - \frac{e^{-i\omega t} - e^{-i\xi t}}{\omega-\xi}\right]$$

$$e^{i\omega t}U(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi} \frac{\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}}{2\xi}\left[\frac{1-e^{i(\xi+\omega)t}}{\omega+\xi} - \frac{1-e^{i(\omega-\xi)t}}{\omega-\xi}\right] d\xi.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \text{v.p.}\int_{\xi}\frac{\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}}{\xi^2-\omega^2}\, d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \text{v.p.}\int_{\xi}\frac{\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}}{2\xi}\left[\frac{e^{i(\omega-\xi)t}}{\omega-\xi} - \frac{e^{i(\omega+\xi)t}}{\omega+\xi}\right]$$

On suppose tout d'abord que $\frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}$ est intégrable en $\xi=0$.

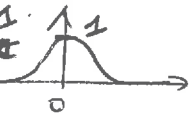
$$\text{v.p.}\int_{\xi}\frac{\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}}{2\xi}\, \frac{e^{i(\omega-\xi)t}}{\omega-\xi}\, d\xi \longrightarrow i\pi\, \frac{\hat{f}(\pm\omega)}{2\omega}\, e^{ix\omega}$$

$$\text{v.p.}\int_{\xi}\frac{\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}}{2\xi}\, \frac{e^{i(\omega+\xi)t}}{\omega+\xi}\, d\xi \longrightarrow -i\pi\, \frac{\hat{f}(-\omega)}{2\omega}\, e^{-ix\omega}$$

On suppose tout d'abord que $\frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}$ est intégrable en 0 ($\hat{f}(0)=0$).

$$\text{v.p.}\int_{\xi} \frac{\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}}{2\xi}\,\frac{e^{i(\omega-\xi)t}}{\omega-\xi}\left[1-\rho(\omega-\xi)+\rho(\omega-\xi)\right]d\xi$$

avec $\rho \in C_c^1$



$$= \int_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\hat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}}{2\xi(\omega-\xi)}\left(1-\rho(\omega-\xi)\right)e^{i(\omega-\xi)t}\,d\xi + \text{vp}\int_{\xi}\frac{\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}}{2\xi\,(\omega-\xi)}\,e^{i(\omega-\xi)t}\rho(\omega-\xi)\,d\xi$$

$\eta = \omega-\xi$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(\omega-\eta)\,e^{ix(\omega-\eta)}}{2(\omega-\eta)\,\eta}\left(1-\rho(\eta)\right)e^{i\eta t}\,d\eta + \text{v.p.}\int_{\eta\in\mathbb{R}}\frac{\hat{f}(\omega-\eta)e^{ix(\omega-\eta)}}{2(\omega-\eta)\,\eta}\,e^{i\eta t}\rho(\eta)\,d\eta$$

$$\psi : \eta \longmapsto \frac{\hat{f}(\omega-\eta)e^{ix(\omega-\eta)}}{2(\omega-\eta)\eta}\left[1-\rho(\eta)\right] \in L^1(\mathbb{R})$$

En effet cette fonction est C^0 sur $\mathbb{R}$ (car $\hat{f}(0)=0$, $\rho(0)=1$).

$|\psi| \underset{\pm\infty}{\sim} c\,\frac{\hat{f}(\eta)}{\eta^2}$ L^1 car $\hat{f}$ est L^2.

Donc la première intégrale $\longrightarrow 0$ quand $t\to+\infty$.

