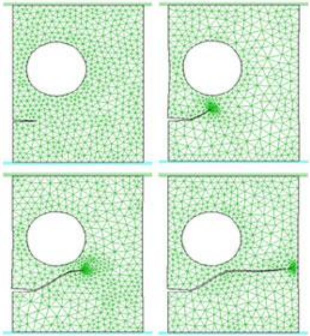
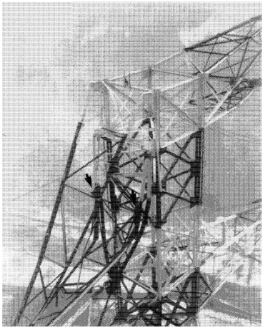
Rupture et plasticité





Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

Rupture et plasticité : plan du cours

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html

Objectif

Au-delà de la limite d'élasticité apparaissent des déformations plastiques...

...irréversibles

...dissipant de l'énergie

Objectif de l'amphi : dissipation d'énergie dans un matériau élastoplastique

Cadre de travail (identique à amphi 5)

Hypothèse des petites perturbations :

- Configuration actuelle = configuration initiale.
- Tenseur des déformations linéarisées.

$$\boxed{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{d}}(\underline{v}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\nabla v} + {}^T\underline{\nabla v}\right).}$$

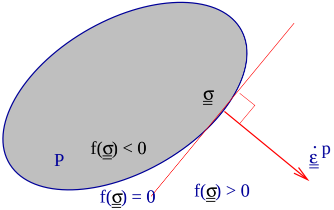
Evolution quasi-statique : les termes d'accélération sont négligés.

Evolution isotherme : l'influence des variations de température sur le comportement sont négligées.

Dissipation plastique

Plan

Fonction seuil convexe et dérivable (rappel amphi 5)

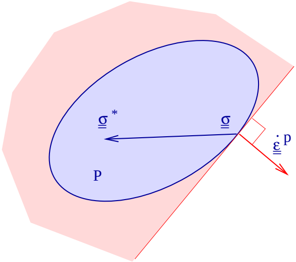


Règle de normalité

Le domaine de plasticité $\mathbb{P}$ est supposé **convexe**.

Si f est dérivable :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}} = \dot{\lambda}\, \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda} \geq 0.$$



Propriété des ensembles convexes

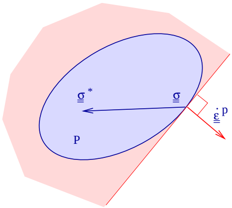
Tout domaine convexe est, en tout point de son bord, situé d'un seul côté de son plan tangent, **dans le demi-espace formé des vecteurs ayant un produit scalaire négatif avec la normale extérieure à $\mathbb{P}$.**

Plan

Principe de la dissipation plastique maximale

La règle de normalité (f convexe, dérivable) entraîne :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^\star - \underline{\underline{\sigma}}):\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}} \leq 0 \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^\star \in \mathbb{P}$$



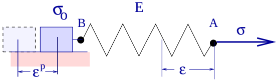
Principe de la dissipation plastique maximale : Parmi les états de contrainte plastiquement admissibles $\underline{\underline{\sigma}}^\star \in \mathbb{P}$, l'état de contrainte réel rend maximale la **dissipation plastique :**

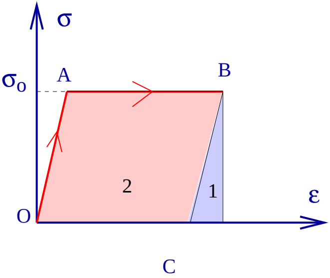
$$\boxed{\mathscr{D}^{\mathsf{P}} = \max_{\underline{\underline{\sigma}}^\star \in \mathbb{P}} \mathscr{D}^{\mathsf{P}\star}} \qquad \text{avec} \quad \mathscr{D}^{\mathsf{P}} = \underline{\underline{\sigma}}:\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}}, \quad \mathscr{D}^{\mathsf{P}\star} = \underline{\underline{\sigma}}^\star:\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}}.$$

