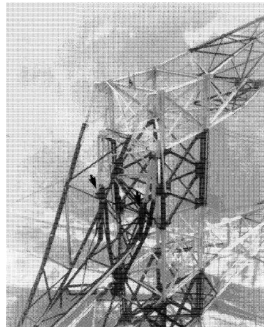
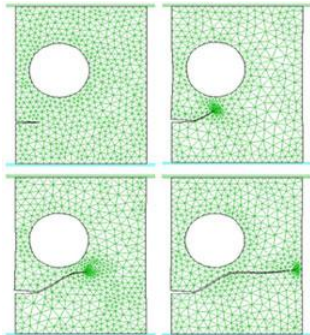


Rupture et plasticité



Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

Rupture et plasticité : plan du cours

Comportements non linéaires des matériaux solides

Amphi 1

Rupture fragile

- ▶ Singularités de contrainte et ténacité des matériaux
- ▶ **Analyse énergétique de la propagation d'une fissure I**
- ▶ Analyse énergétique de la propagation d'une fissure II.
Fissuration par fatigue

Amphi 2

Amphi 3

Amphi 4

Plasticité

- ▶ Comportement élasto-plastique
- ▶ Dissipation plastique
- ▶ Structures élasto-plastiques standards

Amphi 5

Amphi 6

Amphi 7

Charges limites

Amphi 8

Principales conclusions de l'amphi 2

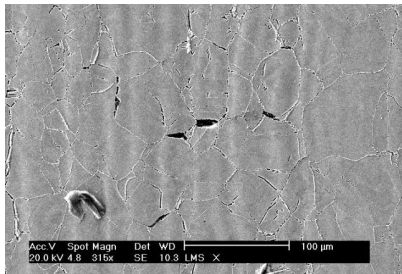
- ▶ **Singularité de contrainte** en pointe d'entaille ou de fissure.

$$\underline{\underline{\sigma}} \sim \frac{K}{\sqrt{r}} \underline{\underline{F}}(\theta).$$

- ▶ **Nouvelle propriété matériau : ténacité.** Critère de propagation des défauts de type « loi à seuil » portant sur le facteur d'intensité des contraintes en mode I K_I .
- ▶ **Théorie efficace** qui permet effectivement le dimensionnement des structures.
- ▶ **Cependant** cette théorie est basée sur le caractère infini des contraintes en pointe de fissure. HPP ?

Mécanique linéaire de la Rupture (amphis 2, 3 et 4)

Objectifs : en restant dans le cadre de l'élasticité linéaire...



...expliquer comment la présence de micro-défauts fragilise un élément de volume de matériau.

.... dimensionner une structure en présence de fissures.

- ▶ Ténacité d'un matériau — Taille critique des défauts (amphi 2)
- ▶ **Comprendre la nature des forces permettant l'avancée des fissures (amphi 3)**
- ▶ Analyser des structures à la rupture fragile ou par fatigue (amphi 4)

Analyse énergétique de la propagation d'une fissure I

1. Energie potentielle d'une structure élastique fissurée
2. Analyse énergétique de Griffith.
3. Analyse thermodynamique simplifiée
4. Taux de restitution de l'énergie et singularités de contrainte
5. Exemple : test de pelage (arrachement d'un ruban adhésif)

Plan

1. Energie potentielle d'une structure élastique fissurée
2. Analyse énergétique de Griffith.
3. Analyse thermodynamique simplifiée
4. Taux de restitution de l'énergie et singularités de contrainte
5. Exemple : test de pelage (arrachement d'un ruban adhésif)

Énergie potentielle

Les structures considérées ici possèdent une énergie potentielle totale P .

Nous nous limiterons aux énergies de type **mécanique** :

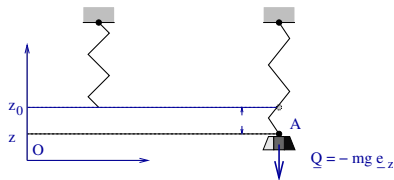
$$P = W - L,$$

où :

- ▶ W est l'énergie de déformation de la structure ;
- ▶ $-L$ est l'énergie potentielle des efforts extérieurs appliqués à la structure.

Exemple

Ressort (raideur k) soumis à un poids Q à une extrémité et fixé à l'autre extrémité.



- ▶ Déplacement \underline{u}' repéré par z .
- ▶ Energie de déformation du ressort :

$$W(z) = \frac{1}{2}k(z - z_0)^2.$$

- ▶ Potentiel des efforts extérieurs :

$$-L(z) = mg(z - z_0).$$

Energie potentielle totale :

$$P(z) = W(z) - L(z) = \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 + Q(z - z_0), \quad Q = mg.$$

Propriété variationnelle : équilibre \iff minimum de P

$$\begin{aligned} z = \arg \min_{z'} P(z') &\implies k(z - z_0) + Q = 0 \\ &\implies z = z_0 - \frac{Q}{k}, \quad P = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{k} = -\frac{1}{2}k(z - z_0)^2. \end{aligned}$$

Energie potentielle d'un solide élastique linéaire (cf. MEC431)

- ▶ Champs cinématiquement admissibles :

$$\mathbb{C}(S_{\underline{u}}, \underline{u}^d) = \{ \underline{u}' \text{ tels que } \underline{u}' = \underline{u}^d \text{ sur } S_{\underline{u}} \}.$$

- ▶ Energie de déformation du corps :

$$W(\underline{u}') = \int_{\Omega} \rho w(\underline{x}, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}')) d\Omega.$$