$\eta \mapsto \frac{\hat{f}(\omega-\eta)}{2(\omega-\eta)\eta}\,e^{ix(\omega-\eta)}\rho(\eta) \in C_c^1$ donc la 2^e int $\longrightarrow i\pi\,\frac{\hat{f}(\omega)}{2\omega}\,e^{ix\omega}$

$$\text{vp.}\int_{\xi}\frac{\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}}{2\xi}\,\frac{e^{i(\omega+\xi)t}}{\omega+\xi}\left[1-\rho(\omega+\xi)+\rho(\omega+\xi)\right]d\xi$$

$$= \text{vp}\int_{\xi}\frac{\hat{f}(\eta-\omega)e^{ix(\eta-\omega)}}{2(\eta-\omega)}\,\frac{e^{i\eta t}}{\eta}\left(1-\rho(\eta)+\rho(\eta)\right)d\eta$$

$$\xrightarrow[t\to+\infty]{} i\pi\,\frac{\hat{f}(-\omega)}{-2\omega}\,e^{-ix\omega}$$

Si $\frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}$ n'est pas intégrable en 0 alors il faut écrire

$$\text{vp}\int_{\xi}\frac{\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}}{2\xi}\,\frac{e^{i(\omega-\xi)t}}{\omega-\xi}\left[1-\rho(\omega-\xi)-\rho(\xi)+\rho(\xi)+\rho(\omega-\xi)\right].$$

$$\xrightarrow[t\to+\infty]{} -i\pi\,\frac{\hat{f}(0)}{2\omega}\,e^{i\omega t} + i\pi\,\frac{\hat{f}(\omega)}{2\omega}\,e^{ix\omega}$$

Remarque : $\hat{f}(0)=0 \Rightarrow \boxed{\int_{\mathbb{R}} f = 0}$

Equation des ondes 1D.

On considère le problème suivant

Trouver U · solution dans $C^0(0,T;H^1(\mathbb{R}))\cap C^1(0,T,L^2(\mathbb{R}))$.

$$\rho_p(x)\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\Delta U=F(x,t)\quad \text{dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$$

où
- pp. $t>0$ $F(\cdot,t)$ est L^2 à support compact, $F\in C^0(0,T,L^2(\mathbb{R}))$
- ρ_p 1 périodique. $0<\rho_-\leq\rho_p\leq\rho^+<+\infty$.
- $U(\cdot,t=0)=\partial_t U(\cdot,t=0)=0$.

Théorème : il existe une unique solution et elle est unique.

1. Expression de la solution.

$\forall t$ $U(\cdot,t)\in H^1(\mathbb{R})$, $F(\cdot,t)\in L^2(\mathbb{R})$ on note $\hat{U}(x,t;k)=(\mathcal{F}_L U)(x,t;k)$
et $\hat{F}=\mathcal{F}_L F$.

On a pp $k\in(-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L})$ $\hat{U}(\cdot;k)$ est solution de :

$$\rho_p(x)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{U}(\cdot;k)-\Delta\hat{U}(\cdot;k)=\hat{F}(\cdot;k)\quad\text{dans } (-\tfrac{L}{2},\tfrac{L}{2})\times\mathbb{R}^+$$

En utilisant la base hilbertienne de vecteurs propres de $\hat{A}(k)$: on a

$$\forall x\in(-\tfrac{L}{2},\tfrac{L}{2})\ \ \forall t>0\ \ \forall k\in(-\tfrac{\pi}{L},\tfrac{\pi}{L}).\quad \hat{U}(x,t;k)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}U_n(t;k)\,w_n(x,k)$$

la somme convergeant dans L^2.

$$\hat{F}(x,t;k)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}F_n(t;k)\,w_n(x,k).$$

On trouve.
p.p k,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U_n(t;k)}{\partial t^2}+\lambda_n(k)\,U_n(t,k)=F_n(t,k) & t\geq 0\\ U_n(0;k)=\partial_t U_n(0;k)=0.\end{cases}$$

On obtient une ODE d'ordre 2 en temps où k joue le rôle de paramètre.