Principe de la dissipation plastique maximale

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}} = \max_{\underline{\underline{\sigma}}^\star \in \mathbb{P}} \underline{\underline{\sigma}}^\star : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}}.}$$

$\mathscr{D}^{\mathsf{P}}$: **énergie dissipée ?** Modèle rhéologique 1D :





Bilan thermodynamique simplifié :

$$\mathscr{P}_e = \dot{W} + \mathscr{D},$$

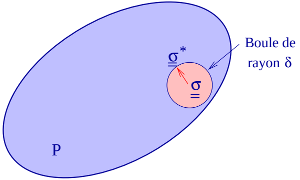
$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathsf{el}} + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}}.$$

En plasticité parfaite, la puissance plastique $\mathscr{D}^{\mathsf{P}} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}}$ est dissipée.

Principe de la dissipation plastique maximale : la réciproque est vraie

Principe de la dissipation plastique maximale $\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}} \geq \underline{\underline{\sigma}}^{\star}:\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}}$	$\Longrightarrow$	Convexité de f + Règle de normalité.

- $\underline{\underline{\sigma}}$ **point intérieur à $\mathbb{P}$:**

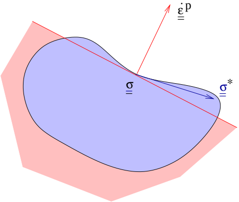


$$(\underline{\underline{\sigma}}^{\star} - \underline{\underline{\sigma}}):\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}} \leq 0 \qquad \forall \underline{\underline{\sigma}}^{\star} \in \mathbb{P}.$$

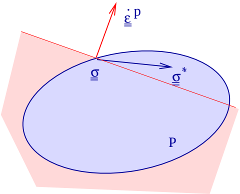
$$\underline{\underline{\sigma}}^{\star} = \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\rho}}, \quad \underline{\underline{\rho}}:\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}} \leq 0 \ \forall \underline{\underline{\rho}}, \ \| \underline{\underline{\boldsymbol{\rho}}} \| \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}} = 0.}$$

- $\underline{\underline{\sigma}}$ **sur le bord de $\mathbb{P}$:**



$\mathbb{P}$ non convexe : **PDPM violé** (cf annexe poly)



Normalité non satisfaite : **PDPM violé**

Démonstration de l'équivalence dans le cas f convexe et dérivable

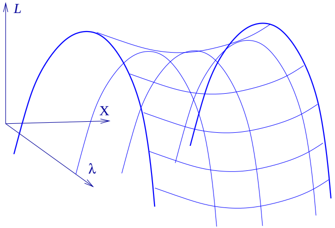
Rappel sur les problèmes d'optimisation sous contrainte (cf. MAP431) :

$$\boxed{I = \inf_{F(X) \leq 0} G(X),} \quad F, G \quad \text{convexes.}$$

$$\sup_{\lambda \geq 0} \lambda F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(X) \leq 0, \\ +\infty & \text{si } F(X) > 0. \end{cases}$$

Recherche de l'infimum équivalent à la recherche d'un point-selle pour le Lagrangien :

$$\boxed{\mathscr{L}(X, \lambda) = G(X) + \lambda F(X).}$$



Propriété d'un point selle (admise) :

$$\boxed{I = \inf_{X} \sup_{\lambda \geq 0} \mathscr{L}(X, \lambda) = \sup_{\lambda \geq 0} \inf_{X} \mathscr{L}(X, \lambda).}$$

Démonstration de l'équivalence dans le cas f convexe et dérivable

PDPM :

$$\boxed{\sup_{\underline{\underline{\sigma}}^\star \in \mathbb{P}} \mathscr{D}^{\mathrm{P}\star} = \sup_{\underline{\underline{\sigma}}^\star \in \mathbb{P}} \underline{\underline{\sigma}}^\star : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} = - \inf_{f(\underline{\underline{\sigma}}^\star) \leq 0} \left(-\underline{\underline{\sigma}}^\star : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} \right),}$$

$$\mathscr{L}(\underline{\underline{\sigma}}^\star, \dot{\lambda}) = -\underline{\underline{\sigma}}^\star : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} + \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}^\star)$$

