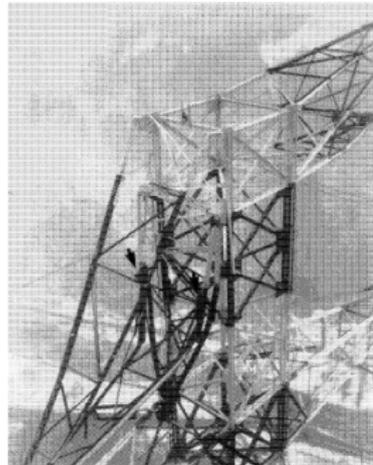
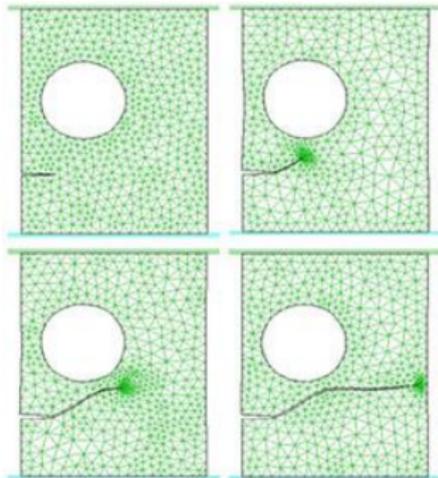


Rupture et plasticité



Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009-2010

Devoir (Mécanique de la rupture)

- ▶ Sujet distribué le **14/10** (mercredi prochain), copie à remettre (scola) le **13/11**, coefficient 40% ;
- ▶ Thème : rupture en conditions dynamiques ;
- ▶ Règles du jeu :
 - Autorisé : bibliographie (BCX, Internet...); discussion entre élèves ou avec enseignants des concepts et méthodes.
 - Non autorisé : échange de solutions détaillées

Rupture et plasticité : plan du cours

Comportements non linéaires des matériaux solides

Amphi 1

Rupture fragile

- ▶ Singularités de contrainte et ténacité des matériaux Amphi 2
- ▶ Analyse énergétique de la propagation d'une fissure I Amphi 3
- ▶ **Analyse énergétique de la propagation d'une fissure II.**
Fissuration par fatigue Amphi 4

Plasticité

- ▶ Comportement élasto-plastique Amphi 5
- ▶ Dissipation plastique Amphi 6
- ▶ Structures élasto-plastiques standards Amphi 7

Charges limites

Amphi 8

Principales conclusions de l'amphi 3

- ▶ **Approche énergétique** introduit la notion d'irréversibilité et de dissipation.
- ▶ **Taux de restitution de l'énergie** = force thermodynamique associée à l'avancée de la fissure.
- ▶ Avancée de la fissure régie par **une loi à seuil** portant sur cette force thermodynamique.
- ▶ **La formule d'Irwin donne une plus grande légitimité physique** à l'approche par singularité de contrainte.
- ▶ Il est possible de discuter **la stabilité** de l'avancée de la fissure (poly, PC3).

Analyse énergétique de la propagation d'une fissure II. Rupture par fatigue

1. Taux de restitution de l'énergie : intégrales invariantes

2. Problèmes tridimensionnels

3. Fissuration par fatigue

Plan

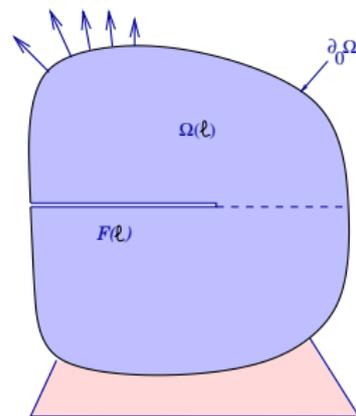
1. Taux de restitution de l'énergie : intégrales invariantes

2. Problèmes tridimensionnels

3. Fissuration par fatigue

Cadre de travail et objectif de cette partie

- ▶ Hypothèse des petites perturbations à chaque instant, dans la configuration actuelle $\Omega(\ell)$.
- ▶ Evolution quasi-statique : accélération négligée.
- ▶ Matériau élastique linéaire (homogène isotrope).
- ▶ Fissure libre de contraintes.
- ▶ **Pour cette partie** : Problème plan, fissure rectiligne se propageant en ligne droite (longueur ℓ).



Objectif : exprimer le taux de restitution de l'énergie G sous forme d'intégrales (de contour ou de domaine) **indépendantes du contour**.

Approche adaptée (notamment) au calcul numérique de G par éléments finis

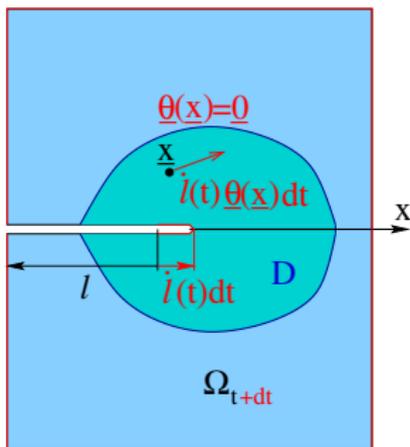
Taux de restitution de l'énergie

Rappel : énergie potentielle à l'équilibre (\underline{u} : solution)

$$\mathcal{D} = G\dot{l} = -\frac{\partial P}{\partial l}(l, C)\dot{l} = -\frac{dP}{dt}\Big|_{c=cste} \quad \text{avec} \quad P = \frac{1}{2} \int_{\Omega(l)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega - \int_{\partial_T \Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{u} \, da$$

Idee : évaluer G par calcul direct de la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\frac{dP}{dt}\Big|_{c=cste} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} (P(t+dt) - P(t))$$



Prolongement de l'avancée de fissure par une transformation de domaine :

$$\underline{x} \in \Omega(t) \implies \underline{x} + \dot{l}\underline{\theta}(\underline{x})dt \in \Omega(t+dt)$$

$\underline{\theta}$: « vitesse de transformation » **continue** telle que

$$\begin{aligned} \underline{\theta} &= \underline{0} && \text{à l'extérieur de } D, \\ \underline{\theta} &= \underline{e}_x && \text{en pointe de fissure.} \end{aligned}$$

Méthode : calculer dP/dt par dérivation particulière de P (cf. MEC 431).

Taux de restitution de l'énergie : expression sous forme d'intégrale de domaine

Résultat (admis, preuve dans poly) : la dérivée particulaire de l'énergie potentielle à l'équilibre P pour le champ de vitesse de transformation $\underline{\theta}$ est donnée par :

$$\frac{dP}{dt} = \dot{\ell} \int_{\Omega(t)} \text{tr} \underline{\nabla} \theta : \underline{\underline{E}} \, d\Omega \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{i}} - \text{tr} \underline{\underline{\nabla}} u \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

$\underline{\underline{E}}$ est appelé le **tenseur d'Eshelby**.

La puissance dissipée dans une vitesse d'avancée de fissure $\dot{\ell}$ est donc donnée par

$$\mathcal{D} = G \dot{\ell}, \quad G = - \int_{\Omega(t)} \text{tr} \underline{\underline{\nabla}} \theta : \underline{\underline{E}} \, d\Omega$$

- ▶ La démonstration de ce résultat repose sur la notion de dérivée particulaire de champs et d'intégrales (cf. Cinématique des milieux continus, cours P. le Tallec).
- ▶ Ici, la transformation de domaine est **fictive** : c'est un artifice pour décrire mathématiquement le changement de domaine associé à la propagation de fissure. En particulier, $\underline{\theta}(\underline{x})$ n'est **pas** la vitesse du point matériel situé en $\underline{\theta}(\underline{x})$ à l'instant t .

