

Rupture et Plasticité

Pierre Suquet

Table des matières

1	Comportements non linéaires des matériaux solides	1
1.1	Variété des comportements macroscopiques	1
1.2	Diversité des mécanismes microscopiques	8
1.3	Critères	13
1.4	Exercices	26
2	Singularités de contrainte et ténacité des matériaux	29
2.1	Concentration de contrainte au voisinage d'un défaut de forme elliptique .	30
2.2	Singularité de contrainte en fond d'entaille	31
2.3	Singularité de contrainte à la pointe d'une fissure plane.	35
2.4	Exercices	48
2.5	Annexe : éprouvettes normalisées	52
3	Analyse énergétique de la propagation d'une fissure	53
3.1	Analyse énergétique	54
3.2	Taux de restitution de l'énergie	61
3.3	Lien entre singularité des contraintes et taux de restitution de l'énergie . .	64
3.4	Exercices	69
4	Analyse énergétique de la propagation d'une fissure II.	
	Fissuration par fatigue	71
4.1	Taux de restitution de l'énergie : intégrales invariantes	72
4.2	Problèmes tridimensionnels	81
4.3	Fissuration par fatigue	88
5	Loi de comportement élasto-plastique	95
5.1	Surface seuil	96
5.2	Déformation plastique	104
5.3	Exercices	121
5.4	Principe de la dissipation maximale et convexité du domaine de plasticité .	123
6	Structures élasto-plastiques standards	125
6.1	Formulation du problème	126
6.2	Etude d'un cas particulier : Torsion d'un arbre cylindrique élasto-plastique	127
6.3	Résultats généraux sur l'évolution des systèmes élasto-plastiques	136
6.4	Incompatibilité de la déformation plastique et contraintes résiduelles	141
6.5	Ecrouissage apparent en variables généralisées	142

6.6	Intégration numérique	143
6.7	Conclusion	147
6.8	Exercices	149
7	Thermodynamique des Processus Irréversibles	155
7.1	Les principes de la Thermodynamique	155
7.2	Thermodynamique et lois de comportement	161
7.3	Equation de la chaleur	178
7.4	Exercices	182
8	Charges limites	185
8.1	Chargements potentiellement supportables. Approche statique	186
8.2	Approche cinématique par l'extérieur	192
8.3	Conclusion	197
9	Bibliographie	199
A	Rappels d'élasticité linéaire	203
A.1	Tenseur d'élasticité	203
A.2	Problème d'équilibre en élasticité linéaire	206
A.3	Problèmes plans et anti-plans	207
A.4	Problèmes classiques	208
B	Coordonnées curvilignes. Formulaire	214
B.1	Coordonnées cylindriques.	214
B.2	Coordonnées sphériques	215

Chapitre 1

Comportements non linéaires des matériaux solides

Introduction et cadre de travail...

Les matériaux présentent une étonnante diversité de comportement. Lorsqu'on leur applique des efforts, certains matériaux s'écoulent à la manière de fluides, d'autres résistent comme des solides. D'autres enfin commencent par résister mais, si l'on augmente l'effort, finissent par céder et s'écoulent. Parmi ces matériaux dits solides certains sont *fragiles* et cassent sans déformation apparente importante, d'autres se déforment notablement avant rupture (on les dit *ductiles*). Néanmoins ces classifications sont toujours relatives (un métal est fragile à froid mais ductile à chaud) et parfois ambiguës (un milieu granulaire s'écoule comme un fluide, mais, une fois compacté, présente la cohésion d'un solide).

Ce chapitre présente dans un premier temps les comportements des matériaux solides les plus couramment rencontrés à l'échelle de l'ingénieur. A plus petite échelle, ces matériaux présentent des mécanismes de déformation encore plus variés qu'il est utile de connaître pour mieux comprendre leur comportement macroscopique. Nous nous limiterons aux mécanismes observés dans les matériaux *cristallins* (métaux, roches, certains polymères). Enfin, ayant mis en évidence différents régimes dans le comportement des matériaux, nous aborderons la question des critères, essentiels pour traduire la transition d'un régime à l'autre.

1.1 Variété des comportements macroscopiques

La façon la plus élémentaire d'appréhender la variété des comportements des matériaux est de les tester au moyen d'essais uniaxiaux.

1.1.1 Essais uniaxiaux classiques

Un essai est dit *uniaxial* lorsque le tenseur de contrainte est porté par une direction fixe \underline{u} :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \sigma(\underline{x}) \underline{u} \otimes \underline{u}.$$

L'état de contrainte est caractérisé par le seul champ scalaire σ . Pour être directement exploitable dans l'écriture de la loi de comportement du matériau homogène que l'on

teste, il est préférable que l'essai soit *homogène*¹ (au moins dans une certaine région de l'échantillon testé), ce qui signifie que l'état de contrainte est uniforme dans cette région (il ne dépend pas de la position \underline{x}). En vertu de l'homogénéité du matériau, le champ de déformation est également uniforme dans cette région, au moins tant qu'il n'y a pas apparition d'instabilité (il peut y avoir alors plusieurs valeurs de la déformation associée à une même valeur de la contrainte ce qui conduit à un champ de déformation non uniforme et se traduit sur le plan physique par une striction de l'éprouvette).

L'essai uniaxial le plus classique est l'essai de traction simple. On soumet une éprouvette de traction à une force dans une direction fixe. L'éprouvette, le plus souvent plane ou cylindrique de section circulaire, est typiquement constituée de deux zones : les têtes d'éprouvette servent à accrocher l'éprouvette et à lui transmettre l'effort extérieur, tandis que la partie centrale, dite partie « utile », est la zone où l'on peut raisonnablement considérer que l'état de déformation est homogène et sert aux mesures de déformations. On mesure cette déformation par différents moyens (jauges de déformation, extensomètre, corrélations d'image...). La contrainte $\sigma = F/S$ se déduit de la mesure de la force appliquée et de la mesure de la section S de la partie utile de l'éprouvette. Nous nous limiterons aux (relativement) petites déformations et nous placerons dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P.). En conséquence, la section S est la section initiale de l'éprouvette et les différentes mesures de la contrainte (contrainte nominale, contrainte de Cauchy) et de la déformation (Green-Lagrange, déformations logarithmiques) coïncident.

L'essai peut être piloté en contrainte (on impose une valeur à la force F donc à la contrainte σ) ou en déformation (on applique un déplacement aux têtes d'éprouvette de façon à atteindre une déformation prescrite ε dans la zone utile de l'éprouvette). Une histoire de chargement (en contrainte ou en déformation) est appliquée à l'éprouvette et les résultats des mesures sont portés dans un diagramme (σ, ε) . Différents types de chargement permettent de mettre en évidence différents aspects du comportement des matériaux testés.

En simplifiant, les trois grands types de comportement qu'un matériau est susceptible d'exhiber (en fonction de la température, de la vitesse de déformation et du niveau des contraintes) sont le comportement *élastique*, le comportement *plastique* et le comportement *visqueux*.

Charge monotone. On augmente progressivement la contrainte σ (ou la déformation ε si l'essai est piloté en déformation) et on mesure la déformation qui en résulte (ou la contrainte). Cet essai permet de mettre en évidence plus précisément les phénomènes suivants (cf figure 1.1) :

- a) *La non linéarité* éventuelle de la loi : l'essai met en évidence un domaine (en contrainte ou en déformation) à l'intérieur duquel le comportement (c'est à dire la relation σ, ε) est linéaire et à l'extérieur duquel il devient non linéaire.
- b) *Le durcissement ou l'adoucissement* du matériau. Le durcissement correspond au cas d'une courbe (σ, ε) croissante (toute augmentation de déformation requiert une

¹Des essais non homogènes, comme l'essai de flexion, peuvent également être utilisés, mais ils nécessitent une modélisation des champs de contrainte et de déformation pour être correctement traduits en lois de comportement.

1.1. VARIÉTÉ DES COMPORTEMENTS MACROSCOPIQUES

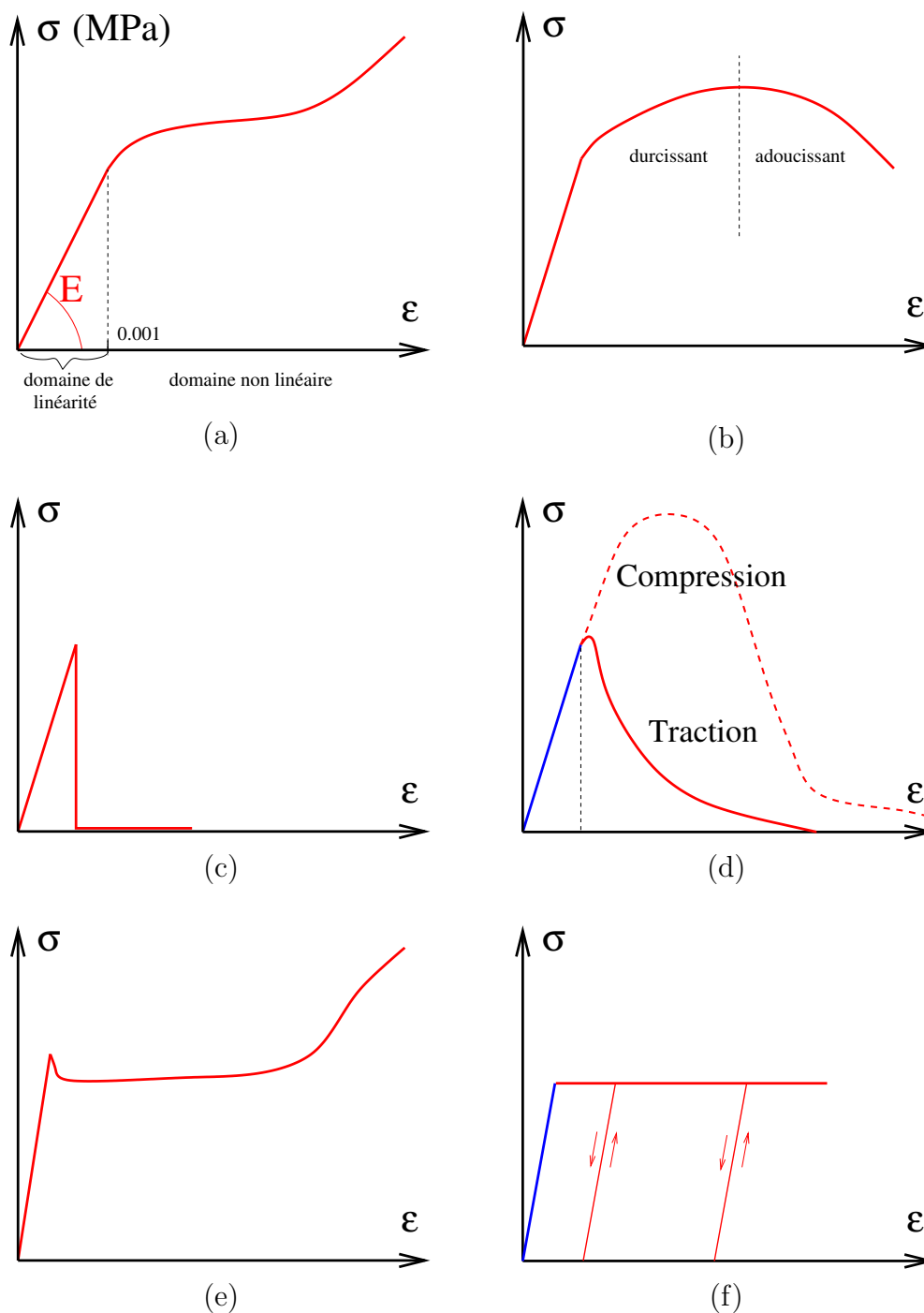


Fig. 1.1: Différents types de comportement observables lors d'un essai de traction simple monotone. (a) : mise en évidence de la perte de linéarité dans le comportement. (b) : caractère durcissant ou adoucissant du comportement. (c) : matériau élastique-fragile. (d) : matériau endommageable. (e) : courbe de traction réelle d'un acier doux, mettant en évidence un plateau plastique. (f) : idéalisation de la courbe précédente par un comportement élastique parfaitement plastique.

augmentation de contrainte), tandis que l'adoucissement correspond à une courbe (σ, ε) décroissante (la contrainte diminue alors que la déformation augmente). Pour détecter correctement l'adoucissement il est nécessaire de contrôler l'essai en déformation (le pilotage en contrainte ne peut se poursuivre au delà de la contrainte maximale et provoque une instabilité de l'essai).