Elasticité linéaire :

$$\rho w(\underline{x}, \underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

- ▶ Potentiel des efforts extérieurs imposés $-L$:

$$L(\underline{u}') = \int_{S_T} \underline{T}^d(\underline{x}) \cdot \underline{u}'(\underline{x}) da.$$

- ▶ Energie potentielle totale du corps dans le champ de déplacement virtuel \underline{u}' :

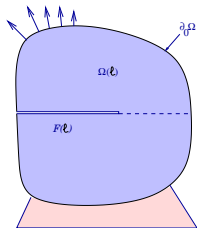
$$P(\underline{u}') = W(\underline{u}') - L(\underline{u}').$$

La solution \underline{u} du problème rend minimum l'énergie potentielle totale :

$$\underline{u} = \arg \min_{\underline{u}' \in \mathbb{C}(S_{\underline{u}}, \underline{u}^d)} P(\underline{u}').$$

Cadre de travail : solides fissurés en élasticité linéaire HPP

Problème plan, fissure rectiligne se propageant en ligne droite (longueur ℓ), libre de contrainte.



$$\Omega(\ell(t))$$

Hypothèse des petites perturbations à chaque instant, dans la configuration actuelle $\Omega(\ell(t))$

- Configur. actuelle = configur. initiale;
- Tenseur des déformations linéarisées.

Evolution quasi-statique : accélération négligée.
Matériau élastique linéaire (homogène isotrope).
Forces de volume nulles

Equations de compatibilité :

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + {}^T \nabla \underline{u}),$$

Equations d'équilibre :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{0},$$

Equations de comportement :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}},$$

Conditions aux limites (fissure) :

$$\underline{T} = \underline{0} \quad \text{sur } \mathcal{F}(\ell).$$

Conditions aux limites (bord) :

$$\begin{aligned} \underline{T} = \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{n} &= \underline{T}^d \quad \text{sur } S_{\underline{T}}, \\ \underline{u} &= \underline{u}^d \quad \text{sur } S_{\underline{u}}. \end{aligned}$$

Energie potentielle totale pour un corps fissuré

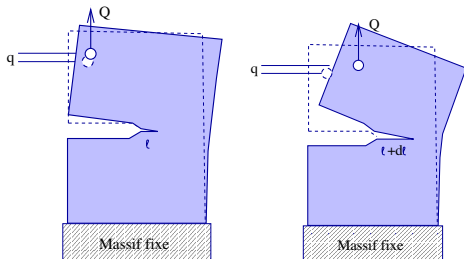
► Propriété variationnelle :

$$P(\underline{u}, \ell) = \arg \min_{\underline{u}' \in \mathbb{C}(S_{\underline{u}}, \underline{u}^d)} \left\{ \int_{\Omega(\ell)} \rho w(\underline{x}, \underline{\varepsilon}(\underline{u}')) d\Omega - \int_{S_T} \underline{T}^d(\underline{x}) \cdot \underline{u}'(\underline{x}) da \right\}.$$

- L'énergie potentielle dépend de **la géométrie du corps** ($\partial_0\Omega$ fixe et $\mathcal{F}(\ell)$ variable) et **du chargement** :

$$P = P(\ell, \mathcal{C}), \quad \text{où } \mathcal{C} \text{ désigne le chargement.}$$

- $P(\ell, \mathcal{C})$ est une fonction décroissante de ℓ :



\underline{u}' continu dans $\Omega(\ell)$:

$$\mathbb{C}(S_{\underline{u}}, \underline{u}^d, \ell) \subset \mathbb{C}(S_{\underline{u}}, \underline{u}^d, \ell + d\ell),$$

Donc, l'infimum pour $\ell + d\ell$ est plus petit que pour ℓ .

Plan

1. Energie potentielle d'une structure élastique fissurée
- 2. Analyse énergétique de Griffith.**
3. Analyse thermodynamique simplifiée
4. Taux de restitution de l'énergie et singularités de contrainte
5. Exemple : test de pelage (arrachement d'un ruban adhésif)

Analyse énergétique de Griffith

Question : quand une fissure de longueur ℓ avance-t-elle d'une longueur $d\ell$?

Hypothèse de Griffith (1920) : la fissure avance lorsque cela lui permet de **minimiser** son énergie totale :

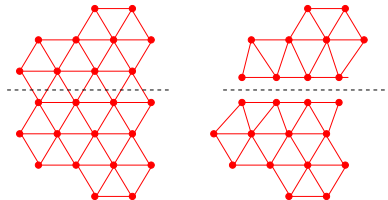
$$\text{Energie totale} = \text{Energie mécanique} + \text{énergie de surface.}$$

Energies mises en jeu :

- ▶ Energie potentielle mécanique $P(\ell)$;
- ▶ Energie **surfactive**, proportionnelle à la surface libre créée par l'avancée de la fissure

$$W^s = 2\gamma\ell.$$

- γ densité surfacique d'énergie ;
- facteur 2 : la fissure a deux lèvres ;
- Energie constante (non prise en compte) si la fissure est fixe.