Taux de restitution de l'énergie : expression sous forme d'intégrale de domaine

$$\mathcal{D} = - \int_{\Omega(t)} \underline{\underline{\nabla}} \theta : \underline{\underline{E}} \, d\Omega$$

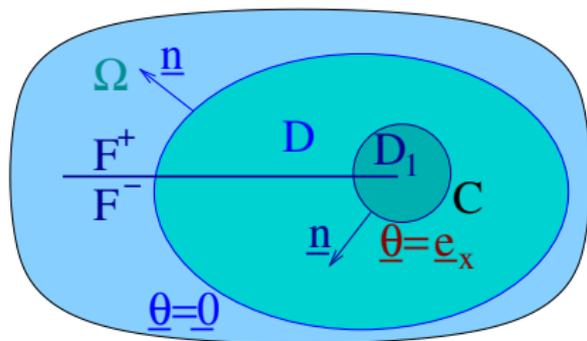
- ▶ On retrouve le fait que G ne dépend que de la solution sur la configuration actuelle $\Omega(t)$.
- ▶ Propriété remarquable du tenseur d'Eshelby (en l'absence de forces de volume) :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{hors de la pointe de fissure}$$

Démonstration : simple vérification à partir de la définition de $\underline{\underline{E}}$.

- ▶ Il reste à vérifier que l'expression ci-dessus de dP/dt est indépendante du choix de prolongement $\dot{\underline{\underline{\theta}}}$ de la vitesse d'avancée de fissure $\dot{\underline{\underline{e}}}_x$.

Taux de restitution de l'énergie : expression sous forme d'intégrale de contour



$\underline{\theta}$ choisi tel que

$$\begin{aligned} \underline{\theta} &= \underline{0} && \text{à l'extérieur de } D, \\ \underline{\theta} &= \underline{e}_x && \text{à l'intérieur de } D_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= - \int_{D_1} \underline{\nabla} \underline{\theta} : \underline{E} \, d\Omega - \int_{D-D_1} \underline{\nabla} \underline{\theta} : \underline{E} \, d\Omega \\ &= \underline{0} \text{ car } \underline{\nabla} \underline{\theta} = \underline{0} \end{aligned}$$

On note ensuite que : $\underline{\nabla} \underline{\theta} : \underline{E} = \text{div}(\underline{\theta} \cdot \underline{E}) - \underline{\theta} \cdot \text{div}(\underline{E})$

Par la formule de la divergence :

$$G = - \int_{D-D_1} \text{div}(\underline{\theta} \cdot \underline{E}) \, d\Omega = - \int_{\partial D} \underline{\theta} \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da + \int_{\partial D_1} \underline{\theta} \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da = \int_C \underline{e}_x \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da$$

$$G = J \quad \text{avec} \quad J = \int_C \underline{e}_x \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da = \int_C \left(\frac{1}{2} (\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}) n_x - \underline{u}_{,x} \cdot \underline{T}(n) \right) da$$

Récapitulation

- ▶ Tenseur d'Eshelby : $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{i}} - {}^T\underline{\underline{\nabla}}u.\underline{\underline{\sigma}}$
- ▶ **Forme intégrale de domaine :**

$$G = - \int_{\Omega(t)} {}^T\underline{\underline{\nabla}}\theta:\underline{\underline{E}} d\Omega$$

où $\underline{\underline{\theta}}(\underline{\underline{x}})$ est un prolongement de la vitesse **unitaire** d'avancée de fissure $\underline{\underline{e}}_x$

- ▶ **Forme intégrale de contour** (connue sous le nom d'**intégrale J** de Rice-Eshelby) :

$$G = J \quad \text{avec} \quad J = \int_C \underline{\underline{e}}_x \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{n}} da$$

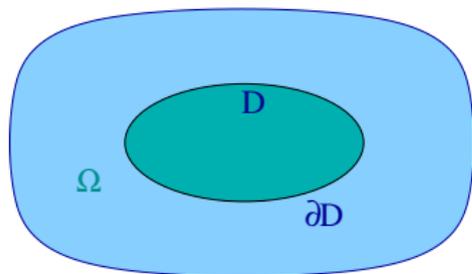
où C est un contour joignant F^+ à F^- tel que la pointe est intérieure au domaine délimité par C et F ($\underline{\underline{n}}$: normale extérieure à C , $\underline{\underline{e}}_x$: direction de la fissure).

Indépendance par rapport à $\underline{\underline{\theta}}$ de la forme intégrale de domaine ?
Indépendance par rapport à C de la forme intégrale de contour ?

Intégrale J : indicatrice de la présence d'une fissure

Pour un domaine de contrôle $D \subset \Omega$ de bord ∂D :

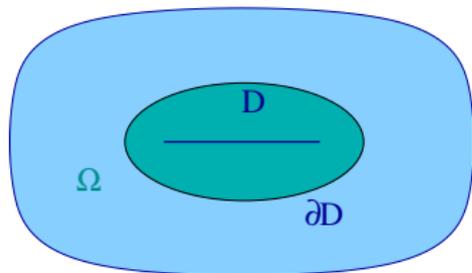
$$J = \int_{\partial D} \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{n} \, da$$



Solide élastique sans fissure :

$$J = \int_D \underline{e}_x \cdot \text{div} \underline{\underline{E}} \, d\Omega$$

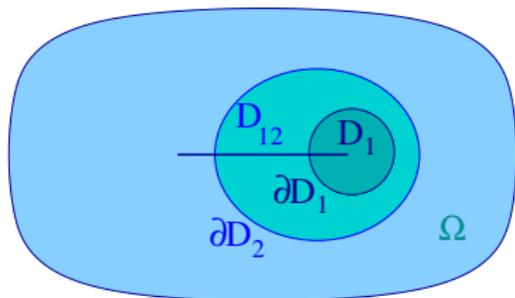
$$\Rightarrow J = 0$$



Solide élastique avec fissure :

$$J \neq 0$$

Indépendance de l'intégrale J par rapport au contour



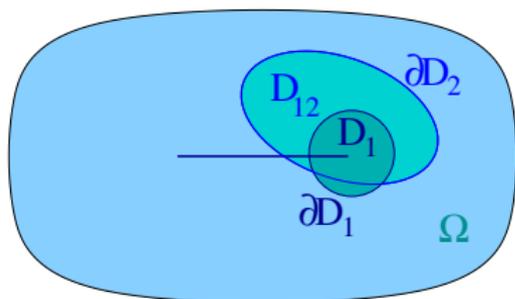
- Domaines de contrôle D_1, D_2 **emboîtés** :

$$D_2, \quad D_1 = D_1 \cup D_{12} \supset D_1$$

$$\begin{aligned} J(D_2) &= \int_{\partial D_2} \underline{e}_x \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da - \int_{\partial D_1} \underline{e}_x \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da \\ &\quad + \int_{\partial D_{12}} \underline{e}_x \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da \\ &= J(D_{12}) + J(D_1) \end{aligned}$$