Inf par rapport à $\underline{\underline{\sigma}}^\star$ atteint en $\underline{\underline{\sigma}}^\star = \underline{\underline{\sigma}}$:

$$\left.\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^\star}\right|_{\underline{\underline{\sigma}}^\star = \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{0}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{-\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{0}}.}$$

Sup par rapport à $\dot{\lambda} \geq 0$: il faut avoir

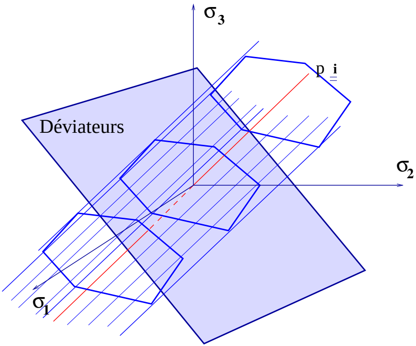
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\lambda}} \begin{cases} \leq 0 & \text{si } \dot{\lambda} = 0, \\ = 0 & \text{si } \dot{\lambda} > 0. \end{cases}$$

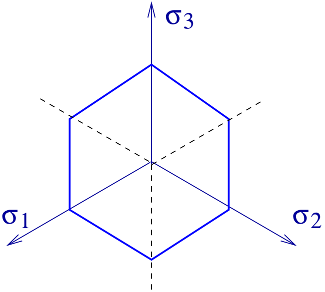
$$\boxed{\dot{\lambda} = 0 \Rightarrow f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \qquad \dot{\lambda} > 0 \Rightarrow f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.}$$

Plan

Multi-critères (non dérivables) : exemple du critère de Tresca

$$\sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_0 \quad \text{c.à.d.} \quad \sup\Big(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\Big) \leq \sigma_0.$$





Règle de normalité aux sommets ?

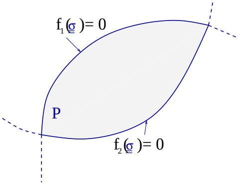
Le critère de Tresca est un multicritère de la forme

$$\sup_i f_i(\underline{\underline{\sigma}}) \leq \sigma_0, \quad f_i \text{ convexe et dérivable (sur la surface seuil).}$$

Règle de normalité pour multi-critère

Multi-critère :

$$\boxed{\begin{array}{c} f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sup\limits_{i=1\ldots,N} f_i(\underline{\underline{\sigma}}) \\ f_i \text{ convexe, dérivable.} \end{array}}$$



La règle de normalité va être déduite du Principe de la dissipation maximale :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} = \sup_{\substack{f_i(\underline{\underline{\sigma}}^\star) \leq 0 \\ i=1\ldots,N}} \mathscr{D}^{\mathrm{P}\star} = - \inf_{\substack{f_i(\underline{\underline{\sigma}}^\star) \leq 0 \\ i=1\ldots,N}} \left(-\underline{\underline{\sigma}}^\star : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} \right),}$$

Multiplicateurs de Lagrange (principe étendu au multi-critère d'admissibilité) :

$$- \inf_{\substack{F_i(X) \leq 0 \\ i=1\ldots,N}} G(X) = - \sup_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ i=1\ldots,N}} \inf_X \mathscr{L}(X, \lambda_i), \qquad \mathscr{L}(X, \lambda_i) = G(X) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i F_i(X).$$

Règle de normalité pour multi-critère

Lagrangien :

$$\mathscr{L}(\underline{\underline{\sigma}}^\star, \dot{\lambda}) = -\underline{\underline{\sigma}}^\star : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\lambda}_i f_i(\underline{\underline{\sigma}}^\star).$$

Inf par rapport à $\underline{\underline{\sigma}}^\star$ atteint en $\underline{\underline{\sigma}}^\star = \underline{\underline{\sigma}}$:

$$\left.\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^\star}\right|_{\underline{\underline{\sigma}}^\star = \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{0}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\lambda}_i \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}).}$$

