Cours ANN 203 – Examen écrit, vendredi 6 mai 2022

NOTE: Les matrices et les vecteurs considérés dans tous les exercices sont supposés à valeurs réelles. La notation $\det(X)$ désigne le déterminant de la matrice carrée X.

Exercice E22-1 *Calculer la décomposition QR de la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Le réflecteur de Householder pour la première (et unique) colonne de A est

$$H = I - 2\frac{vv^{\mathrm{H}}}{\|v\|^2} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad (v = \begin{Bmatrix} 8 \\ 4 \end{Bmatrix})$$

On trouve alors

$$A = QR, \qquad \text{avec} \quad Q = H,\ R = HA = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice E22-2 (itérations de Jacobi pour le problème aux valeurs propres symétrique) *Cet exercice utilise la norme de Frobenius $\|A\|_F$ d'une matrice A. On rappelle (pour une matrice réelle A) que*

$$\|A\|_F^2 := \sum_{i,j} a_{ij}^2 = Tr(AA^T) = Tr(A^TA).$$

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice réelle symétrique. On considère dans cet exercice une approche alternative à celles enseignées dans le cours, appelée itérations de Jacobi, pour la détermination des valeurs propres de A. Cette méthode utilise la décomposition additive $A = A_D + A_N$ de A, où A_D est la partie diagonale de A (et donc A_N est obtenue en remplaçant la diagonale de A par zéro). L'idée générale de l'algorithme est de réduire $\|A_N\|_F$ à chaque itération (dans le but de converger vers une matrice diagonale). Chaque itération est de la forme $A^{(k+1)} = Q^{(k)}A^{(k)}Q^{(k)\,T}$ où $Q^{(k)}$ est une matrice orthogonale choisie de façon à annuler certains termes de $A^{(k)}$.

(a) Pour toute matrice carrée A et toute matrice orthogonale $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, montrer que (i) on a $\|QAQ^T\|_F = \|A\|_F$, et (ii) les matrices A et QAQ^T ont les mêmes valeurs propres.

(b) Cas $n = 2$: soit $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$ une matrice symétrique avec $b \neq 0$ (on a donc $A_D = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right]$). Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q = \left[\begin{smallmatrix} c & -s \\ s & c \end{smallmatrix}\right]$, définie par deux réels c, s vérifiant $c^2 + s^2 = 1$, telle que $B := QAQ^T$ est diagonale. On déterminera les réels c, s (deux solutions possibles) en fonction de a, b, d, et pourra pour cela introduire le paramètre $\tau = (d-a)/2b$ et l'inconnue auxiliaire $t = s/c$. Ce procédé permet donc (sans surprise) de diagonaliser $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symétrique en une seule itération.

(c) On extrapole maintenant le procédé précédent à $n \geq 2$ quelconque. On choisit deux lignes k, ℓ de A (pour lesquelles $a_{k\ell} \neq 0$). Définir une matrice orthogonale $Q(k,\ell) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $B := Q(k,\ell)AQ^T(k,\ell)$ laisse les lignes et colonnes de A autres que k, ℓ inchangées et introduise un zéro aux positions $a_{k\ell}$ et $a_{\ell k}$ de A.

Montrer alors, posant $B = B_D + B_N$, que

$$\|B_N\|_F^2 = \|A_N\|_F^2 - 2a_{k\ell}^2,$$

et interpréter ce résultat (utilité de la méthode de calcul de B ci-dessus, meilleur choix de k, ℓ).

Estimer (à l'ordre principal en n) le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires à l'évaluation de $Q(k,\ell)AQ^T(k,\ell)$.

(d) Proposer sur la base des questions précédentes un algorithme itératif susceptible de fournir une approximation des valeurs et vecteurs propres de A, et expliquer comment et à quelle condition ces approximations sont obtenues. Proposer un critère d'arrêt des itérations de Jacobi.