- c) La plus ou moins grande *ductilité* du matériau : certains matériaux se rompent très rapidement après avoir dépassé leur domaine de linéarité. Lorsque la rupture intervient en même temps que la perte de linéarité, le matériau est dit *élastique-fragile*. A l'inverse certains matériaux se déforment beaucoup avant de se rompre (caoutchoucs, polymères, certains métaux à chaud). Ils sont dits *ductiles* et la déformation à rupture est une mesure de la *ductilité* du matériau. La figure 1.1e présente la courbe de traction typique d'un acier doux. On note que sitôt après la perte de linéarité cette courbe présente un plateau avant de se redresser pour des déformations plus importantes. On représente souvent ce type de comportement par un modèle de *plasticité parfaite* (figure 1.1f) qui consiste en une montée élastique linéaire suivi d'un plateau à contrainte constante.
- d) *La viscosité* du matériau : l'essai est contrôlé en déformation et effectué à différentes vitesses de déformation $\dot{\varepsilon}$. Si l'on obtient des courbes (σ, ε) différentes, le matériau testé présente une *viscosité*, c'est à dire une sensibilité à la vitesse de sollicitation. C'est typiquement le cas des polymères ou des métaux à chaud (et même des céramiques à haute température). En revanche les métaux à température ambiante ne présentent pas en général de sensibilité à la vitesse de déformation. Si l'on s'intéresse aux très grandes vitesses de déformation (comportement dynamique des matériaux pour des problèmes d'explosion ou de crash) les machines d'essais classiques ne permettent plus d'imposer des vitesses de déformation suffisamment élevées et il faut alors avoir recours à d'autres essais (barres de Hopkinson par exemple) dans lesquels l'hypothèse d'homogénéité des contraintes et des déformations n'est plus valide ce qui complique notablement le dépouillement.

Charge-décharge. On augmente la force F puis on la ramène à 0. Cet essai permet de mettre en particulier en évidence (figure 1.2) :

- a) *L'anélasticité* : si les courbes de charge-décharge coïncident, le milieu est élastique (éventuellement non linéaire). Dans le cas contraire il est anélastique. Après décharge complète, il subsiste une déformation résiduelle. Cette déformation résiduelle peut s'effacer avec le temps, signe d'une viscosité du matériau. Dans les matériaux insensibles à la vitesse de chargement (métaux à froid par exemple), cette déformation résiduelle est *permanente*, tant que l'application d'une contrainte ne vient pas la perturber. La déformation au point A se décompose donc en (figure 1.2b) une partie ε^{el} récupérable par décharge (d'où le nom de partie élastique de la déformation) et une partie ε^{P} qui subsiste après décharge (c'est la partie plastique, ou plus généralement anélastique, de la déformation) :

$$\varepsilon = \varepsilon^{\text{el}} + \varepsilon^{\text{P}}.$$

- b) L'anélasticité ne se manifeste que lorsque la force atteint un certain seuil, qui est la *limite d'élasticité* du matériau. Initialement ce seuil est σ_0 (voir figure 1.2b).

1.1. VARIÉTÉ DES COMPORTEMENTS MACROSCOPIQUES

On effectue une décharge de A à B puis on recharge en B . Dans la plupart des métaux la charge se fait à nouveau le long du trajet AB et de façon élastique (le trajet AB est réversible). La limite d'élasticité pour une charge à partir de B est donc σ_A . Si la limite d'élasticité est fixe ($\sigma_A = \sigma_0$ pour tout A), le milieu est *parfaitement plastique*. Si la limite d'élasticité varie ($\sigma_A \neq \sigma_0$), le matériau est *écrouissable*. L'écrouissage est positif s'il y a durcissement (le seuil augmente avec la déformation), il est négatif s'il y a adoucissement.

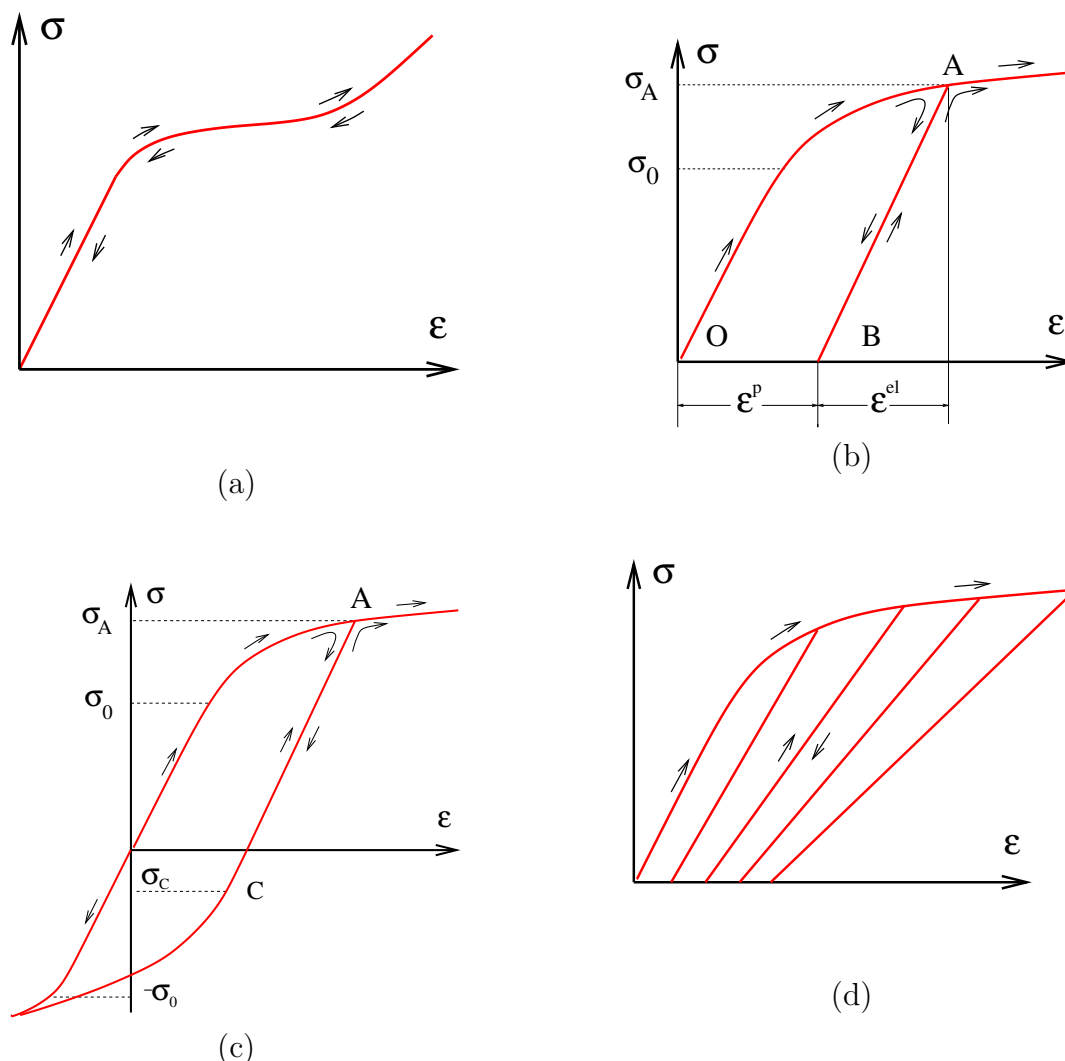


Fig. 1.2: Essai de charge-décharge. (a) : comportement élastique (éventuellement non linéaire). (b) : comportement anélastique. (c) : effet Bauschinger. (d) : endommagement couplé à la plasticité.

- c) Quand on effectue un essai de compression à partir de l'état naturel sans contrainte (à partir du point O), on observe en général un seuil σ_0 identique en traction et en compression. En revanche si l'on déforme le matériau plastiquement puis qu'on le décharge (à partir du point A) et que l'on prolonge la décharge par application d'une contrainte négative (compression), on observe souvent une dissymétrie du seuil d'élasticité en compression par rapport à sa valeur en traction : c'est l'effet *Bauschinger* ($\sigma_C \neq -\sigma_A$).

- d) Dans le domaine élastique et dans la plage des petites déformations, la charge et la décharge s'effectuent le plus souvent suivant une droite. La plupart du temps la pente de cette droite est la pente initiale de la courbe contrainte déformation, Il arrive cependant que le module d'élasticité diminue lors d'une série d'essais de charge-décharge, il y a alors *endommagement*.

Essai cyclique. On fait décrire au paramètre de chargement un trajet périodique comme représenté sur la figure 1.3 d. Cet essai permet de mettre en évidence (cf figure 1.3) :

- l'adaptation.* Le comportement est alors celui d'un solide élastique à une déformation résiduelle près. Le cycle décrit par le point (σ, ε) se réduit à une portion de courbe sans épaisseur.
- L'accommodation.* Le trajet parcouru à chaque cycle par le point (σ, ε) se stabilise sur une courbe fermée mais la boucle ainsi formée a une aire non nulle.
- le rochet.* Augmentation de la déformation résiduelle à chaque cycle jusqu'à la ruine.

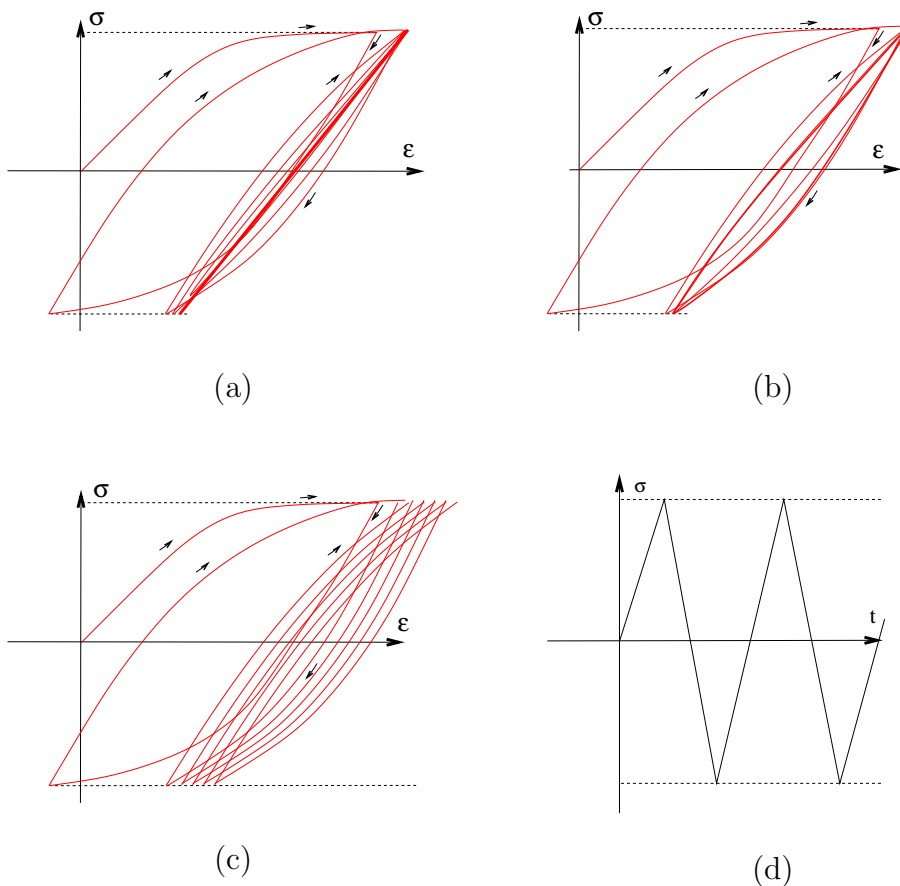


Fig. 1.3: Essai cyclique : (a) : adaptation. (b) : accommodation. (c) : rochet. (d) : chargement appliqué.

1.1. VARIÉTÉ DES COMPORTEMENTS MACROSCOPIQUES

Sensibilité à la vitesse de déformation. La sensibilité des matériaux à la vitesse de déformation a deux conséquences pour la tenue de ces matériaux dans le temps qui sont le fluage et la relaxation (cf figure 1.4).