En posant, $V_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\partial_t U_n$ on peut se ramener à une ~~syst~~ ODE d'ordre 1 :

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}U_n\\ V_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{\lambda_n(k)}\\ -\sqrt{\lambda_n(k)} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_n\\ V_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ F_n(t,k)\end{pmatrix}.$$

Soit

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}U_n+iV_n\\ U_n-iV_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\sqrt{\lambda_n(k)} & 0\\ 0 & i\sqrt{\lambda_n(k)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_n+iV_n\\ U_n-iV_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{iF_n}{\sqrt{\lambda_n(k)}}\\ \dfrac{iF_n}{\sqrt{\lambda_n(k)}}\end{pmatrix}$$

La solution de l'eq homogène est donné par :

$$\begin{pmatrix} U_n + iV_n \\ U_n - iV_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{\lambda_n}t} & 0 \\ 0 & e^{i\sqrt{\lambda_n}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

La méthode de variation de la constante nous donne

$$\begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{\lambda_n}t} & 0 \\ 0 & e^{i\sqrt{\lambda_n}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{\lambda_n}} \begin{pmatrix} F_n \\ -F_n \end{pmatrix}$$

soit $a = \dfrac{i}{\sqrt{\lambda_n(k)}} \displaystyle\int_0^t F_n(s,k)\, e^{i\sqrt{\lambda_n}s}\, ds + a_0$

$b = -\dfrac{i}{\sqrt{\lambda_n(k)}} \displaystyle\int_0^t F_n(s,k)\, e^{-i\sqrt{\lambda_n}s}\, ds + b_0$

$U_n(0;k) = \partial_t U_n(0;k) = 0 \Rightarrow a_0 = b_0 = 0$.

On obtient donc :

$$U_n(t;k) = \frac{1}{2i\sqrt{\lambda_n(k)}} \int_0^t F_n(s;k)\left[e^{i\sqrt{\lambda_n}(t-s)} - e^{-i\sqrt{\lambda_n}(t-s)}\right] ds$$

$$= \int_0^t F_n(s;k)\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n(k)}(t-s)}{\sqrt{\lambda_n(k)}}\, ds.$$

On obtient finalement :

$\forall x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right), \forall t > 0$

$\forall p \in \mathbb{Z}$, $U(x+pL, t) = \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} U_n(t;k)\, w_n(x,k)\, e^{ipkL}\, dk.$

en utilisant les mêmes raisonnements que dans le régime harmonique (dans le cas L^2).

2. Lien entre les régimes temporel et harmonique : principe d'amplitude limite.

Supposons que $F(x,t) = f(x)\, e^{-i\omega t}$ avec f L^2 à support compact.

(alors $F_n(s;k) = f_n(k)\, e^{-i\omega s}$ où $\hat{f}(x,k) = \sum_n f_n(k)\, w_n(x,k)$).

L'expression de U_n devient :

$$U_n(t;k) = \frac{f_n(k)}{2i\sqrt{\lambda_n(k)}} \int_0^t \left[e^{i\sqrt{\lambda_n}t}\, e^{-i(\omega+\sqrt{\lambda_n})s} - e^{-i\sqrt{\lambda_n}t}\, e^{-i(\omega-\sqrt{\lambda_n})s} \right] ds.$$

$$= \frac{f_n(k)}{2\sqrt{\lambda_n(k)}} \underbrace{\left[\frac{e^{-i\omega t} - e^{i\sqrt{\lambda_n}t}}{\sqrt{\lambda_n}+\omega} + \frac{e^{-i\omega t} - e^{-i\sqrt{\lambda_n}t}}{\sqrt{\lambda_n}-\omega} \right]}_{\text{à } t \text{ fixé cette fonction se prolonge par continuité en } \omega = \pm\sqrt{\lambda_n}.}$$

Si $\exists n, \exists k$ tel que

- $\omega = \sqrt{\lambda_n(k)}$

$$U_n(t;k) = \frac{f_n(k)}{2\sqrt{\lambda_n(k)}} \left[\frac{e^{-i\sqrt{\lambda_n}t} - e^{i\sqrt{\lambda_n}t}}{2\sqrt{\lambda_n}} + it\, e^{-i\omega t} \right].$$

