Cours AMS-TA03 : Propagation des ondes dans des milieux périodiques

Lundi 11 Février 2019

Contrôle de connaissances. Durée : 3 heures

Tous les documents sont autorisés.

EXERCICE 1 (UNE PROPRIÉTÉ DE LA TRANSFORMATION DE FLOQUET-BLOCH)

On s'intéresse dans cet exercice à la transformation de Floquet-Bloch $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}$, associée à la période 1 définie dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\forall\,(x,k) \in [0,1]\times[-\pi,\pi], \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}u(x,k) := \widehat{u}(x,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(x+n)\, e^{-ink}$$

On rappelle que $\mathcal{F}$ se prolonge de façon unique en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(K)$, avec $K = [0,1]\times[-\pi,\pi]$, que l'on peut identifier à $L^2((-\pi,\pi);L^2(0,1))$. Dans la suite, étant donné $u \in L^2(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit $u_n \in L^2(0,1)$ par

$$\text{p.p. } x \in (0,1), \quad u_n(x) = u(x+n),$$

et, pour tout réel $s > 0$, on pose

$$L^2_s(\mathbb{R}) = \big\{ u \in L^2(\mathbb{R}) \;/\; (1+x^2)^{\frac{s}{2}}\; u \in L^2(\mathbb{R}) \big\}.$$

qui est naturellement muni d'une structure hilbertienne avec la norme

$$\|u\|^2_{L^2_s(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)^s\; |u(x)|^2\; dx$$

L'objet de cet exercice est de montrer que si une fonction u appartient à $L^2_s(\mathbb{R})$ pour s bien choisi, sa transformée de Floquet-Bloch $\mathcal{F}u$ possède des propriétés de régularité (notamment höldérienne) par rapport à la variable k (résultat admis en cours).

Question 1. *Exprimer la norme de u dans $L^2(\mathbb{R})$ en fonction des normes des fonctions u_n dans $L^2(0,1)$ et montrer que*

$$\forall\, u \in L^2_s(\mathbb{R}), \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n^2)^s\; \|u_n\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|^2_{L^2_s(\mathbb{R})}$$

Question 2. *On suppose jusqu'à la question 5 que* $s > \frac{1}{2}$. *Montrer qu'il existe une constante* $C(s) > 0$ *que l'on précisera telle que*

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F}u\|_{C^0((-\pi,\pi);L^2(0,1))} := \sup_{k \in [-\pi,\pi]} \|\mathcal{F}u(\cdot,k)\|_{L^2(0,1)} \leq C(s)\ \|u\|_{L^2_s(\mathbb{R})}$$

Montrer la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *dans* $L^2_s(\mathbb{R})$ *à partir de la densité de* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *dans* $L^2(\mathbb{R})$. *En déduire que* $\mathcal{F}$ *applique continûment* $L^2_s(\mathbb{R})$ *dans* $C^0((-\pi,\pi);L^2(0,1))$.

Question 3. *Soit* $r \in [0,1]$, *montrer que*

$$\forall\ (y,y') \in \mathbb{R}^2, \quad |e^{iy} - e^{iy'}| \leq 2^{1-r}\ |y-y'|^r.$$

Pour $r \in]0,1]$, *on pose*

$$C^{0,r}((-\pi,\pi);L^2(0,1)) = \left\{\widehat{u} \in C^0((-\pi,\pi);L^2(0,1))\ /\ ||\widehat{u}(\cdot,k) - \widehat{u}(\cdot,k')||_{L^2(0,1)} \leq C\ |k-k'|^r\right\}$$

qui est un espace de Banach pour la norme

$$\|\widehat{u}\|_{C^{0,r}((-\pi,\pi);L^2(0,1))} = \|\widehat{u}\|_{C^0((-\pi,\pi);L^2(0,1))} + |\widehat{u}|_{C^{0,r}((-\pi,\pi);L^2(0,1))},$$

où on a posé

$$|\widehat{u}|_{C^{0,r}((-\pi,\pi);L^2(0,1))} := \sup_{(k,k') \in [-\pi,\pi]^2} \frac{\|\widehat{u}(\cdot,k) - \widehat{u}(\cdot,k')\|_{L^2(0,1)}}{|k-k'|^r}.$$

Question 4. *On suppose que* $0 < r < \max(1, s-1/2)$. *Montrer qu'il existe une constante* $C(r,s) > 0$ *que l'on précisera telle que, pour tout* $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$|\mathcal{F}u|_{C^{0,r}((-\pi,\pi);L^2(0,1))} \leq C(r,s)\ \|u\|_{L^2_s(\mathbb{R})}\ .$$

En déduire que $\mathcal{F}$ *applique continûment* $L^2_s(\mathbb{R})$ *dans* $C^{0,r}((-\pi,\pi);L^2(0,1))$.