(a) *Relaxation des contraintes.* La relaxation des contraintes est mise en évidence par le test suivant : on impose en $t = 0$ une déformation ε que l'on maintient constante dans le temps. La contrainte prend tout d'abord une valeur donnée par l'élasticité du matériau $\sigma = E\varepsilon$, puis on constate généralement qu'elle se relâche au cours du temps : c'est la *relaxation*. Si la relaxation est totale, on a coutume de dire que le matériau étudié a un comportement de type *fluide* : au bout d'un temps (qui peut être long), le matériau « oublie » la déformation qui lui a été imposée en effaçant toutes les contraintes créées. La relaxation des contraintes pose des problèmes sérieux dans le béton précontraint dont le principe est le suivant. Le béton a une bonne

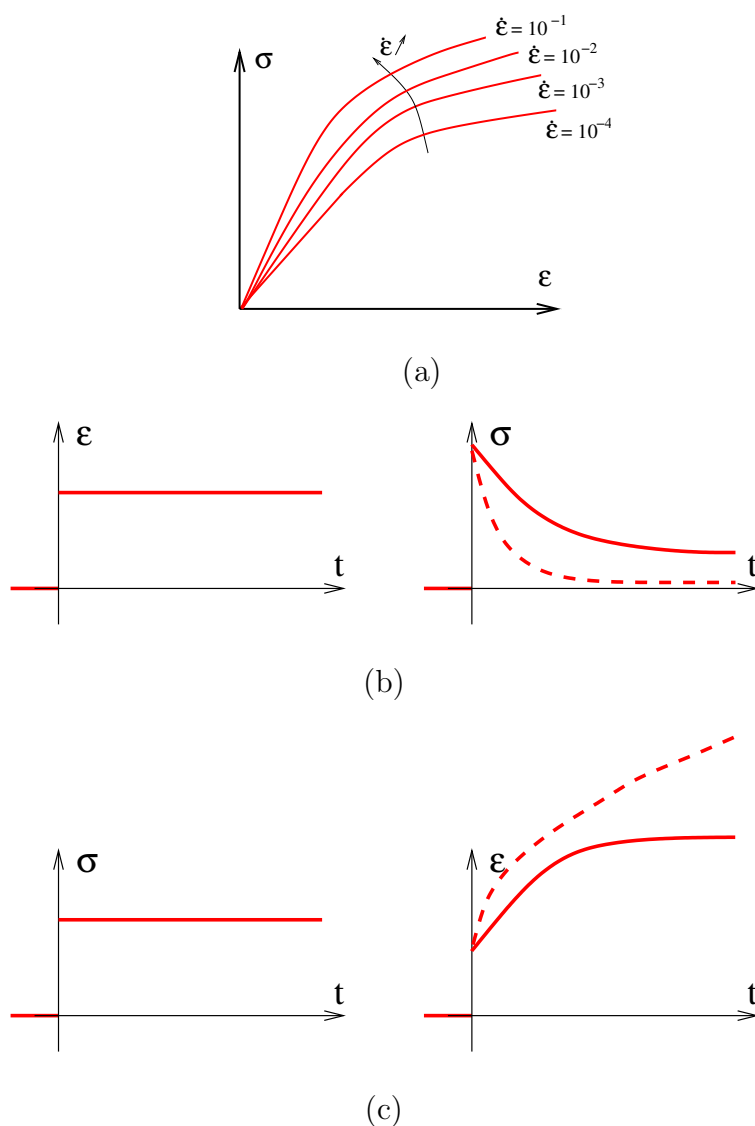


Fig. 1.4: Matériaux sensibles à la vitesse de chargement. (a) : mise en évidence de l'influence de la vitesse de chargement. (b) : Relaxation des contraintes (pointillés : matériau de type fluide) . (c) : Fluage (traits pleins : matériau de type solide).

tenue en compression mais se comporte comme un matériau fragile en traction. Pour le faire travailler en compression on applique une précontrainte de compression par l'intermédiaire de câbles (dits de précontrainte). Si la précontrainte se relaxe au cours du temps, certaines zones de l'ouvrage peuvent se trouver en traction ce qui les met en danger de fissuration.

- (b) *Fluage*. C'est le phénomène dual du précédent. On impose brusquement une contrainte σ qu'on maintient constante au cours du temps. Il en résulte une déformation initiale élastique $\varepsilon = \sigma/E$ puis généralement la déformation augmente avec le temps : c'est le *fluage*. C'est une expérience que l'on fait souvent (par exemple en sortant du supermarché!) lorsqu'on transporte un poids important dans un sac en plastique : on sent celui-ci s'allonger, parfois jusqu'à se déchirer ! Si la déformation de fluage reste limitée lorsque $t \rightarrow +\infty$ on a coutume de dire que le milieu étudié a un comportement de type *solide*.

1.2 Diversité des mécanismes microscopiques

Si la variété des comportements macroscopiques des matériaux est grande, celle des mécanismes microscopiques de déformation l'est plus encore. Les milieux granulaires ont un comportement de type plastique et le mécanisme principal est le glissement relatif (avec frottement) des grains les uns par rapport aux autres. Les polymères ont également un comportement plastique dans une certaine gamme de température et les mécanismes principaux de déformation sont alors le déploiement et les mouvements relatifs des chaînes de monomères. Nous concentrerons notre attention sur les *matériaux cristallins* qui présentent une structure très ordonnée de réseau à l'échelle atomique. La plupart des métaux et des roches sont cristallins².

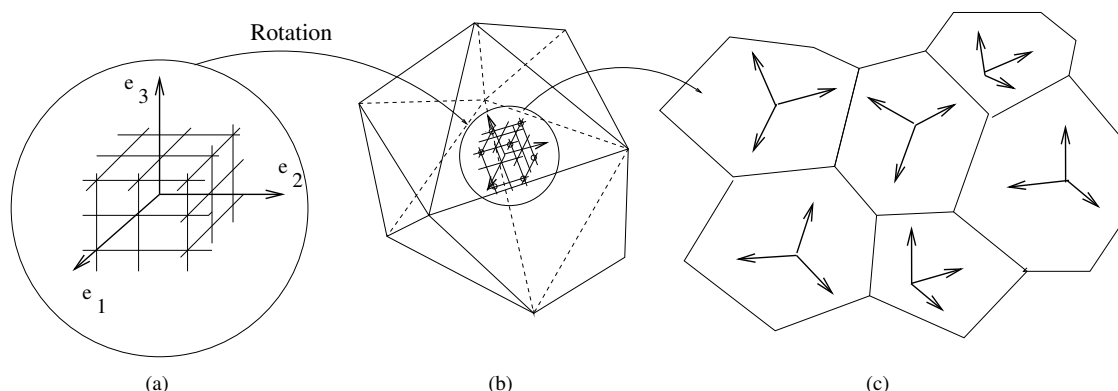


Fig. 1.5: Différentes échelles dans un polycristal : (a) : Monocristal dans ses axes de symétrie. (b) : Grain (noter la rotation des axes de symétrie). (c) Polycristal (noter que chaque grain a son orientation propre).

1.2.1 Matériaux cristallins

A l'échelle macroscopique de l'ingénieur (longueur caractéristique, le centimètre), un métal paraît homogène. Si l'on observe un échantillon de ce métal à l'échelle de la centaine

²Tous les matériaux ne sont pas cristallins, loin s'en faut. Les matériaux *amorphes* (sans structure microscopique ordonnée) sont également très courants (verres, polymères ...).

1.2. DIVERSITÉ DES MÉCANISMES MICROSCOPIQUES

de microns³, on s'aperçoit tout d'abord que l'échantillon qui paraissait homogène est en fait formé de grains élémentaires, dont on distingue assez nettement les joints : il s'agit en fait d'un *polycristal*, c'est à dire d'un assemblage de cristaux⁴. Lorsqu'on observe ces grains individuels ou à plus petite échelle (nanomètre ou angström), le réseau atomique régulier

³Il s'agit d'une indication, la taille de grains pouvant varier de quelques millimètres à quelques dixièmes de microns, selon les matériaux et leur mode d'élaboration.

⁴On arrive à produire des *monocristaux* formés d'un unique grain par des processus d'élaboration très contrôlés.

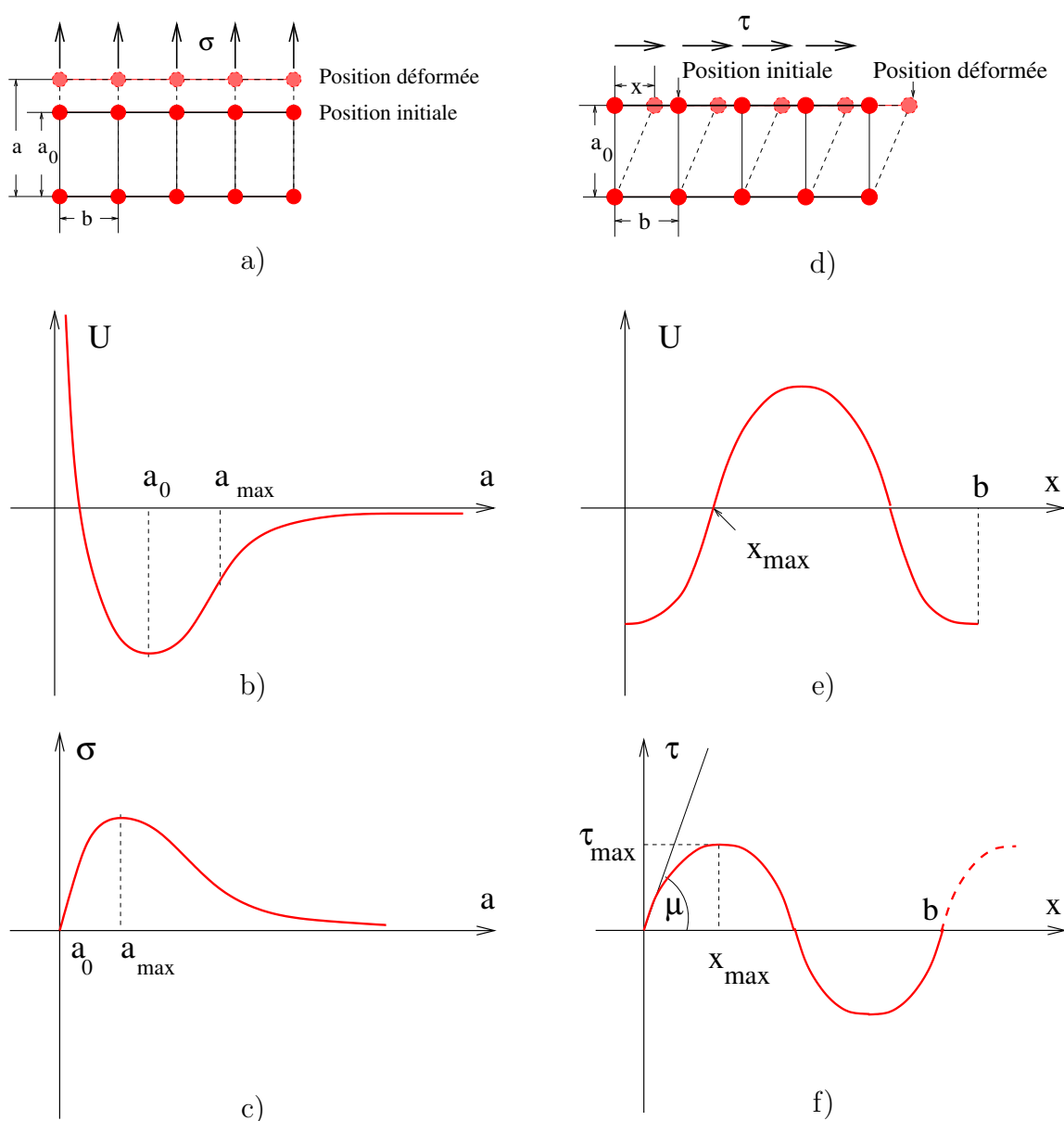


Fig. 1.6: Déformation d'un réseau atomique régulier sous l'effet d'une contrainte. A gauche : traction simple ; à droite : cisaillement. (a) : traction simple, déformation du réseau, (b), traction simple, potentiel, (c) traction simple, contrainte. (d) : cisaillement, déformation du réseau, (e), cisaillement, potentiel, (c) cisaillement, contrainte.

qui les forme peut être distingué⁵. Dans les métaux non alliés (cuivre pur, zinc etc...), le réseau atomique est identique d'un grain à l'autre à une rotation près. Le réseau de base est en effet orienté et possède un certain nombre de symétries qui dépendent du métal considéré (la structure cristallographique du zinc est cubique centrée, celles du cuivre et de l'aluminium sont cubiques à faces centrées, celle du zirconium est hexagonale compacte etc.....). L'orientation du réseau varie d'un grain à l'autre. La déformation macroscopique du métal que l'on mesure dans un essai de traction « simple » se traduit à petite échelle par une déformation des grains. Chacun des grains se déforme en fonction de son orientation propre tout en maintenant la compatibilité de la déformation entre grains adjacents. A une échelle plus fine, la déformation de chaque grain résulte de la déformation du réseau atomique qui le constitue. Nous allons en donner une première description élémentaire qui sera précisée au paragraphe 1.2.2

Aux très faibles déformations, le réseau se déforme par éloignement des plans atomiques par rapport à leur position d'équilibre sans perturbation profonde du réseau. En terme de potentiel d'interaction inter-atomique, le déplacement du réseau par rapport à sa position d'équilibre est suffisamment petit pour rester dans la partie *convexe* du potentiel (figure 1.6b et 1.6e). Dans le cas de l'extension dans une direction (figure 1.6a), la déformation reste élastique tant que la contrainte appliquée n'excède pas σ_{\max} , mais au delà de cette valeur, les plans atomiques s'éloignent à contrainte décroissante. La contrainte σ_{\max} est donc la contrainte de séparation du réseau atomique (contrainte de clivage). Le clivage est le mécanisme dominant de la rupture fragile.