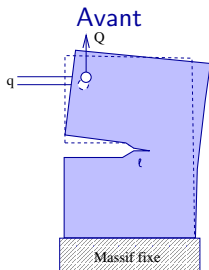


Origine microscopique de l'énergie de surface : **ré-arrangement du réseau cristallin pour satisfaire la condition de surface libre.**

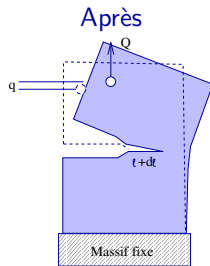
Analyse énergétique de Griffith

$$\text{Critère de Griffith : } \text{Energie totale} = P(l, C) + 2\gamma l.$$

Comparer les énergies **avant** et **après** propagation sous le même chargement :



$$P(l, C) + 2\gamma l$$



$$P(l + dl, C) + 2\gamma(l + dl)$$

- ▶ Si $P(l, C) + 2\gamma l < P(l + dl, C) + 2\gamma(l + dl)$, la fissure **n'évolue pas** et conserve sa longueur l .
- ▶ Si $P(l, C) + 2\gamma l \geq P(l + dl, C) + 2\gamma(l + dl)$, le corps « a intérêt » à **accroître la longueur de la fissure de dl** pour minimiser son énergie.

Taux de restitution de l'énergie

- ▶ Propagation conditionnée par le signe de

$$\frac{P(l, \mathcal{C}) - P(l + dl, \mathcal{C})}{dl} - 2\gamma = G - 2\gamma, \quad \text{avec} \quad G = -\frac{\partial P}{\partial l}(l, \mathcal{C}).$$

Loi à seuil :

$$G < 2\gamma : \text{ non propagation,} \quad G \geq 2\gamma : \text{ propagation.}$$

G est le **taux de restitution de l'énergie** :

dérivée de l'énergie potentielle mécanique par rapport à la longueur de fissure (à chargement constant) changée de signe.

- ▶ Conséquence de la propriété de minimum de l'énergie potentielle :

$$P(l + dl, \mathcal{C}) \leq P(l, \mathcal{C}) \quad \implies \quad G \geq 0.$$

- ▶ En 3D :

$$W^s = 2\gamma S, \quad G = -\frac{\partial P}{\partial S}(S, \mathcal{C}). \quad (\text{cf. amphi 4})$$

Critique de l'approche de Griffith

L'analyse de Griffith a deux défauts :

- ▶ **Elle fait un bilan d'énergie sans introduire de notion d'irréversibilité.**
En relâchant les efforts la fissure va se refermer et la matière se reformer.
- ▶ **Ordres de grandeur des énergies de surface γ déduites de la physique du solide très faibles** par rapport à ce qui est observé pour la propagation d'une fissure.
Il s'agit d'une **énergie d'adhésion réversible**.

⇒ Approche thermodynamique introduisant la notion d'irréversibilité.

Plan

1. Energie potentielle d'une structure élastique fissurée
2. Analyse énergétique de Griffith.
- 3. Analyse thermodynamique simplifiée**
4. Taux de restitution de l'énergie et singularités de contrainte
5. Exemple : test de pelage (arrachement d'un ruban adhésif)

Analyse de la puissance dissipée par propagation : principe

Une analyse thermodynamique préliminaire (exploitation des 1^{er} et 2^e principes) conduit au résultat :

Propagation de la fissure = phénomène irréversible.

La puissance mécanique fournie par l'extérieur du système est utilisée en partie pour modifier son énergie de déformation, le reste étant dissipé en chaleur :

$$\mathcal{P}_e = \dot{W} + \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \geq 0.$$

- ▶ Principe de la démarche : formulation et analyse de la puissance dissipée \mathcal{D} ;
- ▶ Méthode : séparation des effets de changement de chargement et de géométrie.

Analyse de la puissance dissipée par propagation

$$\mathcal{P}_e = \dot{W} + \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \geq 0.$$

Analyse par séparation des effets de changement de chargement et de géométrie.

- ▶ La solution élastique dépend de la géométrie du corps et du chargement :

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}; \mathcal{C}, \ell)$$

Pour une évolution

$$(\mathcal{C}, \ell)(t) \longrightarrow (\mathcal{C}, \ell)(t + dt) = (\mathcal{C}, \ell)(t) + (d\mathcal{C}, d\ell)$$

on a :

$$\begin{aligned} d\underline{u} &= \underline{u}(\underline{x}; \mathcal{C} + d\mathcal{C}, \ell + d\ell) - \underline{u}(\underline{x}; \mathcal{C}, \ell) \\ &\implies \dot{\underline{u}} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathcal{C}} \dot{\mathcal{C}} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \ell} \dot{\ell} = \dot{\underline{u}}|_{\ell=\text{cste}} + \dot{\underline{u}}|_{\mathcal{C}=\text{cste}} \end{aligned}$$

- ▶ L'énergie de déformation dépend de la géométrie du corps et du chargement :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega = W(\mathcal{C}, \ell) \\ &\implies \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{C}} \dot{\mathcal{C}} + \frac{\partial W}{\partial \ell} \dot{\ell} = \dot{W}|_{\ell=\text{cste}} + \dot{W}|_{\mathcal{C}=\text{cste}} \end{aligned}$$

Analyse de la puissance dissipée par propagation (suite)

- ▶ Puissance des efforts extérieurs : **dépend linéairement de la vitesse**

$$\mathcal{P}_e(\dot{\underline{u}}) = \mathcal{P}_e(\dot{\underline{u}}|_{\ell=\text{cste}}) + \mathcal{P}_e(\dot{\underline{u}}|_{\mathcal{C}=\text{cste}}) \quad \mathcal{P}_e = \mathcal{P}_e|_{\ell=\text{cste}} + \mathcal{P}_e|_{\mathcal{C}=\text{cste}}$$