De plus : $J(D_{12}) = 0$ (pas de pointe de fissure dans D_{12}) d'où

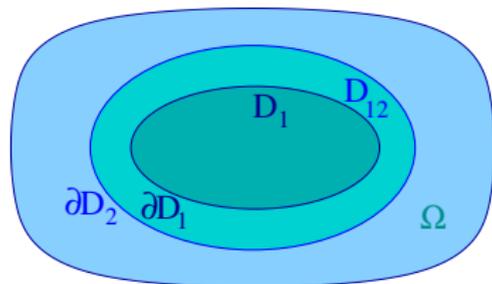
$$J(D_2) = J(D_1)$$



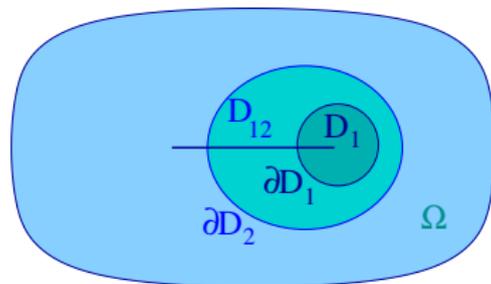
- Domaines de contrôle D_1, D_2 **non emboîtés** : l'argument précédent s'adapte, et on a encore

$$J(D_2) = J(D_1)$$

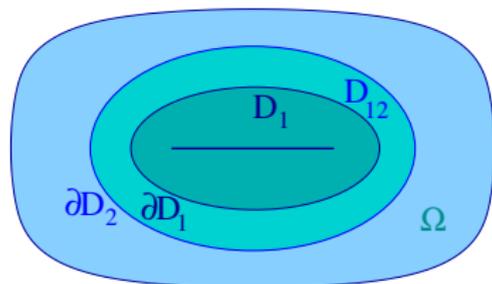
Indépendance de l'intégrale J par rapport au contour



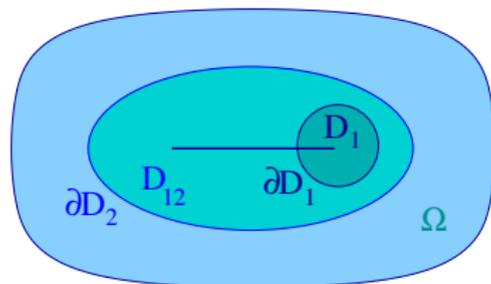
$$J(D_2) = J(D_1) = 0$$



$$J(D_2) = J(D_1) \neq 0$$



$$J(D_2) = J(D_1) \neq 0$$



$$J(D_2) \neq J(D_1)$$

Intégrale J et formule d'Irwin

- **Idee : évaluer J par passage à la limite sur le contour ∂D_ϵ d'un voisinage évanouissant D_ϵ de la pointe de fissure :**

$$J = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} \underline{e}_x \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da$$

- Dans $\underline{E} = \frac{1}{2} \underline{\nabla u} : \underline{\sigma} - {}^t \underline{\nabla u} \cdot \underline{\sigma}$, remplacer $\underline{\nabla u}$, $\underline{\sigma}$ par leurs expressions asymptotiques en pointe de fissure (amphi 2) :

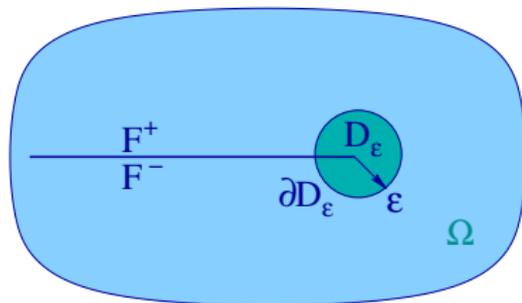
$$\underline{\nabla u} \sim \frac{K}{\sqrt{\rho}} \underline{F}_u(\theta), \quad \underline{\sigma} \sim \frac{K}{\sqrt{\rho}} \underline{F}_\sigma(\theta),$$

avec de plus $da = \epsilon d\theta$

puis évaluer la limite de l'intégrale quand $\epsilon \rightarrow 0$

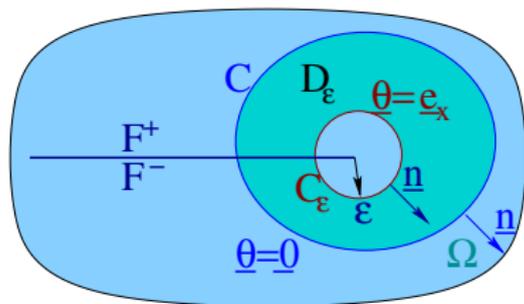
Tous calculs faits, on retrouve bien, comme attendu, la **formule d'Irwin** :

$$J = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 = G.$$



Formulation par intégrale de domaine : indépendance en θ

- ▶ Domaine de contrôle D_ϵ délimité par
 - C : contour fini C ,
 - C_ϵ : contour évanouissant C_ϵ ,
- ▶ $\underline{\theta}$: champ vectoriel **continu** tel que
 - $\underline{\theta} = \underline{0}$ à l'extérieur de C ,
 - $\underline{\theta} = \underline{e}_x$ à l'intérieur de C_ϵ .



$$G = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \underline{e}_x \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} da = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \underline{\theta} \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} da = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{D_\epsilon} {}^T \underline{\nabla} \theta : \underline{E} d\Omega = - \int_D \{ \dots \} d\Omega$$

Pour tout domaine de contrôle D contenant la pointe de fissure,
 Pour tout champ $\underline{\theta}$ continu, nul à l'extérieur de C , égal à \underline{e}_x en A ,

$$G\dot{l} = - \int_D {}^T \underline{\nabla} \theta : \underline{E} d\Omega$$

Expression en notation indicielle :

$$G = - \int_D \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j} \theta_{k,k} - \sigma_{ij} \theta_{i,k} u_{k,j} \right) d\Omega.$$

Extraction de K_I et K_{II}

- ▶ On note \underline{u}_I la solution singulière **connue** (amphi 2) telle que $K_I(\underline{u}_I) = 1$, $K_{II}(\underline{u}_I) = 0$
- ▶ Calcul de G par Irwin et par intégrale de domaine pour les états $\underline{u} + \underline{u}_I$ et $\underline{u} - \underline{u}_I$:

$$\frac{1 - \nu^2}{E} [(K_I(\underline{u}) + 1)^2 + K_{II}^2(\underline{u})] = - \int_D {}^T \underline{\nabla} \theta : \underline{\underline{E}}(\underline{u} + \underline{u}_I) \, d\Omega$$

$$\frac{1 - \nu^2}{E} [(K_I(\underline{u}) - 1)^2 + K_{II}^2(\underline{u})] = - \int_D {}^T \underline{\nabla} \theta : \underline{\underline{E}}(\underline{u} - \underline{u}_I) \, d\Omega$$

- ▶ Soustraction

Expression de $K_I(\underline{u})$ par **intégrale d'interaction** :

$$\frac{4(1 - \nu^2)}{E} K_I(\underline{u}) = - \int_D \left(\frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\nabla}} u_i) \operatorname{div} \underline{\theta} - \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) \cdot (\underline{\underline{\nabla}} u_i \cdot \underline{\underline{\nabla}} \theta) \right) \, d\Omega$$

On procède de même, avec \underline{u}_{II} la solution singulière connue (amphi 2) telle que $K_{II}(\underline{u}_I) = 0$, $K_I(\underline{u}_I) = 1$, pour extraire K_{II} .

Approche très bien adaptée au calcul de K_I et K_{II} par éléments finis.