La situation est légèrement différente dans le cas du cisaillement. Dans ce cas une translation d'un pas du réseau atomique le laisse globalement inchangé (à ceci près que les atomes en vis-à-vis avant déformation et après déformation ne sont pas les mêmes). Ceci se traduit par la périodicité du potentiel d'interaction inter-atomique qui peut être schématiquement représenté par une sinusoïde de période b . Tant que le glissement x n'excède pas x_{\max} (τ reste inférieur à τ_{\max}), le réseau revient à sa position initiale lorsqu'on ramène le cisaillement τ à 0. En revanche cette position devient instable lorsque τ atteint τ_{\max} et le plan atomique supérieur retrouve une position d'équilibre stable en se déplaçant d'un pas (figure 1.7). La contrainte τ_{\max} est la *contrainte critique de cisaillement* du cristal. Le glissement est le mécanisme dominant de la *plasticité*. Les glissements successifs sur les différents plans, même de très faible amplitude lorsqu'ils sont considérés séparément, se cumulent pour former une déformation plastique macroscopique significative. Leurs traces sont visibles à l'échelle des grains et même à l'échelle du polycristal (figure 1.8).

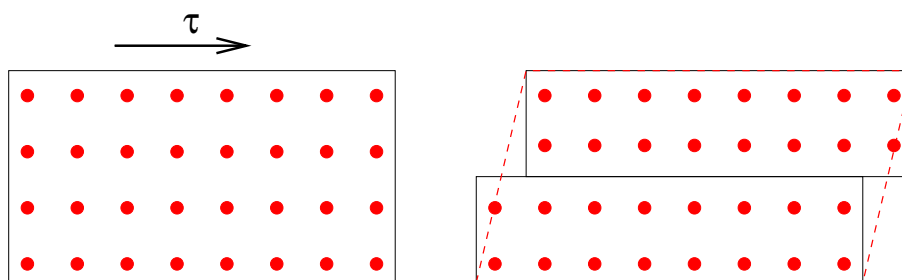


Fig. 1.7: Création d'une déformation par glissement.

Cette représentation bidimensionnelle se complique légèrement dans le cas tridimen-

⁵Il existe des échelles intermédiaires que nous sautons par simplicité.

1.2. DIVERSITÉ DES MÉCANISMES MICROSCOPIQUES

sionnel. Les plans le long desquels se produisent le clivage ou le glissement dépendent de la structure cristallographique du matériau considéré. Pour les matériaux à structure CFC (cubique faces centrées) ces plans sont les plans atomiques *denses*. Puis, dans le cas du glissement, seules des translations dans des directions particulières des plans de glissement laissent le réseau globalement invariant. Dans le cas de la structure CFC représentée sur la figure 1.8a, il existe quatre plans de densité maximale analogues à celui qui est représenté sur la figure (les autres s'en déduisent par permutation des sommets) et, dans chaque plan il y a trois directions de glissement laissant le réseau invariant. Il y a donc douze *systèmes de glissement*, *i.e.* couples $(\underline{n}, \underline{m})$ possibles pour le monocristal. Pour un monocristal, seules les déformations correspondant à des combinaisons de glissements le long de ces systèmes sont possibles. Pour un polycristal formé de grains d'orientation aléatoire, il existe évidemment plus de possibilités. On remarque néanmoins que la déformation par glissement ne s'accompagne *d'aucune variation de volume* que ce soit au niveau du monocristal ou du polycristal. Il faudra s'assurer, lors de la modélisation du comportement plastique, que les lois retenues tiennent compte de cette invariance du volume.

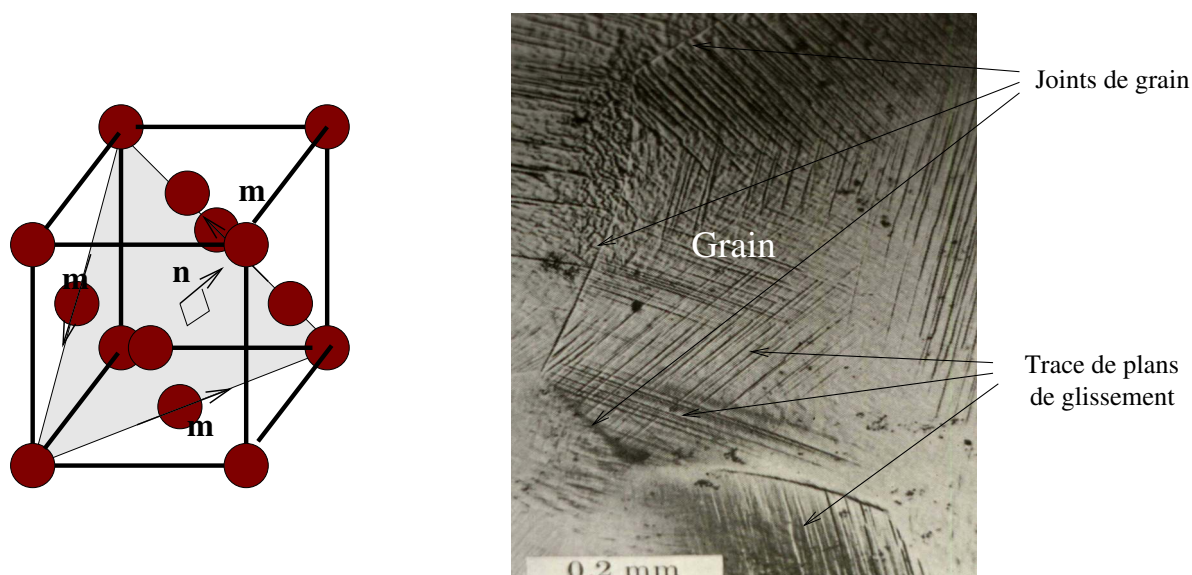


Fig. 1.8: Monocristal et polycristal de Cuivre. (a) Réseau cubique et trois de ses systèmes de glissement. (b) : Traces de glissement. Noter que dans des grains d'orientation différentes les glissements s'effectuent dans des directions différentes.

1.2.2 De la nécessité des défauts...

Que ce soit dans le cas de la rupture par clivage ou du glissement par cisaillement, le schéma présenté précédemment est largement idéalisé. En effet, il suppose que la rupture par clivage ou le glissement plastique se produisent simultanément en tous les points d'un plan atomique. Sous cette hypothèse des estimations simples de la contrainte de clivage et de la contrainte critique de cisaillement peuvent être obtenues. Examinons le cas du cisaillement. La contrainte de cisaillement est, en première approximation, une fonction sinusoidale du déplacement x par rapport à la position d'équilibre (figure 1.6f) :

$$\tau \simeq \tau_{\max} \sin \frac{2\pi x}{b}.$$

Pour x petit, la distorsion (variation d'angle) entre les directions horizontale et verticale est donnée (au premier ordre) par $\gamma = x/a_0$. Le module de cisaillement en transformation infinitésimale ($x \ll b$) n'est autre que la tangente à la courbe (τ, γ) à l'origine :

$$\mu = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = \frac{2\pi a_0}{b} \tau_{\max},$$

et dans le cas d'un réseau cubique (où $a_0 \simeq b$) la contrainte critique de cisaillement et le module de cisaillement devraient, selon ce modèle, être liés par

$$\tau_{\max} \simeq \frac{\mu}{2\pi}.$$

Or l'ordre de grandeur des valeurs observées expérimentalement pour τ_{\max} est généralement nettement inférieur à cette valeur, de l'ordre de $\mu/1000$. C'est donc que l'hypothèse du glissement en mouvement de corps rigide d'un bloc sur l'autre est à remettre en question.

Un calcul de la contrainte de clivage en tous points analogue à celui qui vient d'être fait pour la contrainte critique de cisaillement, donne une estimation de cette contrainte de l'ordre du dixième du module d'Young du matériau, valeur très largement supérieure aux valeurs observées expérimentalement. Il n'y a que dans les échantillons de très petite taille que l'on retrouve ces ordres de grandeur. A nouveau l'hypothèse d'une séparation en bloc le long d'un plan atomique n'est pas réaliste.

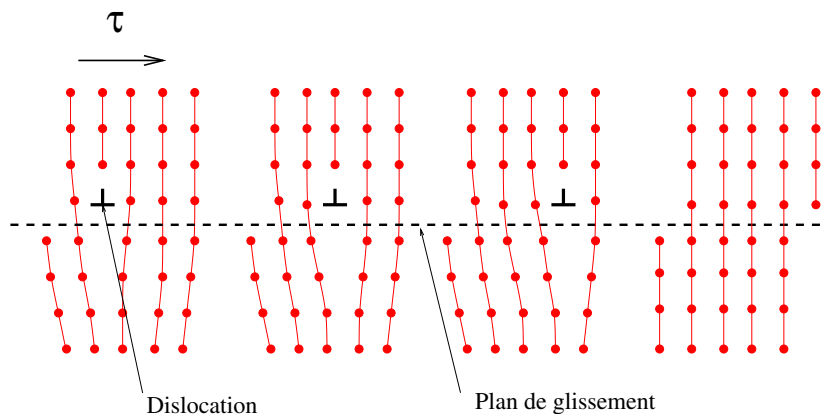


Fig. 1.9: *Mouvement d'une dislocation le long d'un plan de glissement.*

Les faibles valeurs des résistances observées dans les matériaux courants comparativement à ces valeurs théoriques s'expliquent par la *présence de défauts*. Dans les matériaux fragiles, ces défauts sont des *microfissures*. Dans les matériaux ductiles, ce sont des *dislocations*, c'est à dire des lacunes du réseau atomique de base (figure 1.9). Pour en revenir à l'exemple du glissement plastique sous cisaillement, le défaut (la dislocation) se propage de proche en proche jusqu'à déboucher, provoquant ainsi une « marche » analogue à celle que provoquerait un glissement en bloc. Mais la contrainte nécessaire pour faire se propager ce défaut est bien inférieure à la contrainte qu'il faut pour effectuer le mouvement en bloc. Le calcul de cette nouvelle contrainte n'est pas de notre propos mais on peut avoir une perception intuitive du phénomène par l'analogie du « pli dans le tapis » (figure 1.10). Déplacer un lourd tapis en bloc est difficile car il faut vaincre le frottement sur toute la

1.3. CRITÈRES

base du tapis. Tandis qu'en créant un pli dans le tapis, puis en déplaçant le pli, on met en jeu des forces nettement moins importantes puisqu'il suffit de vaincre le frottement sous une partie du tapis. L'effet final est le même lorsque le pli atteint l'extrémité du tapis.

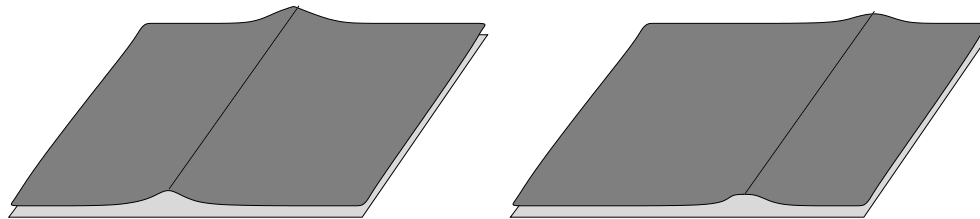


Fig. 1.10: L'analogie du « pli dans le tapis » explique la faible valeur de la contrainte permettant de propager une dislocation.

Les contraintes théoriques sont observables dans des échantillons très purs, en général de très petite taille, car la probabilité de trouver un défaut dans un élément de volume croît avec la taille de cet élément. On observe effectivement des contraintes à rupture proches des valeurs théoriques dans les *whiskers*, qui sont des fibres de très petite taille (quelques microns). Cet effet de taille explique en partie l'intérêt croissant pour les micro et nano-renforts.

1.3 Critères

Comme cela a été vu au paragraphe précédent, le comportement des matériaux présente plusieurs régimes (élastique, non élastique, rupture brutale...). Pour exprimer la transition d'un régime à l'autre, il nous faut disposer de critères. Dans le cas du comportement élastique-fragile, ce critère peut s'exprimer aussi bien en contrainte qu'en déformation (ces deux grandeurs étant proportionnelles jusqu'à la rupture brutale). Mais dans le cas de la plasticité, c'est sur les contraintes que le critère doit porter.

Le problème serait simple s'il ne s'agissait que de traiter les cas où l'état de contrainte est uniaxial : le critère s'exprimerait à l'aide de la seule composante non nulle de $\underline{\sigma}$. Mais en général l'état de contrainte dans une structure est *multiaxial*, c'est à dire que les trois contraintes principales sont non nulles (ou plus simplement, la matrice représentant le tenseur des contraintes dans une base fixe est pleine). Le passage d'essais uniaxiaux à des critères multiaxiaux ne peut se faire sans une modélisation permettant de mesurer l'intensité d'un état triaxial par une quantité scalaire. Dans bien des cas cette modélisation n'est pas unique et il faut avoir recours à des essais multiaxiaux (biaxiaux ou triaxiaux) pour déterminer quelle modélisation et quel critère conviennent le mieux pour un matériau donné. Nous allons passer en revue quelques unes de ces modélisations, renvoyant au chapitre 4 pour une analyse plus approfondie des essais multiaxiaux.