Eléments de solution:

(a) Pour montrer (i), on écrit (en exploitant l'orthogonalité de Q via $Q^{\mathrm{T}}Q = I$)

$$\|QAQ^{\mathrm{T}}\|_{\mathrm{F}}^2 = \mathrm{Tr}\big\{\, QAQ^{\mathrm{T}}(QAQ^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \,\big\} = \mathrm{Tr}(QAQ^{\mathrm{T}}QA^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Tr}(QAA^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}})$$
$$= \mathrm{Tr}(AA^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}Q) = \mathrm{Tr}(AA^{\mathrm{T}}) = \|A\|_{\mathrm{F}}^2.$$

La propriété (ii) découle (à nouveau par orthogonalité de Q) de

$$QAQ^{\mathrm{T}} - \lambda I = QAQ^{\mathrm{T}} - \lambda QQ^{\mathrm{T}} = Q(A - \lambda I)Q^{\mathrm{T}},$$

qui permet de déduire

$$\det(QAQ^{\mathrm{T}} - \lambda I) = \det\big\{\, Q(A - \lambda I)Q^{\mathrm{T}} \,\big\} = \det\big\{\, Q^{\mathrm{T}}Q(A - \lambda I) \,\big\} = \det(A - \lambda I).$$

Les matrices $QAQ^{\mathrm{T}} - \lambda I$ et $A - \lambda I$ ont donc le même polynome caractéristique, et ainsi les mêmes valeurs propres.

(b) Un calcul élémentaire donne, en utilisant les quantités suggérées

$$(QAQ^{\mathrm{T}})_{12} = (QAQ^{\mathrm{T}})_{21} = (a-d)cs + (c^2 - s^2)b \qquad , (QAQ^{\mathrm{T}})_{12} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2\tau t - 1 = 0.$$

La condition d'annulation donne deux valeurs $t = -\tau \pm \sqrt{\tau^2+1}$, conduisant à quatre couples (c, s) possibles:

$$c = \pm\frac{1}{1+t^2}, \quad s = ct, \qquad t = -\tau \pm \sqrt{\tau^2+1}$$

(c) On définit $Q(k, \ell) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ comme la matrice identité en-dehors des lignes et colonnes k, ℓ, dont les intersections forment une matrice 2×2 de rotation:

$$R(k,\ell,p) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & -s & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & s & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

De plus, les coefficients c, s sont calculés comme en (b) pour $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} a_{kk} & a_{k\ell} \\ a_{\ell k} & a_{\ell\ell} \end{smallmatrix}\right]$. Le calcul de $B := Q(k, \ell)AQ^{\mathrm{T}}(k, \ell)$ ne modifie que les lignes et colonnes k, ℓ de A.

D'après (a), on a $\|B\|_{\mathrm{F}} = \|A\|_{\mathrm{F}}$. D'autre part, pour toute matrice $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on a $\|X\|^2 = \|X_{\mathrm{D}}\|_{\mathrm{F}}^2 + \|X_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{F}}^2$. Par conséquent:

$$\|B_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{F}}^2 = \|A_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{F}}^2 + \|A_{\mathrm{D}}\|_{\mathrm{F}}^2 - \|B_{\mathrm{D}}\|_{\mathrm{F}}^2 = \|A_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{F}}^2 + \|A_{\mathrm{D}}^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2 - \|B_{\mathrm{D}}^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2,$$

où $A^{k\ell}, B^{k\ell} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sont les sous-matrices obtenues en prenant les lignes et colonnes k, ℓ de A, B. Les résultats de (a), (b) appliqués à $A^{k\ell}, B^{k\ell}$ montrant que $\|A^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2 = \|B^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2$ et $\|B^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2 = \|B_{\mathrm{D}}^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2$ (puisque $B_{\mathrm{N}}^{k\ell} = 0$ par construction de $B^{k\ell}$), on déduit

$$\|A_{\mathrm{D}}^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2 - \|B_{\mathrm{D}}^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2 = \|A_{\mathrm{D}}^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2 - \|B^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2 = \|A_{\mathrm{D}}^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2 - \|A^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2 = -\|A_{\mathrm{N}}^{k\ell}\|_{\mathrm{F}}^2 = -2a_{k\ell}^2$$

et on obtient donc $\|B_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{F}}^2 = \|A_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{F}}^2 - 2a_{k\ell}^2$: chaque itération de Jacobi réduit $\|A_{\mathrm{N}}\|_{\mathrm{F}}$.

Exercice E22-3 (choix du paramètre de relaxation dans la méthode itérative SOR) *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, que l'on décompose additivement comme $A = D-L-U$ (où $D, -L, -U$ sont la diagonale et les parties triangulaires inférieure et supérieure strictes de A, respectivement). La méthode itérative SOR (*successive over-relaxation*) pour le système linéaire $Ax = b$ repose sur les itérations définies par*

$$\big[D - \eta L\big]x_{k+1} = \big[\eta U + (1-\eta)D\big]x_k + \eta b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (x_0 \in \mathbb{R}^n\text{: initialisation arbitraire}),$$

ou $\eta \in \mathbb{R}$ est le paramètre de relaxation *de la méthode. On observe que chaque itération demande la résolution d'un système triangulaire. Le choix de η est important, et l'objet de cet exercice est de montrer que certaines valeurs de η ne peuvent pas convenir, quels que soient A, b.*

(a) Expliquer pourquoi les itérations SOR sont susceptibles de fournir la solution de $Ax = b$.