Question 5. *On suppose que* $s > 3/2$. *En vous inspirant de la démarche de la question 2, montrer que* $\mathcal{F}$ *applique continûment* $L^2_s(\mathbb{R})$ *dans* $C^1((-\pi,\pi);L^2(0,1))$, *espace de Banach muni de la norme*

$$\|\widehat{u}\|_{C^1((-\pi,\pi);L^2(0,1))} = \|\widehat{u}\|_{C^0((-\pi,\pi);L^2(0,1))} + \|\partial_k \widehat{u}\|_{C^0((-\pi,\pi);L^2(0,1))}$$

Question 6. *On suppose toujours que* $s > 3/2$. *En vous inspirant de la démarche de la question 2, montrer que, pour* $0 < r < \max(1, s-3/2)$, $\mathcal{F}$ *applique continûment* $L^2_s(\mathbb{R})$ *dans l'espace*

$$C^{1,r}((-\pi,\pi);L^2(0,1)) := \{\widehat{u} \in C^1((-\pi,\pi);L^2(0,1))\ /\ \partial_k \widehat{u} \in C^{0,r}((-\pi,\pi);L^2(0,1))\}$$

muni de la norme

$$\|\widehat{u}\|_{C^1((-\pi,\pi);L^2(0,1))} = \|\widehat{u}\|_{C^1((-\pi,\pi);L^2(0,1))} + \|\partial_k \widehat{u}\|_{C^{0,r}((-\pi,\pi);L^2(0,1))}.$$

Question 7. *Proposer une généralisation des résultats des questions 5 et 6.*

<u>EXERCICE</u> 2 (AUTOUR DES FRÉQUENCES DE COUPURE)
On s'intéresse dans cet exercice au principe d'absorption limite et principe d'amplitude limite au niveau des fréquences de coupure.

Considérons tout d'abord l'unique solution u_ε dans $H^1(\mathbb{R})$ de

$$-\frac{d^2}{dx^2}u_\varepsilon(x) - \rho_p(x)(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\, u_\varepsilon(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

où $\varepsilon > 0$ et ρ_p est une fonction $1-$pèriodique telle que

$$0 < \rho^- \leq \rho_p \leq \rho^+ < +\infty$$

et f est une fonction C^∞ à support compact.

Question 1. *On note $\hat{f} := \mathcal{F}(f) \in L^2((-1/2, 1/2) \times (-\pi, \pi))$ la transformée de Floquet-Bloch de f. Expliquer pourquoi $\hat{f} \in C^\infty((-1/2, 1/2) \times (-\pi, \pi))$*

Question 2. *Rappeler pourquoi le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ est bien posé dans $H^1(\mathbb{R})$.*

Question 3. *On note $\hat{u}_\varepsilon := \mathcal{F}(u_\varepsilon) \in L^2((-1/2, 1/2) \times (-\pi, \pi))$ la transformée de Floquet-Bloch de u_ε. Donner le problème satisfait par $\hat{u}_\varepsilon(\cdot; k)$ pour tout $k \in (-\pi, \pi)$.*

Pour tout $k \in (-\pi, \pi]$, on note $A(k) : D\,(A(k)) \subset H \to H$ l'opérateur défini par

$$A(k) = -\frac{1}{\rho_p}\frac{d^2}{dx^2}, \quad D\,(A(k)) = H^2_k(-1/2, 1/2)$$

où $H = L^2_{\rho_p}(-1/2, 1/2)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_H = \int_{-1/2}^{1/2} \rho_p u v.$$

Comme $A(k)$ est autoadjoint, positif et à résolvante compacte, son spectre, noté $\sigma(A(k))$, est composé seulement de valeurs propres telles que

$$0 \leq \lambda_1(k) \leq \lambda_2(k) \leq \ldots \lambda_n(k) \leq \ldots, \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n(k) = +\infty$$

et il existe une base hilbertienne formée de vecteurs propres associés $(w_1(\cdot; k), w_2(\cdot; k), \ldots, w_n(\cdot; k), \ldots)$ choisis tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|w_n(\cdot; k)\|_H = 1$$