Expressions du taux de restitution de l'énergie en 2D : récapitulation

- ▶ Tenseur d'Eshelby :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{i}} - {}^T \underline{\underline{\nabla}} u \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

- ▶ **Forme intégrale de domaine :**

$$G = - \int_{\Omega(t)} {}^T \underline{\underline{\nabla}} \theta : \underline{\underline{E}} \, d\Omega$$

où $\theta(\underline{x})$ est un prolongement continu **arbitraire** de la vitesse **unitaire** d'avancée de fissure \underline{e}_x

- ▶ **Forme intégrale de contour (intégrale J de Rice) :**

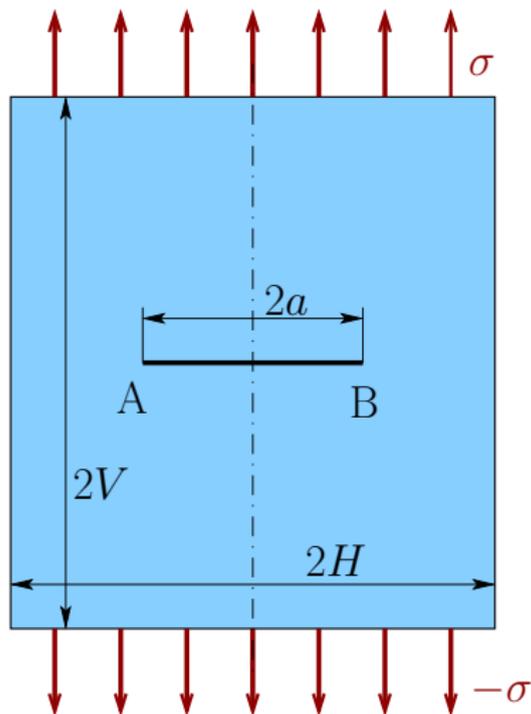
$$G = J \quad \text{avec} \quad J = \int_C \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{n} \, da$$

où C est un contour **arbitraire** joignant F^+ à F^- tel que la pointe est intérieure au domaine délimité par D et F (\underline{n} : normale extérieure à C).

- ▶ Extraction des modes individuels de rupture par **intégrale d'interaction**.

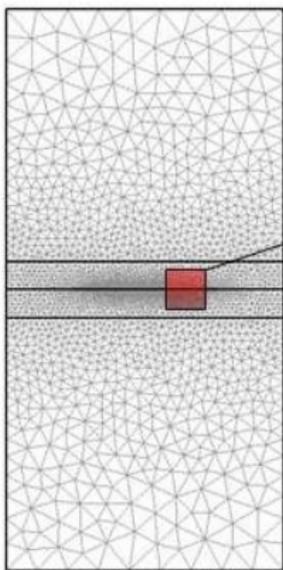
Expressions adaptées au **calcul numérique de G** et K_I, K_{II} (éléments finis,...)

Exemple 2D de calcul numérique : plaque rectangulaire avec fissure droite

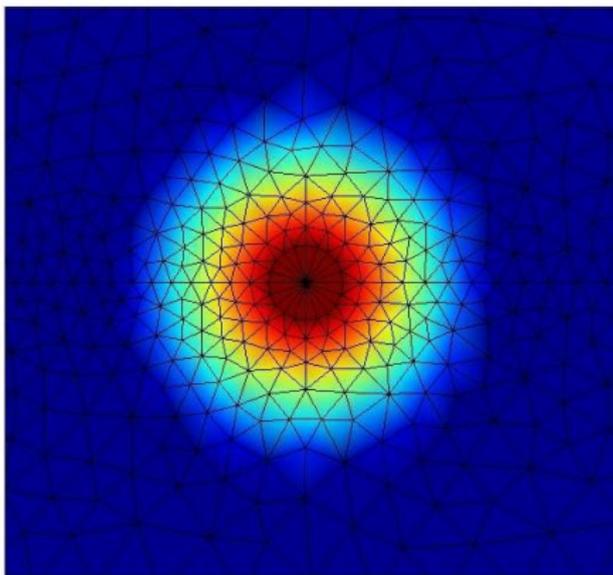


Solution exacte pour la plaque de hauteur infinie $V = \infty$:

$$G^{\text{ref}} = K_I^{\text{ref}} = \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma^2 \pi a \sec \frac{\pi a}{2H}$$



Maillage

Champ de vitesse de transformation
(Rouge : $\theta = 1$, bleu : $\theta = 0$)

$$\frac{G^{\text{num}}}{G^{\text{ref}}} - 1 \approx -0.015$$

Conclusions de cette partie

- ▶ Expressions sous forme d'intégrales (domaine, contour) du taux de restitution de l'énergie
 - Indépendantes du choix de domaine de contrôle ou de contour ;
 - Expressions en termes de la solution actuelle $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ uniquement (et non de ses dérivées par rapport à ℓ ;
 - Adaptées aux structures de géométrie complexe et au calcul numérique ;
 - À employer en association avec un critère de rupture.
- ▶ Formule d'Irwin : cas-limite de l'intégrale J pour un contour évanouissant ;
- ▶ Séparation des facteurs d'intensité des contraintes :
 - G combine les F.I.C.
 - Évaluation séparée de K_I, K_{II} par « intégrales d'interaction ».

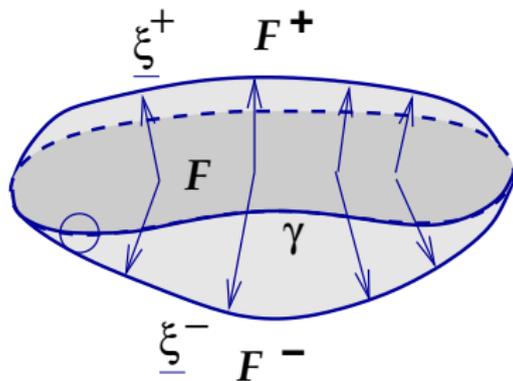
Plan

1. Taux de restitution de l'énergie : intégrales invariantes

2. Problèmes tridimensionnels

3. Fissuration par fatigue

Cadre de travail et objectif de cette partie



Fissure tridimensionnelle : coupure de forme quelconque décrite par une surface \mathcal{F} à bord γ (lèvres \mathcal{F}^+ et \mathcal{F}^-).

Hypothèses :

- ▶ Hypothèse des petites perturbations à chaque instant,
- ▶ Evolution quasi-statique : accélération négligée.
- ▶ Matériau élastique linéaire (homogène isotrope).
- ▶ **Fissure plane $\mathcal{F}(\gamma)$ de contour quelconque γ , libre de contrainte.**

Objectifs :

- (a) Préciser la notion de taux de restitution de l'énergie G pour une fissure tridimensionnelle ;
- (b) Exprimer G au moyen d'une intégrale de domaine.

Energie dissipée dans une propagation de fissure

Proportionnalité **locale** entre puissance dissipée et accroissement d'aire de fissure.