(b) Mettre l'itération SOR générique sous la forme $x_{k+1} = R(\eta)x_k + f(\eta)$, avec $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $f \in \mathbb{R}^n$. Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur la matrice d'itération $R(\eta)$ pour que les itérations SOR convergent quelle que soit l'initialisation x_0?

(c) Montrer que $det(R(\eta)) = (1-\eta)^n$. En déduire un ensemble de valeurs de η pour lesquelles la satisfaction de la condition nécessaire et suffisante du (b) est impossible.

L'algorithme SOR n'est ainsi susceptible de converger que pour les valeurs de η non exclues par le résultat de (b). On rappelle que $det(AB) = det(A)det(B)$ quelles que soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Eléments de solution:

(a) Supposons que la suite x_k converge vers une limite x. En passant à la limite dans l'équation définissant les itérations SOR, x vérifie alors

$$\big[D-\eta L\big]x = \big[\eta U + (1-\eta)D\big]x + \eta b \implies \big[\eta D - \eta L - \eta U\big]x = \eta b,$$

et est donc solution du système linéaire $Ax = b$ à résoudre. La convergence de la suite x_k n'est cependant pas *a priori* garantie.

(b) L'itération SOR générique s'écrit (multiplication à gauche par $[D-\eta L]^{-1}$)

$$x_{k+1} = R(\eta)x_k + f(\eta), \qquad R(\eta) := \big[D-\eta L\big]^{-1}\big[\eta U + (1-\eta)D\big], \quad f(\eta) := \eta\big[D-\eta L\big]^{-1}b.$$

La condition nécessaire et suffisante de convergence est $\rho(R(\eta)) < 1$, où $\rho(X)$ est le rayon spectral de X, égal au maximum du module de ses valeurs propres (théorème 4.1).

(c) Par les propriétés classiques du déterminant, on a

$$\det(R(\eta)) = \frac{\det([\eta U + (1-\eta)D])}{\det([D-\eta L])}$$

De plus, les matrices $[\eta U + (1-\eta)D]$ et $[D-\eta L]$ étant toutes deux triangulaires, leur déterminant est égal au produit de leurs termes diagonaux, et ainsi

$$\det(R(\eta)) = \frac{(1-\eta)^n \det(D)}{\det(D)} = (1-\eta)^n.$$

La condition de convergence $\rho(R(\eta)) < 1$ ne peut pas être vérifiée si $|\det(R(\eta))| \geq 1$, puisque cette dernière inégalité implique qu'une au moins des valeurs propres de $R(\eta)$ est de module égal ou supérieur à 1. La convergence des itérations SOR est donc impossible pour $\eta \notin]0, 2[$. Pour $0 < \eta < 2$, la convergence des itérations SOR est possible mais nullement garantie *a priori*. Cette convergence est établie pour certaines familles de matrices A, par exemple les matrices A SPD.

Exercice E22-4 (modification de rang 1 de systèmes linéaires) *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice dense réelle inversible, et soit $f \in \mathbb{R}^n$. Le système $Mx = f$ a une solution unique $x \in \mathbb{R}^n$, que l'on suppose déjà calculée (par exemple par une méthode directe adaptée aux caractéristiques de M).*

Etant donnés deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ (considérés comme vecteurs colonne, selon l'usage habituel), on considère la matrice modifiée $M_1 := M + uv^T$ et le système modifié $M_1x_1 = f$. La modification $M_1 - M = uv^T$ de M est de rang 1 (expliquer pourquoi), et est donc "petite" en ce sens. On cherche à calculer la solution modifiée x_1 économiquement, connaissant M, x et u, v.

(a) Montrer que $1 + v^TM^{-1}u \neq 0$ est une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de M_1, et que l'inverse de M_1 est alors donné par la formule de Sherman-Morrison

$$M_1^{-1} = (M + uv^{\mathrm{T}})^{-1} = M^{-1} - \frac{1}{1 + v^TM^{-1}u}M^{-1}uv^TM^{-1}$$

(on pourra utiliser la propriété suivante: $det(I + pq^T) = 1 + p^Tq$ pour tous vecteurs $p, q \in \mathbb{R}^n$). Que peut-on dire de la modification $M_1^{-1} - M^{-1}$ de l'inverse de M?