Sup par rapport à $\dot{\lambda}_i \geq 0$: il faut avoir

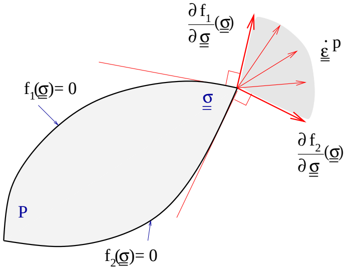
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\lambda}_i} \begin{cases} \leq 0 & \text{si } \dot{\lambda}_i = 0, \\ = 0 & \text{si } \dot{\lambda}_i > 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda_i = 0 \Rightarrow f_i(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \qquad \lambda_i > 0 \Rightarrow f_i(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.}$$

Règle de normalité généralisée pour un multi-critère

$$\boxed{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\lambda}_i \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda}_i \geq 0, \quad \dot{\lambda}_i = 0 \text{ si } f_i(\underline{\underline{\sigma}}) < 0.}$$

Interprétation géométrique



- Si $\underline{\underline{\sigma}} \in \partial\mathbb{P}$, les critères f_i tels que $f_i(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ sont dits **actifs.**
- Si plus d'un critère actif, **point singulier**.
  En un point singulier, la normale extérieure n'est pas définie de façon unique.
- PDPM $\Longrightarrow \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} \in N(\underline{\underline{\sigma}})$ = **cône des normales extérieures** à $\mathbb{P}$ en $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$N(\underline{\underline{\sigma}}) = \{\underline{\underline{z}}, \ (\underline{\underline{\sigma}}^{\star} - \underline{\underline{\sigma}}) : \underline{\underline{z}} \leq 0\}.$$

Cas du critère de Tresca

Le critère de Tresca est un multi-critère (rappel) :

$$\sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| = \sup\Big(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\Big) \leq \sigma_0.$$

Au plus 2 des 3 critères atteints simultanément :

$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ (point régulier) : un seul critère potentiellement actif :

$$\dot{\varepsilon}_1^P = -\dot{\lambda}, \qquad \dot{\varepsilon}_2^P = 0, \qquad \dot{\varepsilon}_3^P = \dot{\lambda} \qquad (\sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_0.)$$

$\sigma_1 = \sigma_2$ ou $\sigma_2 = \sigma_3$ (point singulier) : deux critères potentiellement actifs :

$$\dot{\varepsilon}_1^P = -\dot{\lambda}, \qquad \dot{\varepsilon}_2^P = -\dot{\mu}, \qquad \dot{\varepsilon}_3^P = \dot{\lambda} + \dot{\mu} \qquad (\sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_3 - \sigma_2 = \sigma_0.)$$

$$\dot{\varepsilon}_1^P = -\dot{\lambda} - \dot{\mu}, \qquad \dot{\varepsilon}_2^P = \dot{\mu}, \qquad \dot{\varepsilon}_3^P = \dot{\lambda} \qquad (\sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_0.)$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (sphérique, cisaillement nul sur toute facette) : critère jamais atteint.

Les $\dot{\varepsilon}_i^P$ sont les vitesses de déformation plastique principales.

Une autre application immédiate du PDPM

Si un critère f (dérivable ou non) est insensible à la pression hydrostatique, i.e.

$$f(\underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{i}}) = f(\underline{\underline{\sigma}}),$$

alors la vitesse de déformation plastique déduite de la règle de normalité est incompressible :

$$\boxed{\mathrm{tr}(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}}) = 0.}$$

Preuve : Considérer $\underline{\underline{\sigma}}^\star = \underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{i}}$. Si $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$ alors $f(\underline{\underline{\sigma}}^\star) \leq 0$.