- ▶ Variation d'énergie de déformation élastique :

$$\dot{W} = \dot{W}|_{\ell=\text{cste}} + \dot{W}|_{\mathcal{C}=\text{cste}} = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{C}} \dot{\mathcal{C}} + \frac{\partial W}{\partial \ell} \dot{\ell}$$

$$\dot{W}|_{\ell=\text{cste}} = \left\{ \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[u] : \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \left[\frac{\partial \underline{u}}{\partial \mathcal{C}} \right] d\Omega \right\} \dot{\mathcal{C}} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[u] : \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\dot{\underline{u}}|_{\ell=\text{cste}}] d\Omega$$

- ▶ PPV pour la vitesse $\dot{\underline{u}}|_{\ell=\text{cste}}$:

$$\frac{\partial W}{\partial \mathcal{C}} \dot{\mathcal{C}} = \mathcal{P}_e(\dot{\underline{u}}|_{\ell=\text{cste}}) \implies \dot{W}|_{\ell=\text{cste}} = \mathcal{P}_e|_{\ell=\text{cste}}$$

Expression de la puissance dissipée par fissuration :

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}_e - \dot{W} \implies \mathcal{D} = \mathcal{P}_e|_{\mathcal{C}=\text{cste}} - \dot{W}|_{\mathcal{C}=\text{cste}} \quad (\mathcal{D} \geq 0)$$

On peut calculer la puissance dissipée en supposant le chargement constant

Analyse de la puissance dissipée par propagation (fin)

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}_e|_{c=\text{cste}} - \dot{W}|_{c=\text{cste}} \quad (\mathcal{D} \geq 0)$$

- On remarque que :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e|_{c=\text{cste}} &= \int_{\partial\Omega} \underline{T}(\underline{x}) \cdot \underline{\dot{u}}|_{c=\text{cste}} \, da \\ &= \int_{S_T} \underline{T}^d(\underline{x}) \cdot \underline{\dot{u}}|_{c=\text{cste}} \, da \quad (\text{car } \underline{T} = \underline{0} \text{ sur } \mathcal{F} \text{ et } \underline{\dot{u}} = \underline{0} \text{ sur } S_u) \\ &= \frac{d}{dt} L(\underline{u})|_{c=\text{cste}} \end{aligned}$$

- Par conséquent :

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}_e|_{c=\text{cste}} - \dot{W}|_{c=\text{cste}} = \frac{d}{dt} (L(\underline{u}) - W(\underline{u}))|_{c=\text{cste}} \implies \mathcal{D} = -\frac{d}{dt} P(\underline{u})|_{c=\text{cste}}$$

- Enfin, puisque $P = P(c, \ell)$:

$$-\frac{d}{dt} P(\underline{u})|_{c=\text{cste}} = G\dot{\ell} \quad \text{avec} \quad G = -\frac{\partial P}{\partial \ell}$$

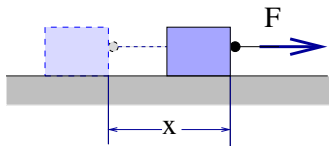
La puissance dissipée est $\mathcal{D} = G\dot{\ell}$ (G : taux de restitution de l'énergie)

Analyse de la dissipation

Avancée d'une fissure : $\mathcal{D} = G\dot{\ell}$

Puissance = Force \times vitesse.

Analogie avec le frottement : $\mathcal{D} = F\dot{x}$



G est la force thermodynamique qui cause l'avancée de la fissure.

Critère de propagation de la fissure : loi à seuil

Lois à seuil pour mécanisme irréversible quelconque :

- (a) tant que la force est inférieure au seuil, vitesse (du mécanisme irréversible) nulle ;
- (b) dès que la force atteint le seuil, vitesse non nulle (module indéterminé) et du signe de la force.

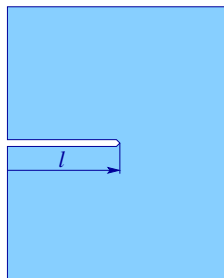
Loi à seuil pour décrire l'avancée de la fissure :

si $G < G_c$ alors $\dot{\ell} = 0$, si $G = G_c$ alors $\dot{\ell} \geq 0$.

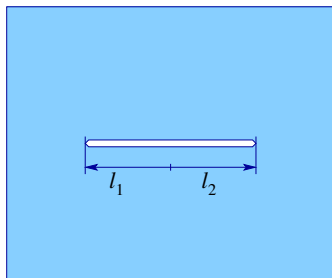
G_c : **énergie de rupture** (*a priori* de la structure mais en fait (on le verra) paramètre matériau). Même forme que la loi de Griffith, mais contenu thermodynamique très différent.

Fissure débouchante vs. fissure interne

Fissure débouchante :



Fissure interne :



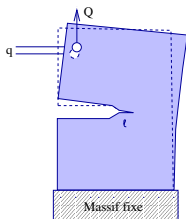
$$P = P(C, l)$$

$$\implies \mathcal{D} = -\frac{\partial P}{\partial l} \dot{l} = G \dot{l}$$

$$P = P(C, l_1, l_2)$$

$$\implies \mathcal{D} = -\frac{\partial P}{\partial l_1} \dot{l}_1 - \frac{\partial P}{\partial l_2} \dot{l}_2 = G_1 \dot{l}_1 + G_2 \dot{l}_2$$