(b) A l'aide de la formule ci-dessus, définir une méthode aussi économique que possible en opérations arithmétiques pour calculer la solution x_1 de $M_1x_1 = f$ connaissant M, x et u, v. Estimer (à l'ordre principal en n) le surcoût d'opérations arithmétiques requis pour obtenir x_1, et comparer au coût de la résolution préalable du système initial $Mx = f$ par une méthode directe.

(c) On considère maintenant le problème de moindres carrés

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m \quad (m \geq n),$$

pour lequel on suppose l'unicité de la solution x. Quelle condition doit vérifier A pour que cela soit le cas? Montrer que la solution x du problème ci-dessus vérifie le système linéaire

$$A^TAx = A^Tb$$

("équations normales" du problème aux moindres carrés). Quelles sont les principales propriétés de ce système?

(d) On envisage alors une version modifiée du problème aux moindres carrés ci-dessus, par ajout d'une ligne à A et b:

$$\min_{x_1\in\mathbb{R}^n} \|A_1x_1 - b_1\|_2^2, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} A \\ \alpha^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n}, \quad b_1 = \begin{Bmatrix} b \\ \beta \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$$
$$\text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R} \quad (m \geq n),$$

Former les équations normales de ce problème aux moindres carrés modifié. Montrer que la matrice de ce nouveau système est une perturbation de rang 1 de la matrice initiale $M = A^TA$, et qu'elle est inversible. En déduire une méthode économique de calcul de x_1 par actualisation de x, que l'on détaillera.

Eléments de solution:

(a) On a $M_1 := M(I + M^{-1}uv^{\mathrm{T}}$, ce qui entraîne

$$\det(M_1) = \det(M)\det(I + M^{-1}uv^{\mathrm{T}}) = (1 + v^{\mathrm{T}}M^{-1}u)\det(M).$$

La condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de M_1 est $\det(M_1) \neq 0$, et donc $1 + v^{\mathrm{T}}M^{-1}u \neq 0$ ($\det(M) \neq 0$ puisque M est par hypothèse inversible). Pour montrer que M^{-1} est donné par la formule de Sherman-Morrison, il sufit de vérifier que la multiplication (à gauche ou à droite) par M_1 donne l'identité. Par exemple:

$$\left(M + uv^{\mathrm{T}}\right)\left(M^{-1} - \frac{1}{1 + v^{\mathrm{T}}M^{-1}u}M^{-1}uv^{\mathrm{T}}M^{-1}\right)$$
$$= I + \left(1 - \frac{1}{1 + v^{\mathrm{T}}M^{-1}u} - \frac{v^{\mathrm{T}}M^{-1}u}{1 + v^{\mathrm{T}}M^{-1}u}\right)uv^{\mathrm{T}}M^{-1} = I$$

Dans la formule de Sherman-Morrison, on a $M^{-1}uv^{\mathrm{T}}M^{-1} = (M^{-1}u)(M^{-\mathrm{T}}v)^{\mathrm{T}}$, qui est une matrice de rang 1 (produit d'un verceur colonne par un vecteur ligne, interprétable comme le produit tensoriel de deux vecteurs).

(b) La solution de $M_1x_1 = f$ est algébriquement donnée (en utilisant la formule de Sherman-Morrison) par

$$x_1 = M^{-1}f = M^{-1}f - \frac{1}{1+v^{\mathrm{T}}M^{-1}u}M^{-1}uv^{\mathrm{T}}M^{-1}f$$

Cette expression est généralement inefficace en pratique car elle nécessiterait le calcul (de coût excessif, et parfois risqué sur le plan de la stabilité ou de la précision) de M^{-1}. Cet obstacle est contourné en remarquant que (i) $M^{-1}f = x$ et (ii) $z := M^{-1}u$ s'obtient en résolvant le système $Mz = u$ (une tâche raisonnable en réutilisant la factorisation LU, Cholesky... de M déjà employée pour obtenir x). On obtient ainsi