PDPM $\Longrightarrow$ $(\underline{\underline{\sigma}}^\star - \underline{\underline{\sigma}}):\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} \leq 0$, i.e. $p\underline{\underline{i}}:\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} \leq 0 \quad \forall p.$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\underline{\underline{i}}:\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} = 0.}$

Plan

Thermodynamique : rappels (cours Mécanique des milieux continus)

- **Premier principe** (E énergie interne, C énergie cinétique du système) :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(E+\mathscr{C}) = \mathscr{P}_e + \mathscr{P}_{cal}}$$

(forme globale)

$$\boxed{\rho\ \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \operatorname{div} \underline{q} + r.}$$

(forme locale)

$$\mathscr{P}_{cal} = \int_\Omega r\ d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{q}.\underline{n}\ da.$$

- **Second principe**

$$\boxed{\frac{dS}{dt} \geq \int_\Omega \frac{r}{T}\ d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\underline{q}.\underline{n}}{T}\ da,}$$

(forme globale)

$$\boxed{\mathscr{D} \stackrel{\text{def}}{=} \rho\ T\dot{s} + \operatorname{div} \underline{q} - \frac{\underline{q}.\underline{\nabla} T}{T} - r \geq 0.}$$

(forme locale)

- Elimination de $\operatorname{div} \underline{q} - r$ entre les 2 formes locales des principes $\Longrightarrow$ **inégalité de Clausius-Duhem.**

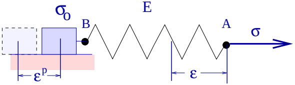
Inégalité de Clausius-Duhem

$$\boxed{\mathscr{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \rho\,(\dot{w} + s\dot{T}) - \frac{\underline{q}.\underline{\nabla}T}{T} \geq 0,}$$

où **l' énergie libre** $w = e - Ts$ est une fonction des **variables d'état du milieu continu déformable :**

$$w \stackrel{\text{def}}{=} e - Ts = w(T, \boldsymbol{\chi})\ ,\qquad \text{avec } \boldsymbol{\chi} = (\underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha})\ (\boldsymbol{\alpha} : \text{variables internes})$$

Plasticité parfaite :



$$\boldsymbol{\alpha} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}},\ \rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}})$$

Hypothèse de découplage de la dissipation :

$$\boxed{\mathscr{D} = \mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2,}\quad \text{avec}\quad \boxed{\begin{aligned} \mathscr{D}_1 &= \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \rho\,(\dot{w} + s\dot{T}) \geq 0 \quad &\text{(dissipation intrinsèque,)} \\ \mathscr{D}_2 &= -\frac{\underline{q}.\underline{\nabla}T}{T} \geq 0 \quad &\text{(dissipation thermique.)} \end{aligned}}$$

Positivité de $\mathscr{D}_2$ assurée par la loi de Fourier : $\underline{q} = -\underline{\underline{k}}.\underline{\nabla}T$.

Plan

Etude de la dissipation intrinsèque

- **Dissipation intrinsèque** (origine mécanique) :

$$0 \leq \mathscr{D}_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \rho\, (\dot{w} + s\,\dot{T})$$
$$= \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \rho \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\chi}} \dot{\boldsymbol{\chi}} - \rho \Big(\frac{\partial w}{\partial T} + s \Big)\, \dot{T}$$

- Positivité de $\mathscr{D}_1$ dans des évolutions telles que $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{0}}$, $\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0}$, $\dot{T}$ **quelconque** $\Longrightarrow$:

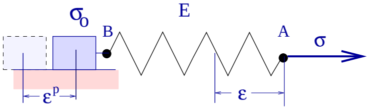
$$\frac{\partial w}{\partial T} + s = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{s = -\frac{\partial w}{\partial T}(T, \boldsymbol{\chi})} \qquad \text{(Gibbs)}$$

- La dissipation intrinsèque prend donc la forme

$$\boxed{\mathscr{D}_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \mathscr{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}}, \qquad \mathscr{A} \overset{\text{def}}{=} -\rho \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\chi}, T)}$$

$\mathscr{A}_\chi$ est la **force thermodynamique** associée à la variable interne χ.