Paramètres généralisés de chargement

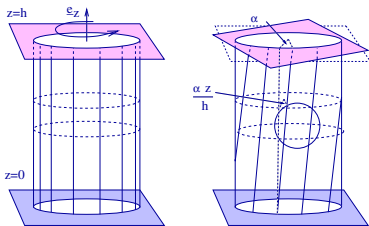


Cas fréquent : les efforts et les déplacements imposés dépendent d'un ou quelques paramètres \underline{Q} (efforts généralisés) ou \underline{q} (déplacements généralisés), tels que

$$\mathcal{P}_e = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}.$$

Paramètres généralisés de chargement (exemple 1)

Exemple 1 : Torsion d'un arbre cylindrique



Conditions aux limites :

$$\text{en } z = 0 \quad u_r = u_\theta = 0, \quad T_z = 0,$$

$$\text{en } z = h \quad u_r = 0, \quad u_\theta = \alpha r, \quad T_z = 0,$$

$$\text{en } r = R \quad \underline{T} = \underline{0}.$$

$$\underline{\dot{u}}|_{z=h} = \dot{\alpha}(\underline{e}_z \wedge r\underline{e}_r),$$

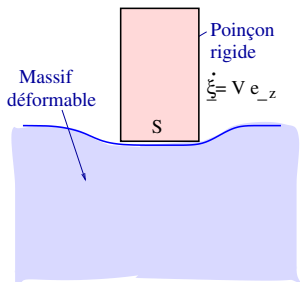
$$\mathcal{P}_e = \int_{z=h} \underline{T} \cdot \underline{\dot{u}} \, da = \dot{\alpha} \int_{z=h} \underline{T} \cdot (\underline{e}_z \wedge r\underline{e}_r) \, da = \dot{\alpha} \int_{z=h} (\underline{x} \wedge \underline{T}) \cdot \underline{e}_z \, da$$

$$\mathcal{P}_e = Q\dot{q}, \quad Q = \int (\underline{x} \wedge \underline{T}) \cdot \underline{e}_z \, da, \quad q = \alpha$$

(angle, couple)

Paramètres généralisés de chargement (exemple 2)

Exemple 2 : poinçonnement



Poinçon rigide se déplaçant verticalement

$$\Rightarrow \underline{\dot{u}}|_S = V \underline{e}_z,$$

$$\mathcal{P}_e = \int_S \underline{T} \cdot \underline{\dot{u}} \, da = V \int_S \underline{T} \cdot \underline{e}_z \, da.$$

$$\Rightarrow \dot{q} = V, \quad \underline{Q} = \int_S \underline{T} \cdot \underline{e}_z \, da.$$

L'essai peut être contrôlé **en force** (Q imposée),
ou **en déplacement** (q imposé)

Paramètres généralisés de chargement (définition générale)

Plus généralement, un chargement est défini par un nombre fini de paramètres de chargement s'il existe deux applications linéaires :

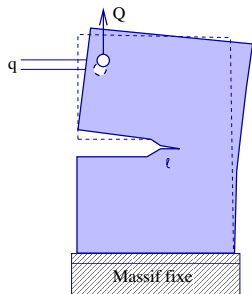
$$\underline{\underline{\sigma}}^* \rightarrow \underline{Q}(\underline{\underline{\sigma}}^*) \in \mathbb{R}^N, \quad \underline{v}^* \rightarrow \underline{\dot{q}}(\underline{v}^*) \in \mathbb{R}^N,$$

telles que :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*) \, d\Omega = \underline{Q}(\underline{\underline{\sigma}}^*) \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}^*),$$

$$\forall \underline{v}^* \in \mathbb{C}(S_u, \underline{\dot{u}}^d), \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{S}(S_T, \underline{T}^d) = \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^*, \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{0} \text{ dans } \Omega, \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \text{ sur } S_T \right\}$$

Paramètres généralisés de chargement : application aux corps fissurés



- **A fissure fixe : linéarité des équations de l'élasticité** : $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ fonctions linéaires de \underline{q} (ou de façon équivalente de \underline{Q}). Supposons q connue :

⇒ \underline{Q} = fonction linéaire de $\underline{\sigma}$ = fonction linéaire de \underline{q}

⇒ $\underline{Q} = \underline{R} \cdot \underline{q}$, ou inversement $\underline{q} = \underline{S} \cdot \underline{Q}$.
- Le mode de chargement étant fixé (permet de définir Q et q), **la raideur structurale \underline{R}** ou inversement **la souplesse structurale \underline{S}** sont des fonctions de la géométrie du corps (et des modules d'élasticité) :

$$\underline{R}(\ell), \quad \underline{S}(\ell).$$

- La raideur structurale $\underline{R}(\ell)$ décroît avec ℓ ,
La souplesse structurale $\underline{S}(\ell)$ croît avec ℓ :

$$\frac{d}{d\ell} \underline{R}(\ell) \leq 0, \quad \frac{d}{d\ell} \underline{S}(\ell) \geq 0$$

Application à la mesure de G_c

- ▶ Energie de déformation du corps :

$$W(\ell) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(\ell)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\partial_0\Omega} \underline{T} \cdot \underline{u} \, da \quad \text{car} \quad \underline{T} = 0 \text{ sur } \mathcal{F}.$$

- ▶ Potentiel des efforts donnés et énergie potentielle totale :