$$x_1 = x - \frac{1}{1+v^{\mathrm{T}}z}(v^{\mathrm{T}}x)z$$

Supposons pour fixer les idées M inversible mais non symétrique. Le coût initial principal de la résolution de $Mx = f$ réside dans la factorisation LU de M ($\sim 2n^3/3$ opérations), les deux systèmes triangulaires demandant ensuite $\sim n^2$ opérations chacun. Le surcoût lié à l'évaluation subséquente de x_1 par la formule ci-dessus consiste en (i) $\sim 2n^2$ opérations pour les deux systèmes triangulaires fournissant la solution z de $Mz = u$ (réutilisation de la factorisation LU), (ii) calcul des produits scalaires $v^{\mathrm{T}}x$ et $v^{\mathrm{T}}z$ ($\sim 2n$ opérations chacun), (iii) calcul final de x_1 ($\sim 2n$ opérations). Les coûts de calcul de x puis x_1 sont donc, à l'ordre principal, $\sim 2n^3/3$ et $\sim 2n^2$ respectivement, et le surcoût du calcul de x_1 est donc faible relativement au coût du calcul de x. Un argument similaire s'applique au cas où M est SPD, avec utilisation d'une factorisation initiale de Cholesky.

(c) La solution du problème de moindres carrés (qui existe toujours) est unique si A est de rang n (rang colonne maximal). Cette solution x doit par exemple vérifier la condition nécessaire d'optimalité $\nabla_x\big(\|Ax-b\|_2^2\big) = 0$. On a:

$$\|Ax-b\|_2^2 = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x - 2x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}b + b^{\mathrm{T}}b \quad \Longrightarrow \quad \nabla_x\big(\|Ax-b\|_2^2\big) = 2(A^{\mathrm{T}}A)x - 2A^{\mathrm{T}}b.$$

La condition nécessaire d'optimalité est donc le système des équations normales proposé.

La matrice $A^{\mathrm{T}}A$ est clairement carrée, symétrique et positive ($x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x = \|Ax\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$). La matrice A étant de rang colonne maximal, son noyau est trivial ($\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}}A) = \{0\}$), ce qui implique $x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x > 0$ pour tout $x \neq 0$. La matrice $A^{\mathrm{T}}A$ est donc SPD. La résolution du problème initial de moindres carrés se ramène à celle du système (carré SPD) des equations normales.

(d) Le problème de moindres carrés modifié conduit aux équations normales $A_1^{\mathrm{T}}A_1x_1 = A_1^{\mathrm{T}}b_1$, pour lesquelles on trouve

$$A_1^{\mathrm{T}}A_1 = A^{\mathrm{T}}A + \alpha\alpha^{\mathrm{T}}, \quad A^{\mathrm{T}}b_1 = A^{\mathrm{T}}b + \beta\alpha$$

La matrice $A_1^{\mathrm{T}}A_1$ est donc une modification de rang 1 de la matrice $A^{\mathrm{T}}A$, à laquelle on peut appliquer la formule de Sherman-Morrison ($M = A^{\mathrm{T}}A$, $u = v = \alpha$), et on obtient

$$(A_1^{\mathrm{T}}A_1)^{-1} = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1} - \frac{1}{1+\alpha^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\alpha}(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}.$$

Procédant ensuite comme en (b), la solution du problème de moindres carrés modifié est *a priori* donnée par

$$\begin{aligned} x_1 = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}(A^{\mathrm{T}}b) &- \frac{1}{1+\alpha^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\alpha}(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b \\ &+ \beta\Big[(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\alpha - \frac{1}{1+\alpha^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\alpha}(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\alpha\Big]. \end{aligned}$$

En utilisant $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}(A^{\mathrm{T}}b) = x$ et définissant $z := (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\alpha$ par résolution du système $(A^{\mathrm{T}}A)z = \alpha$, on obtient alors

$$x_1 = x - \frac{1}{1+\alpha^{\mathrm{T}}z}(\alpha^{\mathrm{T}}x)z + \beta\Big(z - \frac{\alpha^{\mathrm{T}}z}{1+\alpha^{\mathrm{T}}z}z\Big) = x + \frac{\beta - \alpha^{\mathrm{T}}x}{1+\alpha^{\mathrm{T}}z}z.$$

L'évaluation de la formule ci-dessus, une fois x connu, demande donc (i) le calcul de z par résolution de $(A^{\mathrm{T}}A)z = \alpha$ (on réutilise pour cela la factorisation $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$ ou de Cholesky de $A^{\mathrm{T}}A$), (ii) l'évaluation des produits scalaires $\alpha^{\mathrm{T}}x$ et $\alpha^{\mathrm{T}}z$, (iii) l'évaluation finale de x_1 à l'aide de ces éléments. Des remarques similaires à celles du (c) s'appliquent quant à l'évaluation du surcoût (faible en termes relatifs) entraîné par l'évaluation de x_1.