1.3.1 Etude locale des contraintes

Nous supposons le lecteur familier avec la notion de contrainte dont nous ne rappelons que quelques propriétés utiles.

1.3.1.1 Vecteur contrainte

Considérons en un point x fixé du matériau une partition du corps Ω en $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Le vecteur contrainte \underline{T} en \underline{x} est la densité surfacique des efforts exercés en \underline{x} par Ω_1 sur Ω_2 .

Le plan tangent en \underline{x} à l'interface entre Ω_2 et Ω_1 , orienté par la normale \underline{n} extérieure à Ω_2 est appelé *facette* de normale \underline{n} , et subit une densité de forces représentée par le vecteur contrainte \underline{T} (modèle de Cauchy).

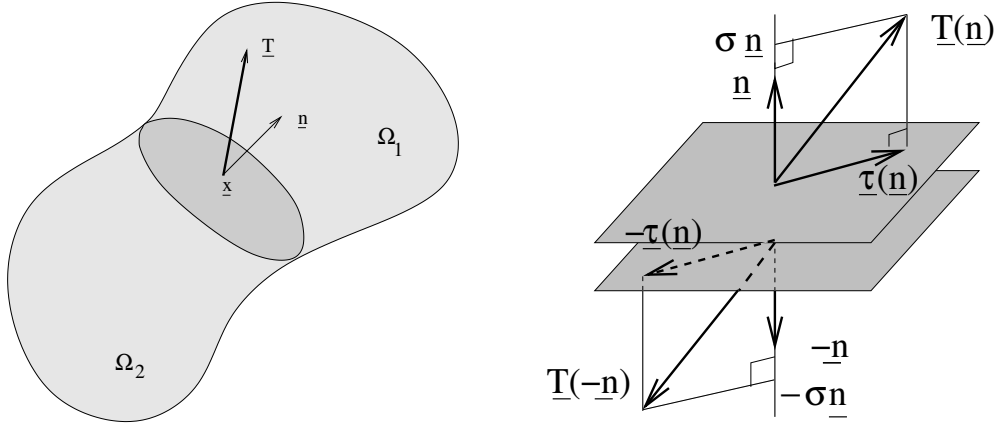


Fig. 1.11: Vecteur contrainte

Contrainte normale, contrainte de cisaillement. Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante normale et sa composante tangentielle :

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \underline{T} \cdot \underline{n} = T_i n_i \quad (\text{contrainte normale}), \\ \underline{\tau} &= \underline{T} - \sigma \underline{n} \quad (\text{contrainte tangentielle ou de cisaillement}). \end{aligned} \right\}$$

σ est un scalaire, tandis que $\underline{\tau}$ est un vecteur de composantes $\tau_i = T_i - \sigma n_i$.

On obtient une interprétation « parlante » des efforts auxquels est soumis le plan tangent en \underline{x} à l'interface entre Ω_2 et Ω_1 en considérant simultanément les deux facettes portées par ce plan, de normales opposées (cf figure 1.11). La facette de normale $-\underline{n}$ (également en \underline{x}) subit l'action de Ω_2 sur Ω_1 , qui par le principe de l'action et de la réaction, est égale à $-\underline{T}$. On note que

$$\sigma(-\underline{n}) = (-\underline{T}) \cdot (-\underline{n}) = \sigma(\underline{n}), \quad \underline{\tau}(-\underline{n}) = -\underline{\tau}(\underline{n}).$$

La contrainte normale est indépendante de l'orientation de la normale à la facette, tandis que la contrainte tangentielle change de signe lorsque la normale change de signe. De plus lorsque $\sigma \geq 0$ la facette subit une *traction*, tandis que lorsque $\sigma \leq 0$ la facette subit une *compression*.

1.3.1.2 Tenseur des contraintes

En l'absence de couple localisé, le vecteur contrainte sur une facette de normale \underline{n} dépend linéairement de cette normale par l'intermédiaire du tenseur des contraintes de Cauchy, $\underline{\underline{\sigma}}$, tenseur symétrique d'ordre 2 :

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}. \quad (1.1)$$

Contraintes principales. Le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique. Il est donc diagonalisable dans une base orthonormée appropriée ($\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$), dite *base principale de contrainte*, et ses

1.3. CRITÈRES

valeurs propres σ_i sont les *contraintes principales*. Il est immédiat de vérifier que (\underline{e}_i) est une base principale de contrainte si et seulement si les cisaillements sur les facettes de normale \underline{e}_i sont nuls. *Une facette principale n'est donc soumise qu'à une contrainte purement normale*. Insistons sur le fait que le vecteur contrainte dépend de la facette considérée et qu'en un même point certaines facettes peuvent être en traction, d'autres peuvent être en compression, tandis que d'autres peuvent être soumises à un cisaillement.

Partie sphérique et déviateur des contraintes. Comme tout tenseur d'ordre 2, le tenseur des contraintes peut être décomposé en partie sphérique et déviateur (cf annexe A, relation (A.5)) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{s}}, \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}). \quad (1.2)$$

L'interprétation de cette décomposition est simple : dans un fluide parfait le tenseur des contraintes se réduit à sa partie hydrostatique $\sigma_m \underline{\underline{i}}$. Dans un milieu continu général, la contribution supplémentaire $\underline{\underline{s}}$ mesure la déviation par rapport à cet état hydrostatique (d'où son nom).

Cisaillement et déviateur des contraintes. Comparons les vecteurs contraintes $\underline{T}(\underline{n})$ et $\underline{T}'(\underline{n})$ associé à un état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et à son déviateur $\underline{\underline{s}}$. On obtient :

$$\underline{T}'(\underline{n}) = \underline{\underline{s}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} - \sigma_m \underline{\underline{i}} \cdot \underline{n} = \underline{T}(\underline{n}) - \sigma_m \underline{n}.$$

Les deux vecteurs contraintes ne diffèrent que par leur contrainte normale :

$$\sigma'(\underline{n}) = \sigma(\underline{n}) - \sigma_m, \quad \tau'(\underline{n}) = \tau(\underline{n}).$$

Les cisaillements associés aux deux états de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{s}}$ sont identiques. Plus généralement si l'on ajoute un terme de pression hydrostatique $p \underline{\underline{i}}$ à un état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ les cisaillements associés aux deux états de contraintes sont identiques. Dit autrement, toute l'information sur le cisaillement sur toutes les facettes de l'espace est entièrement contenue dans le déviateur des contraintes.

1.3.2 Critères portant sur le vecteur contrainte

1.3.2.1 Interface

Considérons pour commencer le cas d'un interface I de normale \underline{n}_I entre deux corps Ω_1 et Ω_2 . Cet interface représente par exemple un collage ou une soudure. Il a une

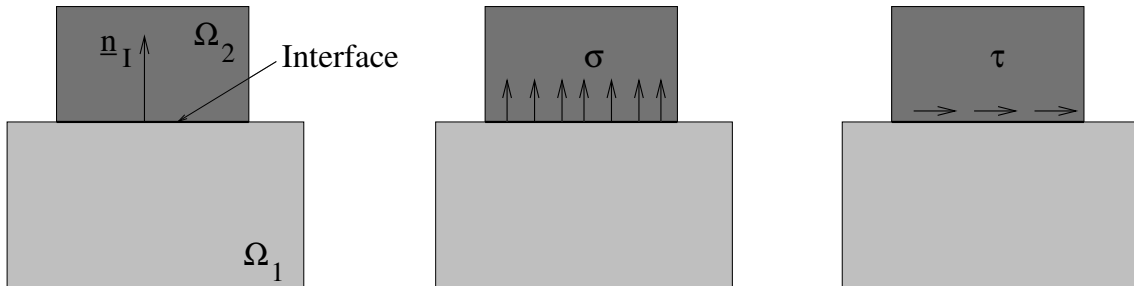


Fig. 1.12: Interface entre deux solides.

1.3. CRITÈRES

En d'autres termes le critère du cisaillement maximal s'écrit également :

$$\sup_{|\underline{n}|=1} |\underline{\tau}(\underline{n})| = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{1}{2} \sup_{1 \leq i, j \leq 3} \sigma_i - \sigma_j \leq k.$$

Le cisaillement critique k peut être déterminé par un essai de traction simple où les contraintes principales sont $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma$. Le cisaillement maximal étant égal à la moitié du diamètre du grand cercle de Mohr (voir section 1.3.2.4) vaut $\sigma/2$ dans un essai de traction simple d'intensité σ . Le cisaillement critique est donc lié à la limite d'élasticité σ_0 en traction simple par : $k = \frac{\sigma_0}{2}$.

1.3.2.4 Représentation de Mohr du vecteur contrainte

La représentation de Mohr offre une « visualisation » commode du vecteur contrainte agissant sur chaque facette d'un élément de volume.

À l'état de contrainte de chaque facette est associé un vecteur $(\sigma, |\underline{\tau}|)$, mesurant la contrainte normale à la facette et l'intensité du cisaillement. Le plan $(\sigma, |\underline{\tau}|)$ est dit plan de Mohr, et cette représentation est appelée *représentation de Mohr*. Lorsque la facette varie (\underline{n} varie), on obtient un ensemble de points dans ce plan de Mohr décrivant l'ensemble des vecteurs contraintes sur les différentes facettes. Les trois points représentatifs des facettes principales sont nécessairement sur l'axe des contraintes normales σ , puisque le cisaillement est nul sur ces facettes et le vecteur contrainte y est purement normal. On convient d'ordonner les contraintes principales par ordre croissant : $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$.

Pour déterminer les points représentatifs des facettes non principales nous allons considérer le cas d'une facette dont la normale \underline{n} est dans un plan principal, par exemple le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$:

$$\underline{n} = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2.$$

On note que le vecteur \underline{T} est dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ et peut donc se décomposer sur la base $\underline{n}, \underline{m}$ où $\underline{m} = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2$. Les composantes σ et τ de \underline{T} dans cette base sont donc

$$\left. \begin{aligned} \sigma = \underline{T} \cdot \underline{n} &= \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cos(2\theta), \\ \underline{\tau} = \tau \underline{m} \quad \text{où} \quad \tau &= (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \theta \cos \theta = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin(2\theta). \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

L'expression précédente montre que le point (σ, τ) se trouve sur le cercle de centre $((\sigma_1 + \sigma_2)/2, 0)$ et de rayon $(\sigma_2 - \sigma_1)/2$ avec pour angle polaire $\pi - 2\theta$ (figure 1.13). On montre ainsi que les vecteurs contrainte correspondant à des normales \underline{n} dans les plans principaux de contrainte décrivent 3 cercles (dits cercles de Mohr). On montre par ailleurs [2] que les vecteurs contrainte correspondant à des normales \underline{n} quelconques sont situés à l'intérieur du plus grand cercle de Mohr et à l'extérieur des deux autres cercles.

Les relations (1.13) permettent d'établir une propriété géométrique très utile en pratique : puisque l'on passe de \underline{e}_1 à la normale \underline{n} à la facette par une rotation d'angle θ dans le plan physique, la traduction géométrique de (1.13) est donc :

Une rotation d'angle θ de la normale dans le plan physique se traduit par une rotation d'angle -2θ dans le plan de Mohr⁷.

⁷Cette rotation peut donc amener le point représentatif du vecteur contrainte $\underline{T}(\underline{n})$ dans le demi-plan inférieur ce qui est incompatible avec la positivité de $|\underline{\tau}|$, il suffit alors d'en prendre le symétrique par rapport à l'axe horizontal.

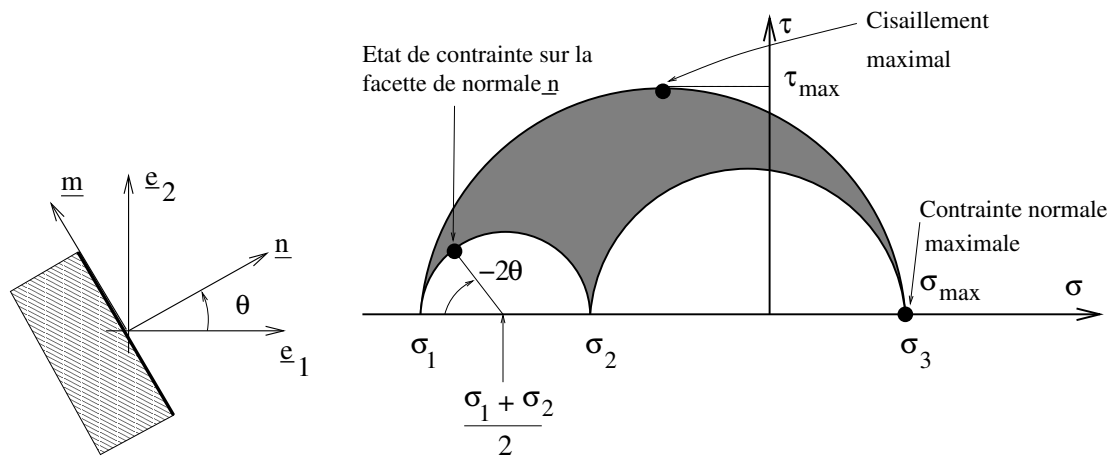


Fig. 1.13: Cercles de Mohr

Exemple. Pour un état de contrainte hydrostatique ($\underline{\sigma} = -p\underline{i}$), les 3 contraintes principales sont égales et les cercles représentatifs de Mohr se réduisent à un simple point situé sur l'axe des contraintes normales en $\sigma = -p$.