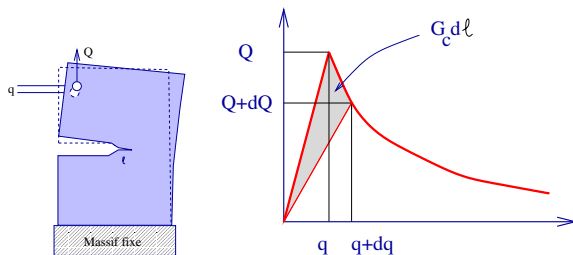
$$L = \int_{\partial_T\Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{u} \, da, \quad P = W - L = \frac{1}{2} \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{u}^d \, da - \frac{1}{2} \int_{S_T} \underline{T}^d \cdot \underline{u} \, da.$$

- ▶ Taux de restitution de l'énergie :

$$\begin{aligned} G &= -\frac{\partial P}{\partial \ell}(\ell, C) = \frac{1}{2} \int_{S_T} \underline{T}^d \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \ell} \, da - \frac{1}{2} \int_{S_u} \frac{\partial \underline{T}}{\partial \ell} \cdot \underline{u}^d \, da, \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial_0\Omega} \left(\underline{T} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \ell} - \frac{\partial \underline{T}}{\partial \ell} \cdot \underline{u} \right) \, da \end{aligned}$$

$$G = \frac{1}{2} \left(Q \frac{\partial q}{\partial \ell} - \frac{\partial Q}{\partial \ell} q \right).$$

Interprétation géométrique

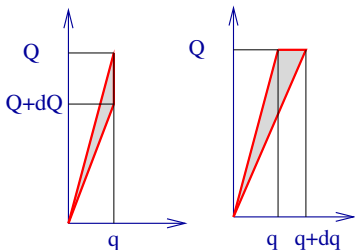


Aire hachurée :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} q + dq \\ Q + dQ \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} q \\ Q \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (Qdq - qdQ) = Gdl.$$

Moyen de mesure de G_c par mesure de Q , q et l .



Autres relations utiles :

$$Q(\ell) = R(\ell)q(\ell) \implies G = -\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \ell}(\ell) q^2(\ell).$$

$$q(\ell) = S(\ell)Q(\ell) \implies G = \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \ell}(\ell) Q^2(\ell).$$

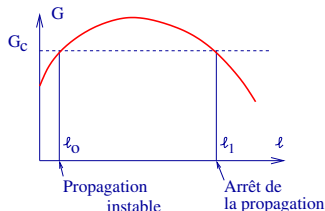
G ne dépend que de $Q(\ell)$ ou $q(\ell)$ et non de leurs dérivées par rapport à l .

Stabilité de la propagation

Fissure de longueur ℓ . On augmente le chargement. Lorsque $G(\ell) = G_c$: début de la propagation. **Que se passe-t-il aux instants suivants ?**

- ▶ Dépend de la position de $G(\ell + d\ell)$ par rapport à G_c .
- ▶ Si G est une fonction **décroissante** de ℓ , $G(\ell + d\ell) < G_c$: **arrêt de la fissure.**
- ▶ Si G est une fonction **croissante** de ℓ , $G(\ell + d\ell) = G_c$: **poursuite de la propagation.**

$\frac{dG}{d\ell}(\ell) > 0$	propagation instable,
$\frac{dG}{d\ell}(\ell) < 0$	propagation stable.



- ▶ La valeur de $G(\ell)$ ne dépend pas du mode de chargement.
- ▶ **Par contre $dG/d\ell(\ell)$ dépend du mode de chargement.**

Pourquoi un réservoir rempli de gaz est-il plus dangereux qu'un réservoir rempli d'eau ?

Plan

1. Energie potentielle d'une structure élastique fissurée
2. Analyse énergétique de Griffith.
3. Analyse thermodynamique simplifiée
4. Taux de restitution de l'énergie et singularités de contrainte
5. Exemple : test de pelage (arrachement d'un ruban adhésif)

Taux de restitution de l'énergie et singularités de contrainte

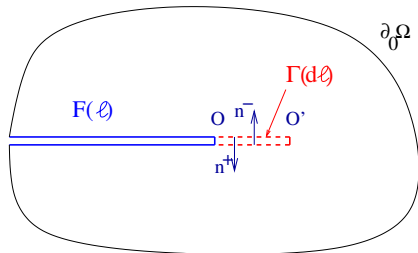
Formule d'Irwin (1957) : dans un solide élastique, linéaire, homogène isotrope, contenant une fissure plane se propageant en ligne droite, on a :

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) && \text{déformation plane} \\
 &= \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) && \text{contrainte plane} \\
 &= \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 && \text{déformation antiplane}
 \end{aligned}$$

- ▶ **Réconciliation entre les deux approches**, locale (singularités de contrainte) et globale (taux de restitution de l'énergie). Rend plus légitime le point de vue local.
- ▶ Validité mathématique en mode quelconque. Validité des hypothèses (fissure rectiligne se propageant en ligne droite) surtout en mode I.
- ▶ L'énergie de rupture G_c et la ténacité K_{Ic} sont reliées par :

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{EG_c}{1 - \nu^2}}$$

Démonstration de la formule d'Irwin



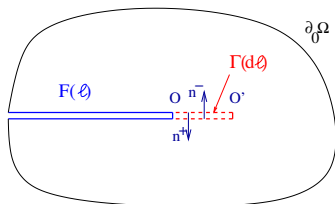
- **1ère étape** : Montrer que G est la moitié du travail des forces de fermeture dans le mouvement d'ouverture de la fissure

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} \underline{T}(\ell) \cdot \llbracket \underline{u} \rrbracket (\ell + d\ell) da.$$

(théorème de réciprocité de Maxwell-Betti)

- **2ème étape** : Calculer ce travail (formules asymptotiques des champs au voisinage d'une pointe de fissure, amphi 2).