Etude de la dissipation intrinsèque : cas de la plasticité parfaite



$$\boldsymbol{\alpha} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathsf{P}}, \ \rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathsf{P}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathsf{P}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathsf{P}})$$

$$\mathscr{A}_{\varepsilon} = -\rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = -\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathsf{P}}) = -\underline{\underline{\sigma}},$$

$$\mathscr{A}_{\varepsilon^{\mathsf{P}}} = -\rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathsf{P}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathsf{P}}) = \underline{\underline{\sigma}},$$

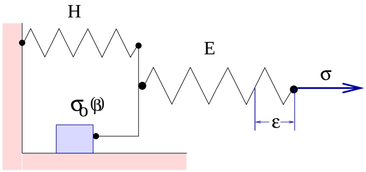
$$\Longrightarrow \mathscr{D}_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \mathscr{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}}$$

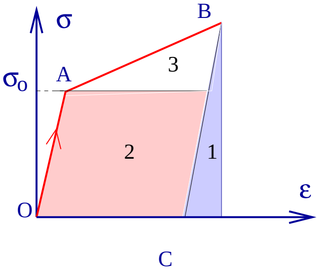
$$= \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}}, \qquad \boxed{\mathscr{D}_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathsf{P}}.}$$

Etude de la dissipation intrinsèque : plasticité avec écrouissage

En plasticité avec écrouissage :

$$\mathscr{D}_1 \neq \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}}, \quad \mathscr{D}_1 = \theta \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} \ (0 < \theta < 1).$$





Travail fourni : $\boxed{\int_A^B \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = A_1 + A_2 + A_3,}$ A_1 récupérable par décharge $= \int_A^B \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{el}},$

$\boxed{\int_A^B \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} = A_2 + A_3,}$ A_3 stockée dans le ressort H,

$$\boxed{\int_A^B \mathscr{D}_1 = A_2 = \int_A^B \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} - A_3 \ < \ \int_A^B \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}}.}$$

Forces thermodynamiques, irréversibilité et dissipation

Phénomène irréversible	Rupture fragile	Plasticité
Variable d'état	longueur fissure ℓ	$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}$
Force thermodynamique	Taux de restitution de l'énergie $G = -\dfrac{\partial W}{\partial \ell}(\ell)$	Contrainte $\mathscr{A}_{\varepsilon^{\mathrm{P}}} = -\rho \dfrac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}} = \underline{\underline{\sigma}}$
Dissipation	$G\dot{\ell}$	$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}}$

Plan

Equation de la chaleur

$$\boxed{\mathscr{D}_1 = \rho T \dot{s} + \operatorname{div} \underline{q} - r} \quad (\geq 0).$$

$$s = -\frac{\partial w}{\partial T}(\boldsymbol{\chi}, T) \implies \dot{s} = -\frac{\partial^2 w}{\partial T^2}\dot{T} - \frac{\partial^2 w}{\partial \boldsymbol{\chi} \partial T}\dot{\boldsymbol{\chi}},$$

ce qui donne, compte tenu de la définition des forces thermodynamiques $\mathscr{A}$:

$$\rho T \dot{s} = \rho c_\chi \dot{T} + T \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial T} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} \qquad \left(\text{avec } c_\chi \overset{\text{def}}{=} -T \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} \ : \text{capacité calorifique} \right)$$

En reportant dans l'expression de $\mathscr{D}_1$, on obtient l'**équation de la chaleur** :

$$\boxed{\rho c_\chi \dot{T} - \operatorname{div}(k \underline{\nabla} T) = r - T \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial T} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} + \mathscr{D}_1.}$$

- $-\operatorname{div}(k \underline{\nabla} T)$ diffusion de la chaleur **chaud vers froid** ;
- r source donnée ;
- $-T \dfrac{\partial \mathscr{A}}{\partial T} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}}$ source dûe à la dépendance en T des forces thermodynamiques ;
- $\mathscr{D}_1$ source **toujours positive** dûe à la dissipation.

L'énergie dissipée l'est sous forme de chaleur.