Dans le plan de Mohr, la partie sphérique du tenseur des contraintes est donc représentée par un point. Toute l'information sur le cisaillement est donc contenue dans le déviateur des contraintes. Les cercles de Mohr de \underline{s} sont identiques à ceux de $\underline{\sigma}$ à une translation près de $-\sigma_m$ le long de l'axe des contraintes normales.

Le plan de Mohr et la propriété géométrique reliant rotation dans le plan physique et rotation dans le plan de Mohr sont utiles pour repérer rapidement des facettes particulières. Ainsi la facette sur laquelle la contrainte normale est maximale est la facette de normale \underline{e}_3 . Le point représentatif de la facette soumise au cisaillement maximal se trouve, dans le plan de Mohr sur le cercle principal de diamètre (σ_1, σ_3) à $-\pi/2$ de $(\sigma_1, 0)$. Dans le plan physique la normale à la facette en question est donc dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$ et fait un angle de $\pi/4$ avec \underline{e}_1 . La facette faisant un angle de $-\pi/4$ avec \underline{e}_1 est également soumise à un cisaillement égal en valeur absolue au cisaillement maximal : le point représentatif de l'état de contrainte sur cette facette s'obtient par rotation de $+\pi/2$ par rapport à $(\sigma_1, 0)$, mais le module du cisaillement étant positif, se retrouve après symétrie par rapport à l'axe des contraintes normales au point de cisaillement maximal.

On peut également donner une interprétation graphique simple des critères portant sur le vecteur contrainte précédemment énoncés.

Contrainte normale maximale. Les états de contrainte autorisés par le critère sont représentés par des cercles de Mohr situés à gauche de la droite (verticale dans le plan de Mohr) d'équation $\sigma = \sigma_0$. Tout état de contrainte conduisant à des cercles de Mohr coupant cette droite ne respecte pas le critère.

Cisaillement maximal. Les états de contrainte autorisés par le critère sont représentés par des cercles de Mohr situés sous la droite (horizontale dans le plan de Mohr) $\tau = k$. Tout état de contrainte conduisant à des cercles de Mohr coupant cette droite ne respecte pas le critère.

Courbes intrinsèques. On appelle *courbe intrinsèque* d'un matériau isotrope, l'enveloppe des cercles de Mohr obtenus pour les états de contrainte physiquement admissibles par le matériau vis à vis du phénomène dont on cherche à décrire le seuil (plasticité, rupture, comportement visqueux...). Une courbe intrinsèque se caractérise par sa forme dans le plan de Mohr

1.3. CRITÈRES

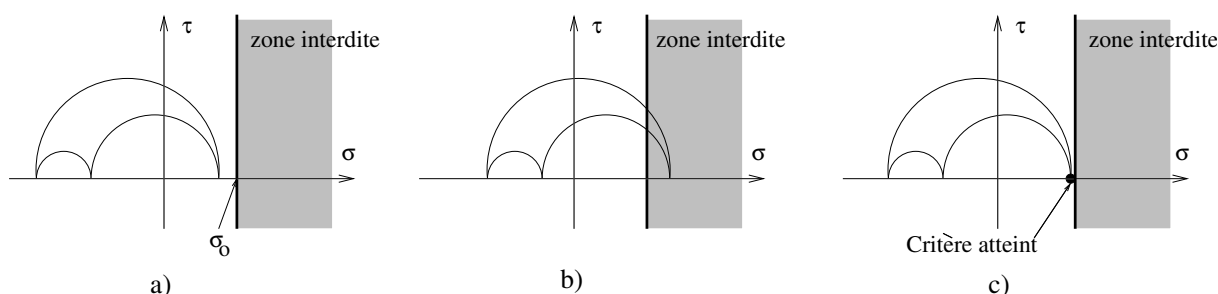


Fig. 1.14: Représentation du critère de la contrainte normale maximale dans le plan de Mohr. L'état de contrainte est représenté par les cercles de Mohr. a) : Etat de contrainte physiquement admissible, le critère n'est pas atteint. b) Etat de contrainte non physiquement admissible. c) Etat limite : critère atteint.

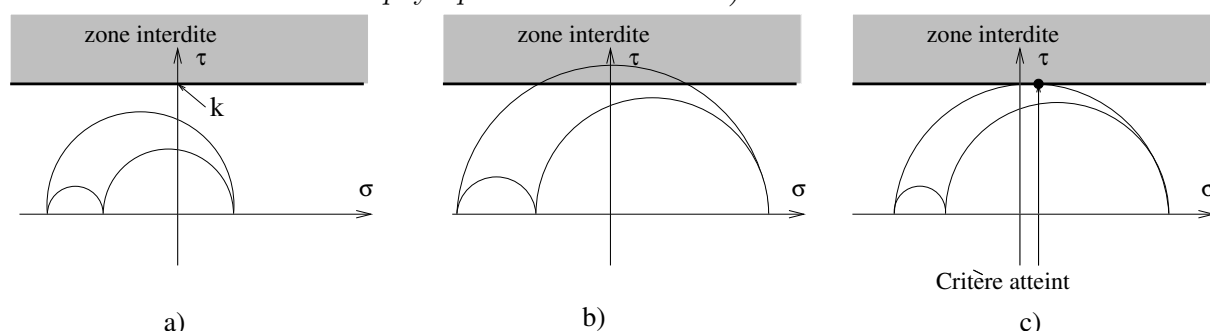


Fig. 1.15: Représentation du critère du cisaillement maximal dans le plan de Mohr. a) : Etat de contrainte physiquement admissible. b) Etat de contrainte non physiquement admissible. c) Etat limite : critère atteint.

et par une équation :

$$f(\sigma, \tau) = 0.$$

Les cercles de Mohr des états de contrainte physiquement admissibles doivent se trouver à l'intérieur de la courbe intrinsèque du matériau. Les états de contrainte physiquement admissibles doivent donc vérifier l'inégalité

$$\sup_{|\underline{n}| = 1} f(\sigma(\underline{n}), |\tau(\underline{n})|) \leq 0.$$

Tous ces critères sont indépendants de la contrainte principale intermédiaire σ_2 , puisque le contact entre les cercles de Mohr et la courbe intrinsèque se fait nécessairement sur le cercle de Mohr le plus extérieur complètement déterminé par σ_1 et σ_3 .

Le critère de la contrainte normale maximale et le critère du cisaillement maximal sont deux courbes intrinsèques particulières qui sont des droites respectivement verticale et horizontale (voir figures 1.14 et 1.15) correspondant aux fonctions f suivantes :

$$\text{Contrainte normale maximale} : f(\sigma, \tau) = \sigma - \sigma_0,$$

$$\text{Cisaillement maximal} : f(\sigma, \tau) = |\tau| - k.$$

D'autres courbes intrinsèques sont d'un usage courant. En mécanique des sols, le critère de Coulomb permet de décrire la résistance de milieux granulaires ou poreux, dont la résistance au cisaillement augmente lorsqu'on augmente la pression appliquée (c'est tout l'intérêt de la compaction). Graphiquement la courbe intrinsèque correspondante est une droite faisant un

angle φ avec l'horizontale et plus ouverte du côté des compressions $\sigma < 0$ (figure 1.16 à droite). Analytiquement ce critère s'exprime par :

$$|\tau| + \sigma \tan \varphi - C \leq 0.$$

C est la *cohésion* du matériau (résistance au cisaillement en l'absence de pression), φ est son *angle de frottement*.

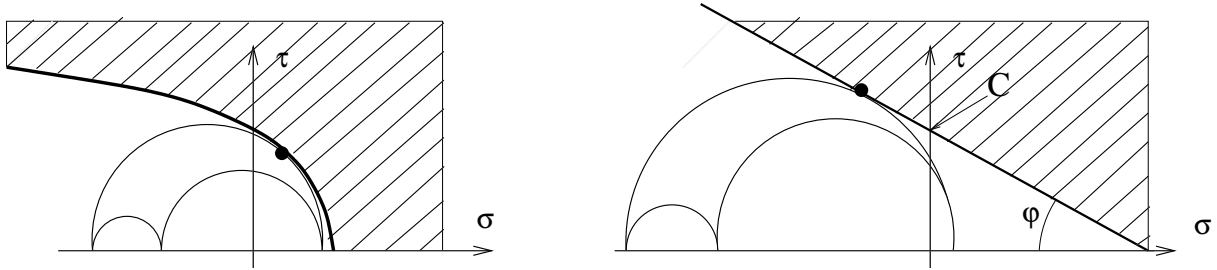


Fig. 1.16: Courbe intrinsèque. Les états de contrainte non physiquement admissibles sont hachurés. A gauche : courbe intrinsèque générale. A droite : critère de Coulomb.

1.3.3 Critères portant sur le tenseur des contraintes

Les critères portant sur le vecteur contrainte nécessitent le calcul de ce vecteur pour chaque facette et sont parfois un peu lourds à mettre en oeuvre. Il est souvent plus commode d'exprimer les seuils directement en fonction du *tenseur* de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ sous la forme

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0,$$

où f est une fonction des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ dans une base préalablement choisie.

1.3.3.1 Critère de von Mises

La plupart des métaux sont essentiellement sensibles au cisaillement. Comme il a été remarqué plus haut, toute l'information sur le cisaillement est contenue dans le *déviateur des contraintes* $\underline{\underline{s}}$. Il est ainsi naturel de mesurer l'intensité du cisaillement pour un état triaxial de contrainte et pour un matériau isotrope (pas de direction privilégiée) par la norme du déviateur des contraintes. Pour des raisons pratiques la norme retenue est celle de la *contrainte équivalente* ou *contrainte de von Mises* qui s'exprime par

$$\sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}. \quad (1.14)$$

Le facteur $3/2$ (plutôt que $1/2$ retenu par certaines normes) tient au fait qu'en traction simple le tenseur des contraintes et son déviateur s'écrivent

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x, \quad \underline{\underline{s}} = \sigma \left(\frac{2}{3} \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x - \frac{1}{3} \underline{\underline{e}}_y \otimes \underline{\underline{e}}_y - \frac{1}{3} \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z \right).$$

La contrainte équivalente définie par (1.14) vaut $|\sigma|$ (grâce au facteur de normalisation $3/2$). Cette contrainte « équivalente » permet donc de ramener un état de contrainte

1.3. CRITÈRES

triaxial à un état de contrainte de traction « équivalent » (d'où le nom) et donc réciproquement de transformer une courbe de traction uniaxiale en loi de comportement triaxiale, moyennant une modélisation appropriée que nous aborderons au chapitre 4.

Le critère de von Mises, d'un usage très courant pour les métaux mais également utilisé pour quantité d'autres matériaux, s'exprime par

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{\text{eq}} - \sigma_0 \leq 0. \quad (1.15)$$

σ_0 est la limite d'élasticité en traction simple du matériau.

Remarques : 1. Les critères de Tresca et de von Mises sont tous deux *insensibles à la pression*. En d'autres termes, si $\underline{\underline{\sigma}}$ vérifie le critère, $\underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{1}}$ vérifie le critère pour tout p . En effet, pour le critère de Tresca on remarque que l'ajout d'une pression ne fait que déplacer les trois cercles de Mohr le long de l'axe horizontal (les trois contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ devenant $\sigma_1 + p, \sigma_2 + p, \sigma_3 + p$) ce qui n'affecte pas le cisaillement maximal $(\sigma_3 - \sigma_1)/2$. En ce qui concerne le critère de von Mises, il suffit de remarquer que $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{1}}$ ont même déviateur et donc même contrainte équivalente.

2. Les critères de Tresca et de von Mises s'appliquent tous deux à des matériaux *isotropes*, ne privilégiant aucune direction physique de l'espace. En d'autres termes leur expression mathématique est invariante par changement de repère. Ce point est clair pour le critère de Tresca puisque le cisaillement maximal $(\sigma_3 - \sigma_1)/2$ est défini de façon intrinsèque, indépendamment de tout repère. Pour le critère de von Mises on remarque que

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} + 3\sigma_m^2.$$

Mais $\sigma_m = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})/3$ et $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}})$ sont des invariants de $\underline{\underline{\sigma}}$. Il en est donc de même de $\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}$ et par suite de σ_{eq} :

La contrainte équivalente σ_{eq} est un invariant du tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$.