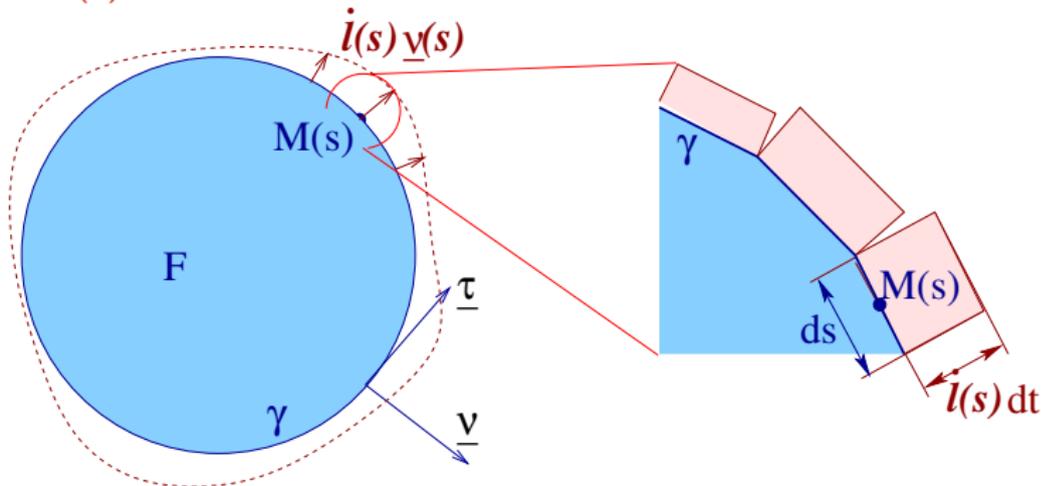
► Problèmes plans :

$$\mathcal{D} = G \dot{\ell};$$

► Problèmes tridimensionnels :

$$\mathcal{D} = \int_{\gamma} G(s) \dot{\ell}(s) ds.$$

Le **taux de restitution de l'énergie** est une **grandeur locale sur le front de fissure** : $G = G(s)$



Aire de fissure créée par une propagation **infinitésimale** :

$$dS = dt \int_{\gamma} \dot{\ell}(s) ds$$

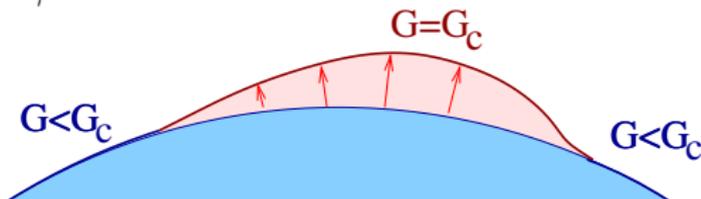
Critère énergétique de propagation de fissure

- Généralisation du critère « de Griffith » (amphi 3), reposant sur la notion d'énergie de rupture G_c caractéristique du matériau :

en tout point s de γ :

si	$G(s) < G_c$	alors	$\dot{l}(s) = 0$,
si	$G(s) = G_c$	alors	$\dot{l}(s) \geq 0$.

- Critère **local** sur le front : la valeur critique G_c n'est pas nécessairement atteinte partout sur γ



- Sous cette forme, le critère suppose que la fissure se propage **dans son plan** : applicable surtout au **mode I pur**.

Critère énergétique de propagation de fissure

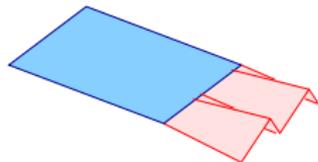
- ▶ La propagation plane en mode I pur est une situation rare.
- ▶ Généralement, la propagation de fissure se fait en mode mixte (combinaison des modes I, II et III) ;
- ▶ Une fissure, même initialement plane, ne le reste généralement pas :



Branchement



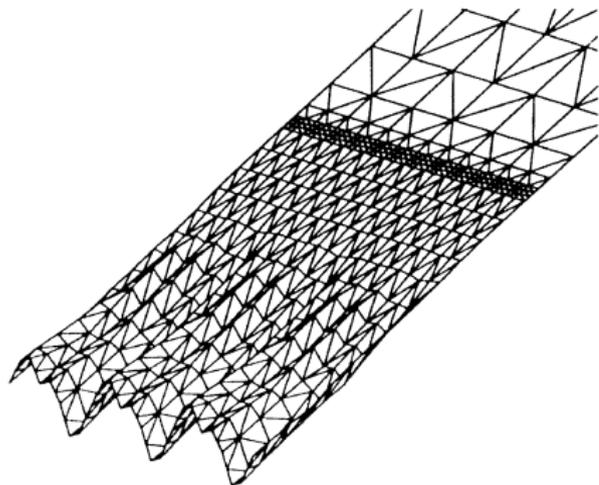
Courbure



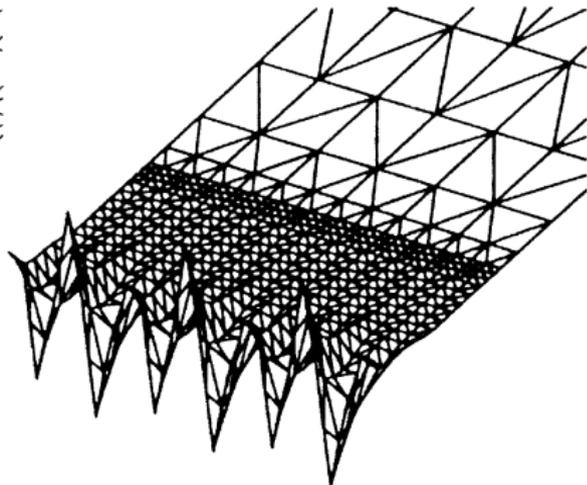
Déversement

- ▶ Critères de propagation combinant :
 - une loi à seuil (par exemple $G(s) \leq G_c$),
 - un critère complémentaire permettant la prédiction des branchements et courbures (par exemple imposer $K_{II}(s) = 0$)

Déversement : exemple de simulation en modes I + III



$$K_{III}/K_I = 0,2$$



$$K_{III}/K_I = 2$$

- ▶ Méthode numérique : éléments finis de frontière.
- ▶ Critères de propagation : $G \leq G_c$ et $K_{II} = 0$

© G. Xu, A.F. Bower, M. Ortiz, Brown Univ., USA (*Int. Journal of Solids and Structures*, 1994)

Calcul de G par dérivation particulière de l'énergie potentielle

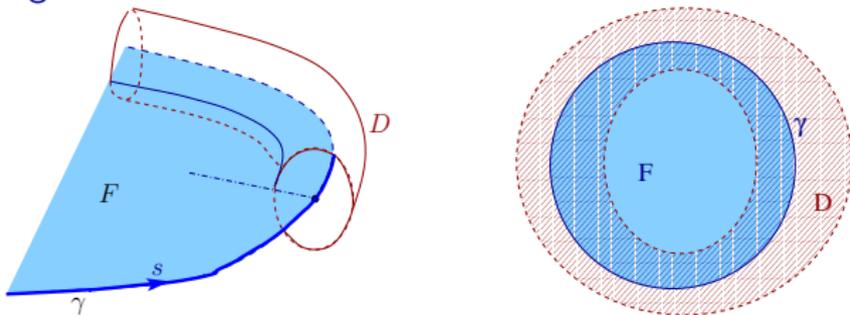
- ▶ Une analyse similaire à celle faite pour les problèmes plans (amphi 3) permet de montrer que

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}_e - \dot{W} = (\mathcal{P}_e - \dot{W})|_{c=\text{cste}} = -\frac{dP}{dt}|_{c=\text{cste}}$$

- ▶ Le calcul de dP/dt repose sur la construction d'un prolongement **continu** $\underline{\theta}$ de la vitesse d'avancée de fissure :

$$\underline{\theta}(\underline{x}) = \dot{\ell}(s)\underline{\nu}(s) \quad (\underline{x} \in \gamma), \quad \underline{\theta}(\underline{x}) = \underline{0} \quad (\underline{x} \in \partial D)$$

$D \subseteq \Omega$: région tubulaire contenant le front de fissure.