Matériau élastoplastique et thermiquement dilatable

$$\boxed{\rho c_\chi \dot{T} - \mathrm{div}\,(k \underline{\nabla} T) = r - T \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial T} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} + \mathscr{D}_1.}$$

Pour une loi de comportement linéaire par rapport à T :

$$\boxed{w(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}, T) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}) - (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{th}}(T - T_0) - \frac{1}{2T_0} c_\chi (T - T_0)^2}$$

$$\mathscr{A}_\varepsilon = -\frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = -\underline{\underline{\sigma}}\,, \qquad \mathscr{A}_{\varepsilon^{\mathrm{P}}} = -\frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}} = \underline{\underline{\sigma}}, \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{P}} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{th}}(T - T_0) \right)$$

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial T} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial \mathscr{A}_\varepsilon}{\partial T} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{\partial \mathscr{A}_{\varepsilon^{\mathrm{P}}}}{\partial T} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{th}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}})$$

L'équation de la chaleur prend donc la forme

$$\boxed{\rho c_\chi \dot{T} - \mathrm{div}\,(k \underline{\nabla} T) = r - T_0 \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{th}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}}) + \mathscr{D}_1.} \quad \text{avec } (T - T_0) \ll T_0$$

Matériau élastoplastique : (a) régime élastique

$$\boxed{\rho c_\chi \dot{T} - \mathrm{div}\left(k \underline{\nabla} T\right) = r - T_0 \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{th}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}}) + \mathscr{D}_1.}$$

Cas du régime élastique (pas d'évolution de la plasticité, dissipation nulle :)

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}} = 0, \quad \mathscr{D}_1 = 0 \quad \Longrightarrow \boxed{\rho c_\chi \dot{T} - \mathrm{div}\left(k \underline{\nabla} T\right) = r - T_0 \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{th}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}.}$$

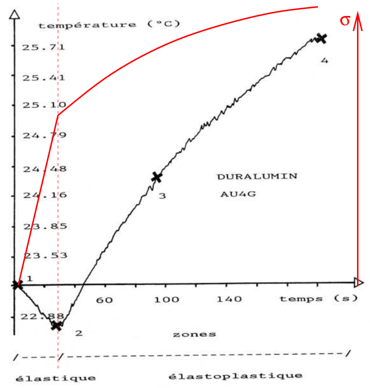
Essai uniaxial : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$, terme source $= -T_0 \alpha^{\mathrm{th}} E \dot{\varepsilon}$, diffusion négligeable.

- **Refroidissement en traction** ($\dot{\varepsilon} > 0$).
- **Echauffement en compression** ($\dot{\varepsilon} < 0$).

Refroidissement en traction analogue au refroidissement dû à la détente des gaz parfaits. Quelques dixièmes de degré dans les métaux.

Matériau élastoplastique : (b) régime plastique

$$\boxed{\rho c_\chi \dot{T} - \mathrm{div}\,(k\underline{\nabla} T) = r - T_0 \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{th}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\mathrm{P}}) + \mathscr{D}_1.}$$



- $\alpha^{\mathrm{th}} \simeq 10^{-5}$ (Alu). Dès que la plasticité (irréversibilité) apparaît, le terme $\mathscr{D}_1$ **l'emporte très largement sur le terme « gaz parfait ».**
- L'élévation de température peut atteindre **plusieurs centaines de degrés ;**
- $\mathscr{D}_1 > 0$ quel que soit le sens de la sollicitation.

[Film : Traction monotone]
[Film : Traction ondulée]
(A. Chrysochoos et coll., Univ. Montpellier)

Conclusion

- **Principe de la dissipation plastique maximale** généralise la régle de normalité.
- **Forces thermodynamiques** : forces disponibles pour faire avancer les mécanismes irréversibles.
- **Dissipation** : Force $\times$ vitesse.
- **Puissance plastique** : totalement dissipée en plasticité parfaite, partiellement dissipée en plasticité avec écrouissage.
- **Dissipation d'origine mécanique** : terme source dans l'équation de la chaleur.
- **Dissipation d'origine thermique** : diffusion de la température.