Question 4. *Pour tout $k \in (-\pi, \pi]$, exprimer $\hat{u}_\varepsilon(\cdot; k)$ dans cette base en fonction des $\lambda_n(k)$, $\hat{f}$, ω et ε. En déduire l'expression de u_ε sur $\mathbb{R}$.*

Question 5. *Rappeler les hypothèses pour lesquelles le principe d'absorption limite a été démontré en cours. Donner le résultat sans démonstration et expliquer pourquoi ces hypothèses sont importantes.*

On suppose dans la suite que

$$\exists n_0,\ \exists k_0 \in \{0, \pi\} \text{ tels que } \lambda_{n_0}(k_0) = \omega^2 \text{ et } \lambda'_{n_0}(k_0) = 0$$

On dit que ω est une fréquence de coupure.

Question 6. *Montrer que $u_{\text{evan},\varepsilon}$ défini par*

$$u_{\text{evan},\varepsilon} = u_\varepsilon - u_{n_0,\varepsilon} \quad \textbf{où} \quad \forall k \in (-\pi, \pi], \quad \hat{u}_{n_0,\varepsilon}(x;k) = (\hat{u}_\varepsilon(\cdot;k), w_{n_0}(\cdot;k))_H \; w_{n_0}(x;k)$$

a une limite dans $H^1(\mathbb{R})$ et donner sa limite.

On suppose pour simplifier que $k_0 = 0$ et $k \to \lambda_{n_0}(k)$ est croissante sur $(0,\pi)$ (on notera ν_{n_0} l'inverse de λ_{n_0}).

Question 7.
7.1 *Montrer que dans ce cas $\lambda''_{n_0}(k_0) > 0$.*
Indication : on pourra utiliser la caracterisation des valeurs propres à partir de la fonction $\mathcal{D}$ introduite dans le cours.
7.2 *En déduire que $k \mapsto \dfrac{k}{\lambda'_{n_0}(k)}$ est bornée.*

Question 8.
8.1 *En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{\lambda_{n_0}(k) - \omega^2}$ sur $(0,\pi)$ d une part et sur $(-\pi, 0)$ d'autre part, montrer que $u_{n_0,\varepsilon}$ peut s'ecrire*

$$u_{n_0,\varepsilon}(x+p) = \int_0^b \frac{\Phi_{n_0}(t,x,p)}{t^2 - \imath\varepsilon}\, dt$$

où on précisera la définition de $b > 0$ et Φ_{n_0}.
8.2 *Montrer que pour tout x et pour tout p, l'application $t \mapsto \Phi_{n_0}(t,x,p)$ est continue sur $]0,b]$ et se prolonge par continuité en 0.*
On supposera admis dans cette question que pour tout x, l'application $k \mapsto w_n(x,k)$ est continue.

Question 9.
9.1 *Soit $\beta > 0$, montrer que pour tout F continue sur $[0,\beta]$*

$$\int_0^\beta \frac{F(t)}{t^2 - \imath\varepsilon}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{\beta/\sqrt{\varepsilon}} \frac{F(\sqrt{\varepsilon}v)}{v^4+1}(v^2+\imath)\, dv$$

9.2 *En déduire que si $F(0) \neq 0$ alors*

$$\int_0^\beta \frac{F(t)}{t^2 - \imath\varepsilon}\, dt \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{F(0)}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^4+1}(v^2+\imath)\, dv$$

Question 10. *On suppose que* $f_{n_0}(0) \neq 0$ *où on note* $f_{n_0}(k) := (\hat{f}(\cdot; k), w_{n_0}(\cdot; k))_{L^2(0,1)}$ *pour tout* $k \in (-\pi, \pi)$*.*

10.1 *Montrer qu'il existe une fonction* G_{n_0} *non nulle presque partout telle que*

$$\text{p.p. } x, \ \forall p, \quad u_{n_0,\varepsilon}(x+p) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \frac{G_{n_0}(x+p)}{\sqrt{\varepsilon}}$$

10.2 *Qu'en déduisez vous sur le principe d'absorption limite aux fréquences de coupure ?*

Question 11. *Que se passe-t-il si* $f_{n_0}(0) = 0$*.*