- ▶ Calcul et résultat essentiellement identiques à ceux pour le cas plan :

$$\frac{dP}{dt} = \int_D {}^T \underline{\nabla} \theta : \underline{\underline{E}} \, d\Omega \quad \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{i}} - {}^T \underline{\underline{\nabla}} u \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{tenseur d'Eshelby})$$

Calcul de G : la méthode $G - \theta$

Le taux de restitution local $G(s)$ vérifie, pour toute distribution de vitesse d'avancée de fissure $\dot{\ell}(s)\underline{\nu}(s)$ et tout prolongement continu $\underline{\theta}$ nul en-dehors d'un ouvert $D \subseteq \Omega$ contenant γ :

$$\int_{\gamma} G(s)\dot{\ell}(s) ds = - \int_D \mathbf{T} \underline{\nabla} \theta : \underline{\underline{E}} d\Omega \quad (G-\theta)$$

Cette relation constitue la base de la **méthode $G - \theta$** de calcul numérique de $G(s)$:

- Poser une approximation de $G(s)$ sous la forme

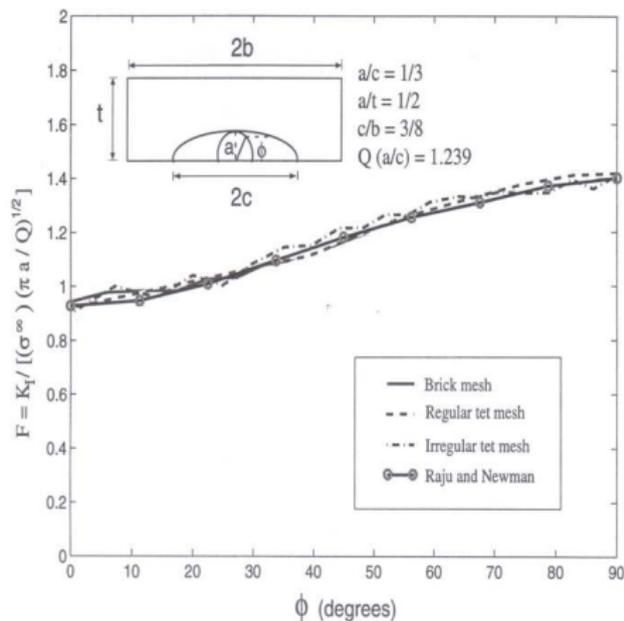
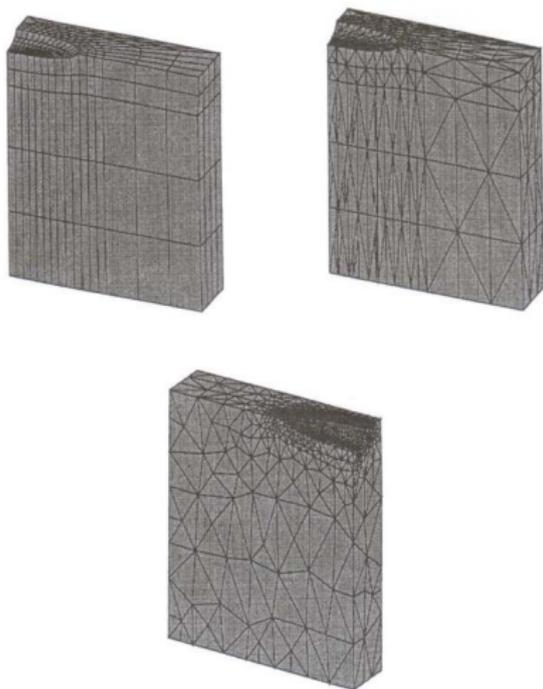
$$G(s) = \sum_{k=1}^n G_k \varphi_k(\underline{x}(s)), \quad \underline{x}(s) \in \gamma;$$

- Ecrire la relation $(G - \theta)$ tour à tour pour chaque choix $\underline{\theta}(\underline{x}) = \varphi_k(\underline{x})\underline{\nu}(s)$. Cela conduit à un système linéaire d'inconnue $\{G\} = \{G_1, \dots, G_n\}$:

$$[A]\{G\} = \{b\} \quad A_{ik} = \int_{\gamma} \varphi_i(\underline{x}(s))\varphi_k(\underline{x}(s)) ds, \quad b_i = - \int_D \mathbf{T} \underline{\nabla}(\varphi_i \underline{\nu}) : \underline{\underline{E}} d\Omega$$

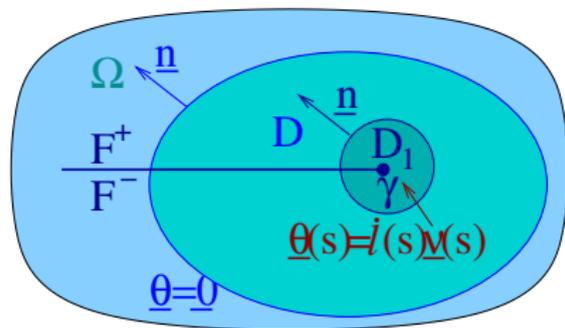
- La méthode $G - \theta$ est très bien adaptée à une mise en œuvre dans le cadre des **éléments finis**. Disponible dans des codes tels que **Cast3M** (CEA), **Code_Aster** (EDF), **ZeBuLoN** (Ecole des Mines / ONERA).

Exemple numérique 3D : fissure semi-elliptique débouchante



(Méthode $G - \theta$ en 3D, éléments finis)

Taux de restitution de l'énergie : formule d'Irwin en 3D



D_1, D : voisinages **tubulaires** du front γ .
 $\underline{\theta}$ choisi tel que

$$\underline{\theta} = \underline{0} \quad \text{à l'extérieur de } D,$$

$$\underline{\theta} = \underline{\dot{\ell}}(s) \underline{\nu}(s) \quad \text{à l'intérieur de } D_1.$$

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{\int_{D_1} {}^T \underline{\nabla} \underline{\theta} : \underline{E} \, d\Omega}_{\neq \underline{0} \text{ car } \underline{\nabla} \underline{\theta} \neq \underline{0}} + \int_{D-D_1} {}^T \underline{\nabla} \underline{\theta} : \underline{E} \, d\Omega$$

- ▶ En 3D, pas d'expression de G en termes d'intégrale de contour :

$$\frac{dP}{dt} = \int_{D_1} {}^T \underline{\nabla} \underline{\theta} : \underline{E} \, d\Omega - \int_{\partial D_1} \underline{\theta} \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, d\Omega$$

- ▶ Pour un voisinage tubulaire évanouissant de γ , on retrouve la formule d'Irwin :

$$G(s) = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2(s) + K_{II}^2(s)) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2(s)$$

(Preuve : insertion des champs singuliers en front de fissure et passage à la limite)

Conclusions de cette partie

- ▶ Singularités de contraintes analogues au cas 2D ;
- ▶ Caractère local (sur le front de fissure) de $G(s)$, $K_{I,II,III}(s)$, et du critère de propagation ;
- ▶ La méthode $G - \theta$: support du calcul (généralement numérique) de $G(s)$ dans des conditions très générales de géométrie et de chargement.
 - Implantée dans des codes éléments finis industriels.
- ▶ Extraction de K_I, K_{II}, K_{III} par extension au 3D de la notion d'intégrale d'interaction (admis).
- ▶ Pas d'expression de $G(s)$ sous forme d'intégrale de contour dans le cas tridimensionnel ;
- ▶ Complexités de la propagation de fissure et de son analyse dans les cas tridimensionnels ;