Démonstration de la formule d'Irwin



- **1ère étape** : Montrer que $G = 1/2$ travail des forces de fermeture dans le mouvement d'ouverture de la fissure

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} \underline{T}(\ell) \cdot \llbracket \underline{u} \rrbracket (\ell + d\ell) da.$$

- **2ème étape** : Calculer ce travail.

$$G = \frac{1}{2} \int_{\partial_0 \Omega} \left(\underline{T} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \ell} - \frac{\partial \underline{T}}{\partial \ell} \cdot \underline{u} \right) da$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial_0 \Omega} \left[\underline{T}(\ell) \cdot \frac{\underline{u}(\ell + d\ell) - \underline{u}(\ell)}{d\ell} - \frac{\underline{T}(\ell + d\ell) - \underline{T}(\ell)}{d\ell} \cdot \underline{u}(\ell) \right] da$$

$$G d\ell = \frac{1}{2} \int_{\partial_0 \Omega} (\underline{T}(\ell) \cdot \underline{u}(\ell + d\ell) - \underline{T}(\ell + d\ell) \cdot \underline{u}(\ell)) da$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial_0 \Omega} (\underline{T}^1 \cdot \underline{u}^2 - \underline{T}^2 \cdot \underline{u}^1) da \text{ avec } (\underline{u}^1, \underline{\sigma}^1) = (\underline{u}, \underline{\sigma})(\ell), (\underline{u}^2, \underline{\sigma}^2) = (\underline{u}, \underline{\sigma})(\ell + d\ell)$$

Démonstration de la formule d'Irwin (suite)

Rappel : théorème de Maxwell-Betti (symétries du comportement élastique) :

$$\int_{\Omega(\ell+d\ell)} \underline{\underline{\varepsilon}}^1 : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 d\Omega = \int_{\Omega(\ell+d\ell)} \underline{\underline{\sigma}}^1 : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 d\Omega = \int_{\Omega(\ell+d\ell)} \underline{\underline{\varepsilon}}^1 : \underline{\underline{\sigma}}^2 d\Omega.$$

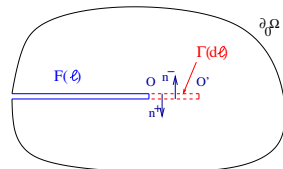
Bord de $\Omega(\ell + d\ell) = \partial_0\Omega \cup \mathcal{F}(\ell) \cup \Gamma(d\ell)$. Donc :

$$\int_{\Omega(\ell+d\ell)} \underline{\underline{\sigma}}^2 : \underline{\underline{\varepsilon}}^1 d\Omega = \int_{\partial_0\Omega} \underline{\underline{T}}^2 : \underline{\underline{u}}^1 da.$$

car $\underline{\underline{T}}^2 = \underline{\underline{0}}$ sur $\mathcal{F}(\ell) \cup \Gamma(d\ell)$.

$$\int_{\Omega(\ell+d\ell)} \underline{\underline{\sigma}}^1 : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 d\Omega = \int_{\partial_0\Omega} \underline{\underline{T}}^1 \cdot \underline{\underline{u}}^2 da + \int_{\Gamma} \underline{\underline{T}}^1 \cdot \underline{\underline{u}}^2 da,$$

car $\underline{\underline{T}}^1 = \underline{\underline{0}}$ sur $\mathcal{F}(\ell)$ uniquement.



Or (Maxwell-Betti)

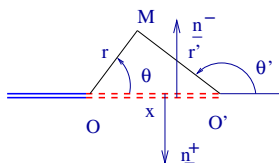
$$\int_{\Omega(\ell+d\ell)} \underline{\underline{\sigma}}^1 : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 d\Omega = \int_{\Omega(\ell+d\ell)} \underline{\underline{\sigma}}^2 : \underline{\underline{\varepsilon}}^1 d\Omega,$$

donc

$$\boxed{Gd\ell} = \frac{1}{2} \int_{\partial_0\Omega} (\underline{\underline{T}}^1 \cdot \underline{\underline{u}}^2 - \underline{\underline{T}}^2 \cdot \underline{\underline{u}}^1) da = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \underline{\underline{T}}^1 \cdot \underline{\underline{u}}^2 da = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \underline{\underline{T}}(\ell) \cdot \underline{\underline{u}}(\ell + d\ell) da.$$

Démonstration de la formule d'Irwin (fin)

Calcul de l'intégrale



$$\begin{aligned} \Gamma^+ : \underline{T}^1 &= \underline{\underline{\sigma}}^1 \cdot \underline{n}^+ \\ &= -\sigma_{\theta r}^1 \underline{e}_r - \sigma_{\theta\theta}^1 \underline{e}_\theta - \sigma_{\theta z}^1 \underline{e}_z \quad (r = x, \theta = 0), \\ \underline{u}^2 &= u_{r'}^2 \underline{e}_{r'} + u_{\theta'}^2 \underline{e}_{\theta'} + u_z^2 \underline{e}_z \quad (r' = dl - x, \theta' = \pi), \\ \Gamma^+ : \underline{T}^1 &= \underline{\underline{\sigma}}^1 \cdot \underline{n}^- \\ &= \sigma_{\theta r}^1 \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}^1 \underline{e}_\theta + \sigma_{\theta z}^1 \underline{e}_z \quad (r = x, \theta = 0), \\ \underline{u}^2 &= u_{r'}^2 \underline{e}_{r'} + u_{\theta'}^2 \underline{e}_{\theta'} + u_z^2 \underline{e}_z \quad (r' = dl - x, \theta' = -\pi). \end{aligned}$$

$$- \int_{\Gamma} \underline{T}^1 \cdot \underline{u}^2 \, da = \int_0^{dl} \left[\sigma_{\theta r}^1(x, 0) \llbracket u_{r'}^2 \rrbracket (dl - x) + \sigma_{\theta\theta}^1(x, 0) \llbracket u_{\theta'}^2 \rrbracket (dl - x) + \sigma_{\theta z}^1(x, 0) \llbracket u_z^2 \rrbracket (dl - x) \right] dx.$$