- $\omega = -\sqrt{\lambda_n(k)}$

$$U_n(t;k) = \frac{f_n(k)}{2\sqrt{\lambda_n(k)}} \left[it\, e^{-i\omega t} + \frac{e^{i\sqrt{\lambda_n}t} - e^{-i\sqrt{\lambda_n}t}}{2\sqrt{\lambda_n}} \right].$$

<u>Propriété</u> : pp. $k \in \left(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right)$. $\quad |U_n(t;k)| \le \frac{|f_n(k)|}{\sqrt{\lambda_n(k)}}\, t.$

On obtient finalement

$\forall x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$, $\forall t \ge 0$,

$\forall p \in \mathbb{Z}$. $\quad u(x+pL, t) = \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} U_n(t,k)\, w_n(x,k)\, e^{ipkL}\, dk.$

<u>Propriété</u> : $\displaystyle\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}^*} U_n(t,k)\, w_n(x,k) \right\|^2_{L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |U_n(t,k)|^2$

$$\le t^2 \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{|f_n(k)|^2}{\lambda_n(k)} \le C t^2 \|\hat{f}(\cdot,k)\|^2$$

Soit $\|u(x,t)\|_{L^2(-\frac{L}{2}+pL, \frac{L}{2}+pL)} \le Ct.$

On s'intéresse maintenant au comportement de la solution quand $t \to +\infty$.

Supposons $\exists m_0 \; \exists k_0 \neq \{0, \frac{\pi}{L}\}$ tq $\omega = \sqrt{\lambda_{m_0}(k_0)}$.

On écrit $U(x,t) = U_{ev}(x,t) + U_{prop}(x,t)$.

où $$U_{ev}(x+pL, t) = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \sum_{m \neq m_0} U_m(t;k)\, w_m(x,k) e^{ipkL}\, dk.$$

$$U_{prop}(x+pL,t) = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} U_{m_0}(t,k)\, w_{m_0}(x;k) e^{ipkL}\, dk.$$

où $$U_m(t,k) = \frac{f_m(k)}{2\sqrt{\lambda_m(k)}} \left[\frac{e^{-i\omega t} - e^{i\sqrt{\lambda_m}\, t}}{\sqrt{\lambda_m} + \omega} + \frac{e^{-i\omega t} - e^{-i\sqrt{\lambda_m}\, t}}{\sqrt{\lambda_m} - \omega} \right]$$

$$U_m(t,k)\, e^{i\omega t} = \frac{f_m(k)}{\lambda_m(k) - \omega^2} - \frac{f_m(k)}{2\sqrt{\lambda_m(k)}} \left[\frac{e^{i(\sqrt{\lambda_m} + \omega)t}}{\sqrt{\lambda_m(k)} + \omega} + \frac{e^{-i(\sqrt{\lambda_m} - \omega)t}}{\sqrt{\lambda_m(k)} - \omega} \right]$$

$$U_{ev}(x+pL,t) e^{i\omega t} = \underbrace{\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \sum_{m \neq m_0} \frac{f_m(k)\, w_m(x,k) e^{ipkL}}{\lambda_m(k) - \omega^2}\, dk}_{u_{ev}(x+pL)} - \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \sum_{m \neq m_0} e^{ipkL} \frac{f_m(k)}{2\sqrt{\lambda_m(k)}} [\quad]\, w_m(x,k)\, dk$$

On réécrit $$\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \sum_{m \neq m_0} \frac{e^{ipkL} f_m(k)}{2\sqrt{\lambda_m(k)}} \left[\frac{e^{i\sqrt{\lambda_m}}}{\sqrt{\lambda_m} + \omega} + \frac{e^{-i\sqrt{\lambda_m}}}{\sqrt{\lambda_m} - \omega} \right] e^{i\omega t}\, w_m(x,k)\, dk = \int_{\sigma(A) - \lambda_{m_0}(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L})} \psi(\lambda) \frac{e^{i(\sqrt{\lambda} + \omega)t}}{\sqrt{\lambda} + \omega} + \frac{e^{-i(\sqrt{\lambda} - \omega)t}}{\sqrt{\lambda} - \omega}$$

avec $\psi \; L^1$

si $m_0 \neq 0$ alors il faut supposer $\boxed{f_0(0) = 0}$.