Plan

1. Taux de restitution de l'énergie : intégrales invariantes

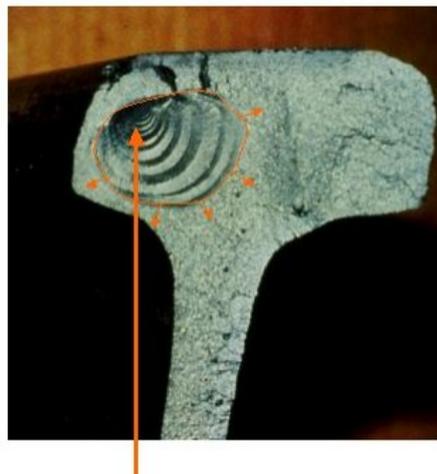
2. Problèmes tridimensionnels

3. Fissuration par fatigue

Matériaux et structures : dommages créés par chargements répétés

- ▶ Jusqu'ici : rupture critique (l'état mécanique atteint un seuil, ex. $G = G_c$) seule considérée.
- ▶ La rupture peut également se produire par l'effet de chargements sous-critiques répétés : **fatigue** des matériaux et des structures.
- ▶ Fatigue à faible nombre n de cycle (dite **fatigue oligocyclique**) :
 - Plasticité importante,
 - fissuration
- ▶ Fatigue à grand nombre n de cycles ($n = O(10^5) - O(10^6)$) :
 - Peu de plasticité;
 - Deux phases : amorçage puis propagation de fissure ;
 - Proportion des deux phénomènes dans la durée de vie totale : varie selon matériau, chargement, température, environnement...

Exemple : fatigue des rails



- (a) amorçage sur un défaut dans zone de contraintes maximales
- (b) propagation par fatigue à chaque passage de roue

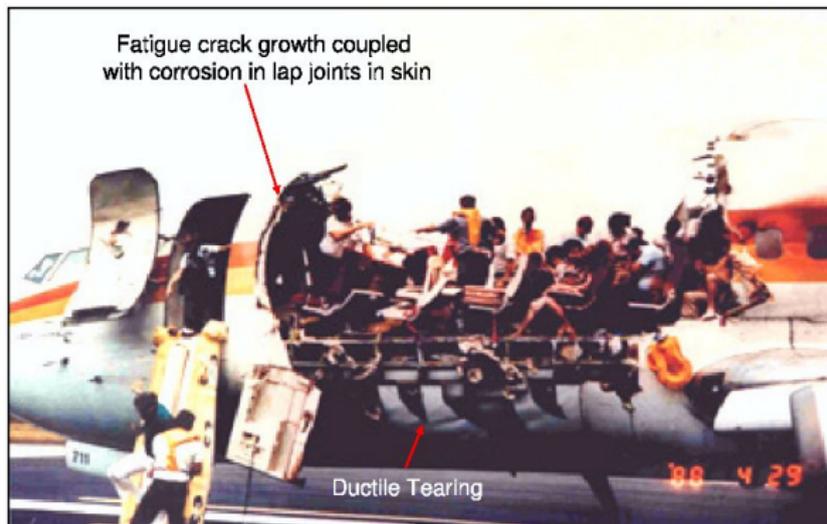
Cadre

- ▶ Chargement à un paramètre $Q(t)$;
- ▶ Problèmes plans
- ▶ Elasticité linéaire H.P.P. (donc champs singuliers en pointe de fissure)
- ▶ Un seul mode de rupture (typiquement mode I d'ouverture)
- ▶ Propagation droite de fissure décrite par $\ell(t)$
- ▶ Facteur d'intensité de contrainte de la forme

$$K_I(t) = Q(t)K(\ell(t))$$

($K(\ell)$) : F.I.C. pour chargement unitaire et fissure de longueur ℓ)

Exemple : Boeing 737 Aloha Airlines

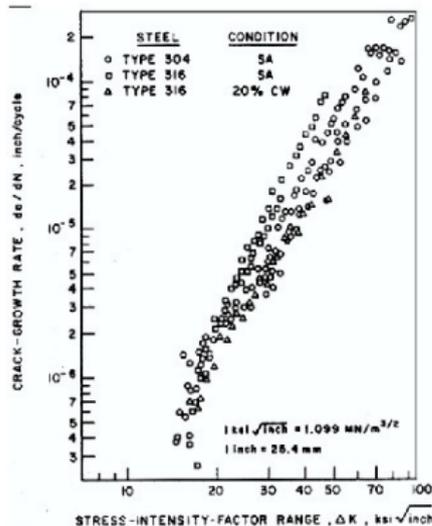


- ▶ Maintenance déterminée en fonction du nombre d'heures de vol ;
- ▶ Durée typique des vols pour cet appareil : 7h ;
- ▶ Mais sur cette ligne (desserte locale îles Hawaii) : durée de vol 36 mn ;
- ▶ Un cycle = une mission (pressurisation/dépressurisation, décollage/atterrissage) ;
- ▶ **Nombre n de cycles multiplié par ≈ 11**

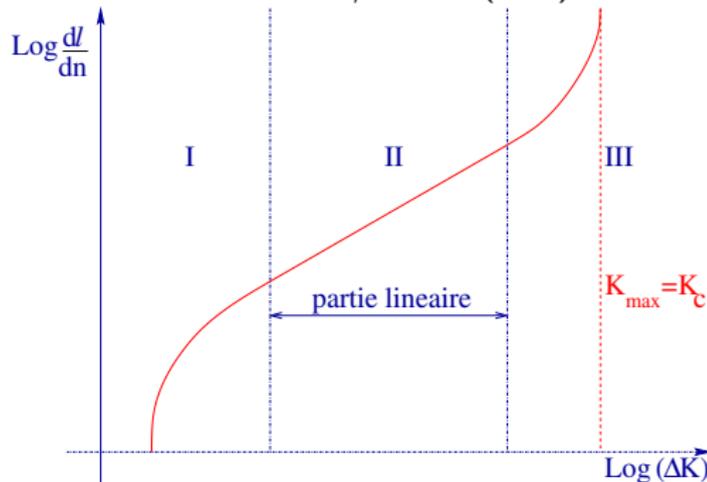
Croissance de fissures par fatigue dans les métaux

- ▶ On observe une corrélation forte entre dl/dn et $\Delta Q = Q_{\max} - Q_{\min}$.
- ▶ Proportionnalité entre Q et K , donc entre ΔQ et ΔK , à l fixé (amphi 2)

Expérience (acier)



Modèle : $dl/dn = f(\Delta K)$



- ▶ Phase I : amorçage
- ▶ Phase II : phase de propagation par fatigue
- ▶ Phase III : phase de propagation brutale

Lois de fatigue

Première loi : « loi de Paris » (Paris et Erdogan, 1963) :

$$\frac{d\ell}{dn} = C[\Delta K(\ell)]^m$$

- ▶ n : nombre de cycles (joue le rôle du temps) ;
- ▶ $\ell = \ell(n)$: longueur de fissure ;
- ▶ C, m : paramètres matériau (et facteurs externes), à déterminer expérimentalement.