3. Les critères de Tresca et de von Mises se ressemblent (outre les points ci-dessus, ils reposent tous deux sur une mesure du cisaillement) mais leurs prédictions pour des états de contrainte triaxiaux sont différentes, comme nous l'analyserons plus en détails au chapitre 5.

1.3.3.2 Matériaux isotropes

Beaucoup d'autres critères exprimant la transition d'un comportement à un autre ont été proposés pour couvrir la diversité des matériaux et de leurs comportements. Les matériaux poreux ou les polymères sont par exemple sensibles à la pression et les transitions de comportement dans ces matériaux ne peuvent s'exprimer par un simple critère de von Mises.

Lorsqu'on se limite aux matériaux isotropes, la fonction f ne dépend que des 3 invariants principaux de $\underline{\underline{\sigma}}$

$$f(\sigma_m, \sigma_{\text{eq}}, \det \underline{\underline{\sigma}}) \leq 0,$$

où, rappelons le :

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}, \quad \det(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}.$$

Par exemple, un critère très répandu pour modéliser le comportement de métaux poreux (rendus sensibles à la pression à cause de leur porosité) est le critère de Gurson

$$f(\underline{\sigma}) = \frac{\sigma_{\text{eq}}^2}{\sigma_0^2} + 2p \operatorname{ch} \left(\frac{3\sigma_m}{2\sigma_0} \right) - 1 - p^2, \quad (1.16)$$

où p désigne ici la porosité du matériau. Pour $p = 0$, on retrouve le critère de von Mises.

1.3.3.3 Matériaux anisotropes

Beaucoup de matériaux sont également *anisotropes* (roches, composites, tôles laminées) et des critères anisotropes doivent être utilisés pour modéliser leur comportement.

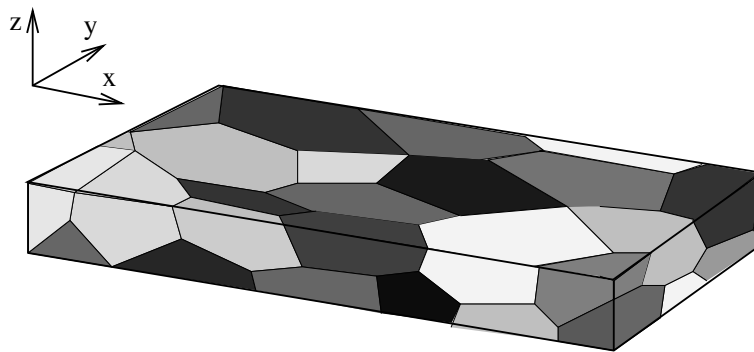


Fig. 1.17: Anisotropie induite par le laminage : changement de forme des grains.

Pour les matériaux *orthotropes*, c'est à dire possédant 3 plans de symétrie orthogonaux, le critère le plus simple est le critère de Hill, initialement proposé pour décrire la plasticité des tôles laminées. Le laminage, qui consiste à faire passer un lopin métallique entre deux rouleaux, induit une forte anisotropie du matériau après traitement : les grains s'allongent dans le sens long (x), un peu moins dans le sens travers long (y), et sont raccourcis dans le sens travers court (z).

Le critère de Hill s'écrit :

$$f(\underline{\sigma}) = (F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2) + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 - 1. \quad (1.17)$$

Les quantités $1/\sqrt{G+H}$, $1/\sqrt{F+H}$ et $1/\sqrt{F+G}$ sont les limites d'élasticité dans les directions x (sens « long »), y (sens « travers long ») et z (sens « travers court ») de la tôle, tandis que $1/\sqrt{2L}$, $1/\sqrt{2M}$ et $1/\sqrt{2N}$ sont les limites d'élasticité en cisaillement entre ces différentes directions. Leur identification nécessite des essais de traction dans les trois directions (délicat pour le sens travers court, on procède autrement) ainsi que des essais de cisaillement entre les différentes directions.

Nous nous sommes limités ici à un critère polynômial de degré deux. Il existe bien d'autres critères anisotropes de degrés plus élevés.

Formules et résultats essentiels

- **Tenseur de contrainte**

- ▷ Tenseur du second ordre symétrique : $\underline{\underline{\sigma}} = {}^T \underline{\underline{\sigma}}$.
- ▷ Diagonalisable :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{e}_1 + \sigma_2 \underline{e}_2 + \sigma_3 \underline{e}_3.$$

σ_i : contraintes principales. \underline{e}_i directions principales de contrainte.

- ▷ Décomposition en partie sphérique et déviateur :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{s}}, \quad \sigma_m = (1/3) \text{Tr} \underline{\underline{\sigma}}, \quad \text{Tr} \underline{\underline{s}} = 0.$$

$\underline{\underline{s}}$ déviateur des contraintes.

- **Vecteur contrainte**

- ▷ Sur une facette de normale \underline{n} : $\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma(\underline{n}) \underline{n} + \underline{\tau}(\underline{n})$.
- ▷ $\sigma(\underline{n})$: contrainte normale. $\underline{\tau}(\underline{n})$: cisaillement.

- **Critère de la contrainte normale maximale (matériaux fragiles)**

- ▷ Expression du critère :

$$\text{Sup}_{|\underline{n}|=1} \sigma(\underline{n}) = \text{Sup}_{1 \leq i, j \leq 3} \sigma_i \leq \sigma_0.$$

- ▷ Critère atteint sur la facette principale correspondant à la plus grande contrainte principale.

- **Critère de Tresca (matériaux ductiles)**

- ▷ Critère du cisaillement maximal.
- ▷ Expression du critère :

$$2 \text{ Sup}_{|\underline{n}|=1} |\underline{\tau}(\underline{n})| = \text{Sup}_{1 \leq i, j \leq 3} (\sigma_i - \sigma_j) \leq \sigma_0.$$

- ▷ Critère atteint sur les facettes ayant pour normales les bissectrices des directions \underline{e}_1 et \underline{e}_3 .

- **Critère de von Mises (matériaux ductiles)**

- ▷ Contrainte équivalente de von Mises (norme quadratique du cisaillement) :

$$\sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}.$$

- ▷ Expression du critère :

$$\sigma_{\text{eq}} - \sigma_0 \leq 0.$$

1.4 Exercices

Exercice 1. Rupture d'une craie en torsion. *Le critère de la contrainte normale maximale permet d'interpréter une petite expérience de mécanique élémentaire. On soumet un bâton de craie à une torsion jusqu'à rupture. Si tout se passe bien, celle-ci se produit selon une hélice orientée à 45° du plan de la section droite. En se basant sur la solution du problème de la torsion en élasticité linéaire traité en annexe (section A.4.1), on admettra que l'état de contrainte dans la craie est un état de cisaillement entre les directions $(\underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ de la forme :*

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau(r) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad (1.18)$$

Expliquer l'allure de la rupture. S'agit-il d'une rupture en traction ou en cisaillement (en d'autres termes le matériau obéit-il en première approximation au critère de la contrainte normale maximale ou au critère du cisaillement maximal ?)

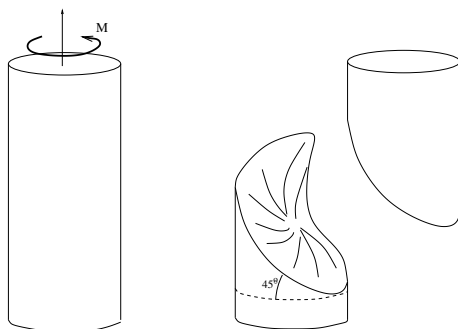


Fig. 1.18: Rupture hélicoïdale d'une craie en torsion.

Éléments de réponse

Il est facile de vérifier que l'état de contrainte (1.18) est statiquement admissible avec les données du problème (équations, d'équilibre dans Ω , bord latéral libre de contrainte, composante axiale de l'effort nul sur les bases inférieure et supérieure). En suivant l'énoncé, nous admettrons donc que l'état de contrainte est de la forme (1.18). Un calcul simple montre que cet état de contrainte peut être diagonalisé dans la base $\underline{u} = (\underline{e}_\theta + \underline{e}_z)/\sqrt{2}$, $\underline{v} = (\underline{e}_\theta - \underline{e}_z)/\sqrt{2}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{u} \otimes \underline{u} - \underline{v} \otimes \underline{v}).$$

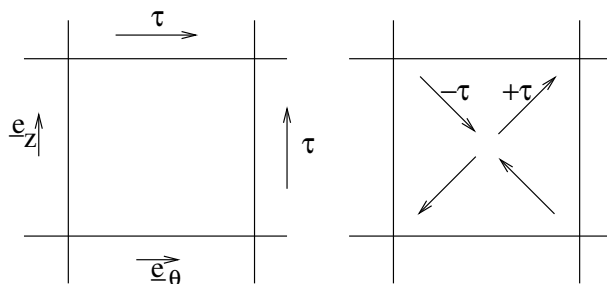


Fig. 1.19: Etat de contrainte en torsion. A gauche : représentation du vecteur contrainte dans les directions \underline{e}_θ et \underline{e}_z . A droite : représentation du vecteur contrainte dans les directions principales de contrainte.

1.4. EXERCICES

Les directions principales et les contraintes principales associées sont \underline{e}_r , associé à la contrainte principale 0, et les deux directions \underline{u} et \underline{v} , bissectrices des directions \underline{e}_θ et \underline{e}_z , associées aux contraintes principales $+\tau$ et $-\tau$. La facette le long de laquelle se produit la rupture, première bissectrice des directions \underline{e}_θ et \underline{e}_z , est celle qui correspond à la plus grande contrainte principale $+\tau$. C'est donc elle qui est soumise à la *traction maximale*. Contrairement à ce que laisserait penser une analyse hâtive, la rupture se produit en traction, et non en cisaillement, sur la facette soumise à la plus grande contrainte de traction. Le matériau constituant la craie est donc plutôt de type fragile (ce qui n'est pas vraiment une surprise).

Exercice 2. Lien entre le critère de von Mises et le critère de Tresca. *Le critère de Tresca est un critère de cisaillement maximal,*

$$\sup_{|\underline{n}|=1} |\underline{\tau}(\underline{n})| \leq \frac{\sigma_0}{2}, \quad (1.19)$$

et s'exprime donc à l'aide de la « norme du Sup » sur toutes les facettes (repérées par leur normale \underline{n}).

On se propose de montrer que le critère de von Mises s'exprime à l'aide d'une « norme quadratique » de la contrainte de cisaillement sur les facettes en établissant la relation suivante :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{|\underline{n}|=1} |\underline{\tau}(\underline{n})|^2 ds(\underline{n}) = \frac{2}{15} \sigma_{eq}^2. \quad (1.20)$$

L'intégrale qui figure à gauche de (1.20) est la moyenne sur toutes les facettes possibles du carré de la contrainte de cisaillement $\underline{\tau}(\underline{n})$. La normale \underline{n} varie alors sur la sphère unité dont la surface est 4π . Pour une fonction $f(\underline{n})$ dépendant de l'orientation, on notera

$$\langle f \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{|\underline{n}|=1} f(\underline{n}) ds(\underline{n}).$$

Pour établir (1.20) on pourra procéder de la façon suivante :

- Exprimer $\underline{\tau}(\underline{n})$ en fonction de $\underline{\sigma}$ et \underline{n} . Montrer que $\underline{\tau}(\underline{n})$ ne dépend pas de σ_m et peut s'exprimer uniquement en fonction de \underline{s} et \underline{n} .
- Etablir (1.20) en utilisant les relations suivantes

$$\langle \underline{n} \otimes \underline{n} \rangle = \frac{1}{3} \underline{\underline{I}}, \quad \langle \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \rangle = \frac{1}{3} \underline{\underline{J}} + \frac{2}{15} \underline{\underline{K}}, \quad (1.21)$$

où $\underline{\underline{J}}$ et $\underline{\underline{K}}$ sont les projecteurs sur, respectivement, les tenseurs d'ordre 2 purement sphériques et les tenseurs symétriques d'ordre 2 purement déviatoriques (voir annexe A) :

$$\underline{\underline{J}} = \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}, \quad \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{J}}, \quad (1.22)$$

où $\underline{\underline{I}}$ est le tenseur d'ordre 4 représentant l'identité entre tenseurs symétriques d'ordre 2.

- Pour établir les relations (1.21) (sans calcul pesant) on rappelle qu'un tenseur isotrope d'ordre 2 est purement sphérique, tandis qu'un tenseur isotrope d'ordre 4 possédant toutes les symétries d'un tenseur d'élasticité est de la forme $\underline{\underline{\Lambda}} = \alpha \underline{\underline{J}} + \beta \underline{\underline{K}}$ où α et β se calculent simplement en fonction de Λ_{ijij} et Λ_{iijj} (voir annexe A, relations (A.8)).