donc $\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \sum_{n \neq m_0} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

$$U_{prop}(x+pL,t) = v.p. \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{f_{m_0}(k)}{\lambda_{m_0}(k) - \omega^2}\, dk - v.p \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{f_{m_0}(k)}{2\sqrt{\lambda_{m_0}(k)}} \left[\frac{e^{i(\sqrt{\lambda_{m_0}(k)} + \omega)t}}{\sqrt{\lambda_{m_0}(k)} + \omega} + \frac{e^{-i(\sqrt{\lambda_{m_0}(k)} - \omega)t}}{\sqrt{\lambda_{m_0}(k)} - \omega} \right] w_{m_0}(x,k) e^{ipkL}\, dk$$

si $m_0 = 0$ il faut supposer $f_0(0) = 0$.

$$v.p \int_{-\pi/L}^{\pi/L} = v.p. \int_0^{\pi/L} + v.p \int_{-\pi/L}^{0}$$

De plus, $\sqrt{\lambda_{m_0}(k)} > 0$. On montre $v.p \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{f_{m_0}(k)}{2\sqrt{\lambda_{m_0}(k)}} \frac{e^{i(\sqrt{\lambda_{m_0}(k)} + \omega)t}}{\sqrt{\lambda_{m_0}(k)} + \omega}\, w_{m_0}(x,k) e^{ipkL}\, dk \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Il reste

$$v.p. \int_0^{\pi/L} \frac{f_{m_0}(k)}{2\sqrt{\lambda_{m_0}(k)}} \frac{e^{-i(\sqrt{\lambda_{m_0}(k)} - \omega)t}}{\sqrt{\lambda_{m_0}(k)} - \omega}\, w_{m_0}(x,k) e^{ipkL}\, dk$$

$\xi = \sqrt{\lambda_{m_0}(k)}$

$d\xi = \frac{\lambda_{m_0}'(k)\, dk}{2\sqrt{\lambda_{m_0}(k)}}$

$\nu_{m_0} = \lambda_{m_0}^{-1}$

$\lambda_{m_0}(0, \frac{\pi}{L}) = (a_{m_0}, b_{m_0})$

$$= v.p. \int_{\sqrt{a_{m_0}}}^{\sqrt{b_{m_0}}} \frac{f_{m_0}(\nu_{m_0}(\xi))}{|\lambda_{m_0}'(\nu_{m_0}(\xi))|} \frac{e^{-i(\xi - \omega)t}}{\xi - \omega}\, w_{m_0}(x, \nu_{m_0}(\xi)) e^{ip\nu_{m_0}(\xi)}\, d\xi \longrightarrow i\pi \frac{f_{m_0}(k_0)}{|\lambda_{m_0}'(k_0)|} w_{m_0}(x,k_0) e^{ipk_0}$$

et v.p. $\displaystyle\int_{-\pi/L}^{0}$ $\xrightarrow[t\to\infty]{}$ $i\pi \dfrac{f_{n_0}(-k_0)}{|\lambda_{n_0}'(k_0)|}\, w_{n_0}(x,-k_0)\, e^{-ipk_0}$.

. si $f_0(0)=0$ on a donc $\|U(x,t)e^{i\omega t} - u(x)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ p.p x.

Remarque : • $f_0(0)$? $f_0(k) = \left(\hat f(\cdot,k), w_0(\cdot,k)\right)_{L^2}$.

$w_0(\cdot,0) = 1 \Rightarrow f_0(0) = 0$ ssi $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \hat f(x,0)\,dx = 0$

$\hat f(x,0) = \sqrt{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nL) \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0$.

• si $f_0(0)\neq 0$. alors on n'a pas principe d'amplitude limite!
Il faudrait rajouter la contribution de $f_0(0)$.