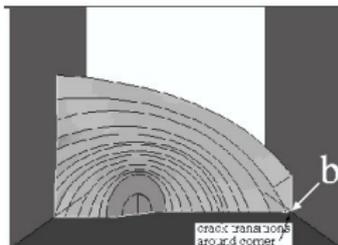
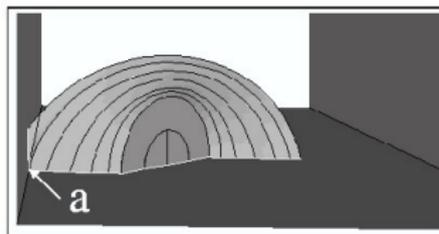
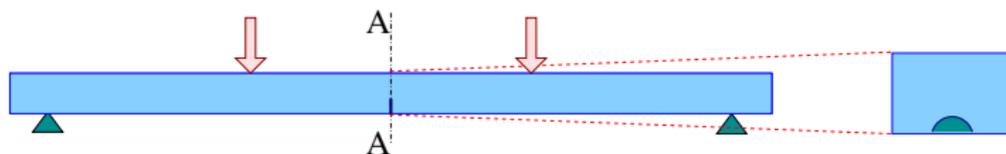
Généralisations : autres lois de forme générale

$$\frac{d\ell}{dn} = f\left(\Delta K(\ell), \frac{K_{\max}(\ell)}{K_{\min}(\ell)}, K_{Ic}, \dots\right)$$

Evaluation de la durée de vie : repose sur

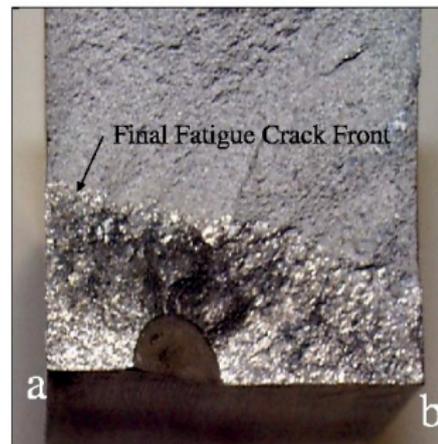
- ▶ La connaissance du chargement cyclique (amplitude ΔQ , rapport de charge Q_{\max}/Q_{\min}) ;
- ▶ La capacité de calculer $\Delta K(\ell)$ pour toute longueur ℓ donnée ;
- ▶ La connaissance de la loi de fatigue (et notamment des paramètres matériau tels que C, m).

Exemple : fissuration d'une poutre en flexion cyclique

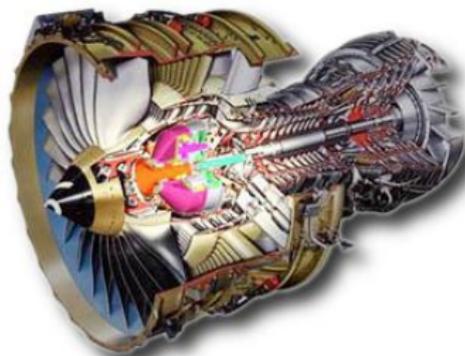


Poutre de section
rectangulaire, pré-fissurée
(fissure initiale semi-elliptique)
©Univ. Cornell (USA), 2002.

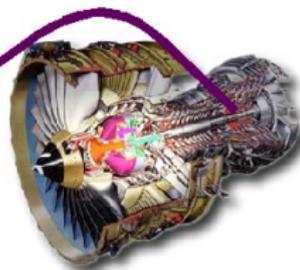
Event	Observed	FRANC3D	% Difference
a-Corner (cycles)	106,800	140,000	32
b-Corner (cycles)	171,000	170,000	-0.5
Last Front (cycles)	175,000	190,000	8.5
a_1 (in.)	1.26	1.42	12.7
a_c (in.)	1.38	1.34	-2.8



Exemple : simuler la fissuration par fatigue de disques de turbine

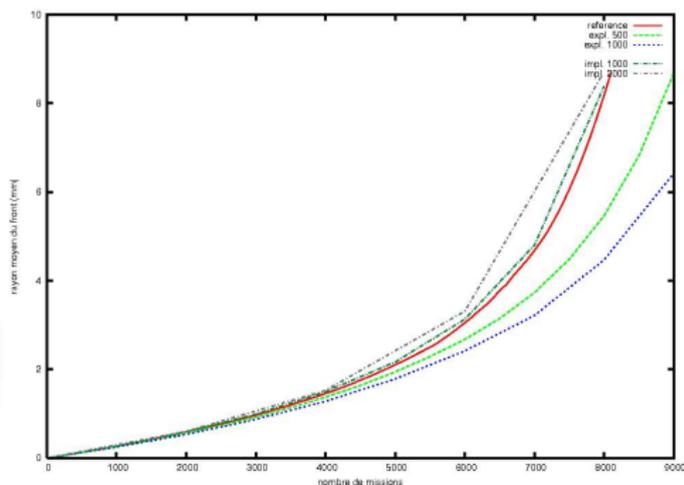
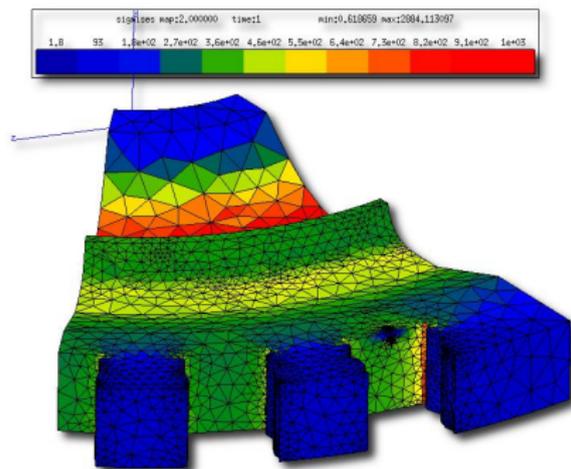


Projet de recherche coordonné (PRC) SNECMA Moteurs, ONERA, Centrale Nantes, ENS Cachan, X (LMS)...



Objectif : éviter l'éclatement des disques de turbine

Exemple : simuler la fissuration par fatigue de disques de turbine



Propagation de fissure plane (quart de cercle de rayon 2mm) sur une portion (1/16ème) de disque de turbine HP. Chargement lié à une rotation à vitesse constante de 15 000 tr/min. Propagation plane suivant une loi de Paris locale. Evolution du rayon moyen de la fissure en fonction de nombre de missions.

- ▶ Propagation 3D, fatigue (loi type Paris de la forme $d\ell(s)/dn = f(\Delta G(s))$)
- ▶ Calcul par approche énergétique de type $G - \theta$;
- ▶ Etude (LMS) sur séparation K_I, K_{II}, K_{III} par intégrale d'interaction 3D.

©V. Chiaruttini, F. Feyel (ONERA). Code **ZeBuLon**.

Conclusions de l'amphi 4

- ▶ Outils pour le calcul effectif du taux de restitution d'énergie :
 - L'invariant intégral de contour J (problèmes plans) ;
 - La formulation intégrale de domaine (méthode $G - \theta$, problèmes plans ou tridimensionnels)
- ▶ Complexités de la propagation et de son analyse dans les cas tridimensionnels ;
- ▶ Notion de propagation sous-critique par fatigue (chargements répétitifs), loi de fatigue.