Expressions asymptotiques (amphi 2) :

$$\Rightarrow \sigma_{ij}(x, 0) \sim \frac{K}{\sqrt{x}} F_{ij}(0) + O(1), \quad \llbracket u_{i'} \rrbracket (dl - x) \sim K \sqrt{x} C_{i'} + O(dl - x)$$

$$\Rightarrow \int_0^{dl} \sigma_{ij}(x, 0) \llbracket u_{i'} \rrbracket (dl - x) \, dx \sim F_{ij}(0) C_{i'} K^2 \int_0^{dl} \sqrt{\frac{dl - x}{x}} \, dx + o(dl)$$

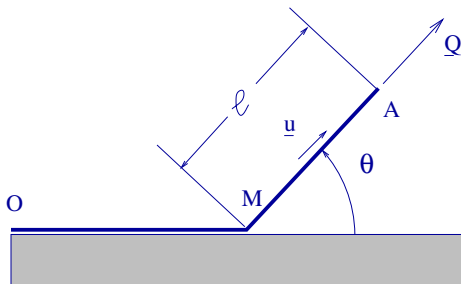
\Rightarrow **formule d'Irwin en évaluant toutes ces contributions.**

Plan

1. Energie potentielle d'une structure élastique fissurée
2. Analyse énergétique de Griffith.
3. Analyse thermodynamique simplifiée
4. Taux de restitution de l'énergie et singularités de contrainte
5. Exemple : test de pelage (arrachement d'un ruban adhésif)

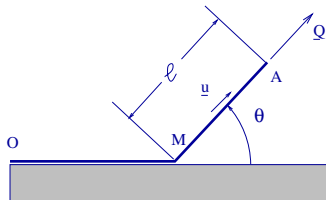
Test de pelage (arrachement d'un ruban adhésif)

Objectif : Etablir la relation entre l'énergie de rupture d'un adhésif et la force nécessaire à l'arrachement d'un ruban collé sur un substrat avec l'adhésif en question.



Test couramment utilisé pour mesurer l'énergie de rupture G_c de l'adhésif.

Test de pelage : mise en équations



- ▶ OM collé au substrat :

$$\varepsilon = 0, \quad w = 0 \quad \text{dans } OM.$$

- ▶ MA se déforme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{u} \otimes \underline{u}, \quad \sigma = \frac{Q}{e}, \quad (e \text{ épaisseur du ruban}).$$

- ▶ Energie de déformation du ruban :

$$W = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} \, d\Omega = \int_A^M \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \, d\Omega = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} e \ell = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{eE} \ell.$$

- ▶ Potentiel des efforts extérieurs (ℓ_0 : longueur totale du ruban) :

$$L = \underline{Q} \cdot \underline{OA} = \underline{Q} \cdot \underline{OM} + \underline{Q} \cdot \underline{MA} = Q(\ell_0 - \ell) \cos \theta + Q\ell.$$

- ▶ Energie potentielle totale :

$$P(\ell) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{eE} \ell - Q [\ell_0 \cos \theta + \ell(1 - \cos \theta)].$$

Test de pelage : taux de restitution de l'énergie

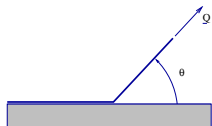
$$P(l) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{eE} l - Q [l_0 \cos \theta + l(1 - \cos \theta)].$$

- Taux de restitution de l'énergie :

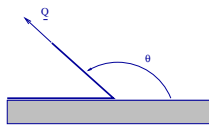
$$G = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{eE} + Q(1 - \cos \theta).$$

- Décollement lorsque :

$$G = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{eE} + Q(1 - \cos \theta) = G_c.$$



$$Q_c \simeq 3G_c$$



$$Q_c \simeq 0,6G_c$$

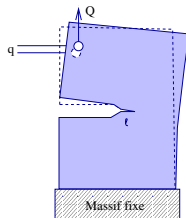
- Un ruban souple est plus difficile à décoller qu'un ruban raide.
- Ruban très raide : $E \rightarrow +\infty$.
Arrachement lorsque $Q = Q_c$ avec :

$$Q_c = \frac{G_c}{(1 - \cos \theta)}.$$

- Q_c fonction décroissante de θ .

Conclusions

- ▶ **Approche énergétique** introduit la notion d'irréversibilité et de dissipation.
- ▶ **Taux de restitution de l'énergie** = force thermodynamique associée à l'avancée de la fissure.



$$G = - \frac{\partial P}{\partial \ell}$$

- ▶ Avancée de la fissure régie par **une loi à seuil** portant sur cette force thermodynamique.
- ▶ **La formule d'Irwin donne une plus grande légitimité physique** à l'approche par singularité de contrainte.
- ▶ Il est possible de discuter **la stabilité** de l'avancée de la fissure (poly, PC3).