Eléments de réponse

a) On note tout d'abord que :

$$\underline{\tau}(\underline{n}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} - (\underline{n} \cdot \underline{\sigma}) \underline{n} = \underline{s} \cdot \underline{n} + \sigma_m \underline{n} - (\underline{n} \cdot \underline{s}) \underline{n} - \sigma_m \underline{n} = \underline{s} \cdot \underline{n} - (\underline{n} \cdot \underline{s}) \underline{n}.$$

Le vecteur cisaillement ne dépend donc pas de la contrainte moyenne σ_m et son calcul peut donc s'effectuer sur le déviateur des contraintes. Par suite⁸ :

$$\begin{aligned} |\underline{\tau}(\underline{n})|^2 &= |\underline{s} \cdot \underline{n}|^2 - |\underline{n} \cdot \underline{s}|^2 = s_{ij} n_j s_{ik} n_k - (n_i s_{ij} n_j)(n_k s_{kh} n_h) \\ &= \text{tr}(\underline{s} \cdot (\underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot \underline{s}) - \underline{s} : (\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}) : \underline{s}. \end{aligned}$$

b) Compte tenu des relations de moyennes tensorielles et du fait que \underline{s} ne dépend pas de la variable \underline{n} sur laquelle l'intégration est faite, on obtient :

$$\langle |\underline{\tau}(\underline{n})|^2 \rangle = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{s} \cdot \underline{i} \cdot \underline{s}) - \underline{s} : \left(\frac{1}{3} \underline{\underline{J}} + \frac{2}{15} \underline{\underline{K}} \right) : \underline{s}.$$

Mais

$$\text{tr}(\underline{s} \cdot \underline{i} \cdot \underline{s}) = \underline{s} : \underline{s}, \quad \underline{s} : \underline{\underline{J}} : \underline{s} = 0, \quad \underline{s} : \underline{\underline{K}} : \underline{s} = \underline{s} : \underline{s},$$

les deux dernières égalités étant obtenues grâce aux définitions de $\underline{\underline{J}}$ ($\underline{\underline{J}} : \underline{s}$ est la partie sphérique de \underline{s} qui est nulle) et $\underline{\underline{K}}$ ($\underline{\underline{K}} : \underline{s}$ est la projection de \underline{s} sur les déviateurs donc égale à \underline{s}). En conclusion

$$\langle |\underline{\tau}(\underline{n})|^2 \rangle = \frac{1}{5} \underline{s} : \underline{s} = \frac{2}{15} (\sigma_{\text{eq}})^2.$$

Le critère de von Mises porte sur le *second moment* du cisaillement

$$\langle |\underline{\tau}(\underline{n})|^2 \rangle^{1/2} \leq \sqrt{\frac{2}{15}} \sigma_0, \quad (1.23)$$

tandis que le critère de Tresca porte sur le moment d'ordre infini du cisaillement (valeur maximale).

$$\| \underline{\tau}(\underline{n}) \|_{\infty} = \sup_{|\underline{n}|=1} |\underline{\tau}(\underline{n})| \leq \frac{\sigma_0}{2}. \quad (1.24)$$

On peut par analogie introduire des critères portant sur des moments d'ordre quelconque du cisaillement :

$$\| \underline{\tau}(\underline{n}) \|_p = \langle |\underline{\tau}(\underline{n})|^p \rangle^{1/p}.$$

c) *Etablissement des relations de moyennes tensorielles.* La moyenne $\langle \underline{n} \otimes \underline{n} \rangle$ se fait sur toutes les directions de l'espace (avec le même poids sur chacune) et donne donc un résultat isotrope de la forme $\lambda \underline{\underline{i}}$. Il suffit d'identifier les traces des deux tenseurs et on obtient $\lambda = 1/3$ (compte tenu de l'égalité $n_i n_i = 1$).

De la même façon, le tenseur d'ordre 4 $\langle \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \rangle$ est isotrope (aucune direction n'est privilégiée) et possède les symétries mineures et majeures des tenseurs d'élasticité. Il peut donc s'écrire sous la forme :

$$\langle \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \rangle = \alpha \underline{\underline{\underline{J}}} + \beta \underline{\underline{\underline{K}}},$$

avec (annexe A relation (A.8))

$$\alpha = \frac{1}{3} \langle n_i n_i n_j n_j \rangle = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{5} \left(\langle n_i n_j n_i n_j \rangle - \frac{1}{3} \langle n_i n_i n_j n_j \rangle \right) = \frac{2}{15}.$$

⁸Une démonstration *intrinsèque* est possible, mais nous avons choisi de présenter un calcul avec indices, plus sûr pour ceux qui ne sont pas familiers avec les tenseurs.

Chapitre 2

Singularités de contrainte et ténacité des matériaux

Introduction et cadre de travail...

Nous avons souligné dans le chapitre précédent la présence inévitable de *défauts* au sein de tout élément de volume de matière étudié. Ces défauts sont essentiels pour comprendre l'ordre de grandeur des limites d'élasticité des matériaux courants. Lorsque le matériau considéré est *fragile*, les déformations plastiques y sont suffisamment localisées pour ne pas être significatives à l'échelle macroscopique.

La Mécanique linéaire de la Rupture (ou *Mécanique de la Rupture Fragile*) a pour objet l'étude, *dans le cadre de l'élasticité linéarisée*, de l'effet d'un défaut de forme sur les champs mécaniques régnant au voisinage de ce défaut et sur l'extension éventuelle de ce défaut. Plus précisément le cadre est le suivant :

- ▷ *les déformations sont suffisamment petites pour que l'hypothèse des petites perturbations soit légitime,*
- ▷ *les matériaux étudiés ont un comportement élastique et linéaire (et ils seront le plus souvent homogènes et isotropes),*
- ▷ *les transformations sont suffisamment lentes pour pouvoir se placer dans l'approximation d'une évolution¹ quasi-statique (les termes d'accélération sont négligés).*

Dans le cadre de ces hypothèses, on montre que le champ de contrainte est singulier (c'est à dire infini) en pointe de fissure. Cette singularité se mesure à l'aide de *facteurs d'intensité des contraintes*, permettant de définir *la ténacité* d'un matériau, propriété matérielle mesurant l'aptitude d'un matériau à supporter un fort gradient de contrainte. De la notion de ténacité d'un matériau découle celle de *taille critique des défauts* dans une structure.

La Mécanique linéaire de la Rupture s'est beaucoup développée dans la seconde moitié du vingtième siècle, motivée par une série d'accidents sur des structures diverses et causés par des défauts non détectés lors de la construction : bateaux (les *Liberty ships*²),

¹Le terme « évolution » désigne de façon générale tout état physique dépendant du temps.

²Cargos construits par les USA entre 1939 et 1945 pour le ravitaillement des troupes alliées, construit en très grande série. Rupture par fatigue des premiers exemplaires fabriqués, mise sur le compte d'une

avions (notamment le Comet³), réservoirs de propulseurs (notamment les propulseurs à poudre de la NASA) et réservoirs sous pression (de gaz notamment). Mais le domaine d'application de cette théorie ne se limite pas aux structures métalliques. Elle s'applique également aux *roches*, aux *céramiques* et aux *polymères* (dans une certaine gamme de température). Les échelles d'application sont également très diverses puisqu'elles vont des microsystèmes (Silicium) à la géomécanique de l'écorce terrestre (création et propagation de failles).

2.1 Concentration de contrainte au voisinage d'un défaut de forme elliptique

Un défaut de forme dans une structure provoque une concentration de contrainte au voisinage de ce défaut. Considérons par exemple une éprouvette plane de traction simple. En l'absence de défaut, l'état de contrainte au centre de l'éprouvette est uniaxial :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^\infty \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y.$$

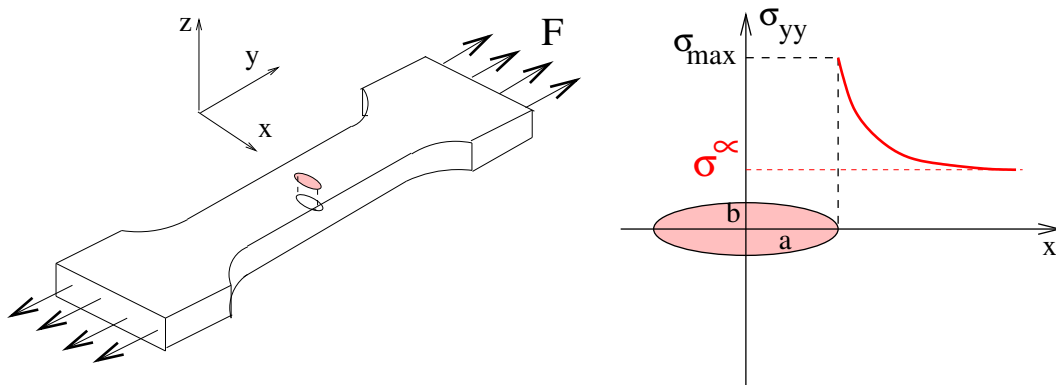


Fig. 2.1: Epreuve trouée

Si l'on introduit en son centre un trou elliptique, de grand axe a et petit axe b , traversant toute l'éprouvette, le champ de contrainte précédent est modifié pour satisfaire la condition de bord libre sur le bord du trou. Une constatation immédiate est que la section de l'éprouvette est réduite à l'endroit du trou. La force à transmettre d'une extrémité à l'autre de l'éprouvette étant constante, la composante de la contrainte perpendiculairement à la direction de traction va être supérieure dans la section réduite par le défaut⁴. On doit donc s'attendre à des contraintes locales plus élevées au voisinage du trou. Mais l'amplification des contraintes est en fait un phénomène encore plus local, non uniforme dans la section droite contenant le trou.

Dans le cadre de travail rappelé en introduction (élasticité linéaire), le champ de contrainte qui règne dans l'éprouvette peut être calculé, numériquement en général, et analytiquement pour un défaut de petite taille par rapport aux dimensions de l'éprouvette.

fragilisation induite par le soudage.

³Premier avion à réaction destiné au transport commercial de passagers, construit par De Havilland (Grande-Bretagne). Premier vol en 1949. Rupture par fatigue du fuselage à proximité des hublots, en vol à haute altitude, provoquant un crash.

⁴ $\sigma = F/S$, donc σ augmente si S diminue.

2.2. SINGULARITÉ DE CONTRAINTE EN FOND D'ENTAILLE

Les calculs sont longs pour une cavité elliptique et nous ne les développerons pas⁵. Nous retiendrons du résultat de ce calcul les informations suivantes :

- Aux extrémités du grand axe de l'éprouvette, la composante σ_{yy} du tenseur des contraintes est supérieure à σ^∞ :

$$\sigma_{yy}(a, 0) = \sigma^\infty \left(1 + 2\frac{a}{b}\right). \quad (2.1)$$

On montre par ailleurs que cette valeur de σ_{yy} est la plus grande contrainte normale $\sigma(\underline{n}, \underline{x})$, parmi tous les points \underline{x} de l'éprouvette et toutes les orientations possibles de la normale \underline{n} . *Le facteur de concentration de contraintes*

$$R = 1 + 2(a/b),$$

exprime donc la plus grande contrainte locale, qui est atteinte au voisinage du défaut, en fonction de la contrainte qui règnerait dans l'éprouvette sans défaut.

- Pour $b = a$, cavité circulaire, le facteur de concentration de contrainte est égal à 3, facteur bien connu des « riveteurs » du siècle dernier. Le rivetage des structures, mode d'assemblage courant des structures métalliques avant l'invention de la soudure⁶, présente en effet l'inconvénient d'introduire des concentrations de contrainte dont il faut tenir compte dans le dimensionnement.
- Le champ de contrainte dans l'éprouvette perforée n'est plus uniaxial, comme le champ à l'infini, mais *multi-axial*. Pour une éprouvette mince l'état de contrainte est plan et les composantes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ sont non nulles. Dans une éprouvette épaisse, ou pour un défaut non traversant, l'état de contrainte est triaxial.
- Le facteur de concentration de contrainte est d'autant plus grand que la courbure est faible. En d'autres termes, à surface égale, un défaut elliptique aplati (ellipse ayant un grand axe et un petit axe très différents) sera plus nocif qu'un trou circulaire.
- Lorsque b tend vers 0 (l'ellipse s'aplatit pour devenir une fissure), le facteur de concentration de contrainte tend vers $+\infty$ ce qui traduit une *singularité* du champ de contrainte et non plus une simple amplification de ce champ. L'analyse de cette singularité de contrainte fait l'objet du paragraphe suivant.

2.2 Singularité de contrainte en fond d'entaille

Nous nous intéressons maintenant au champ de contrainte au voisinage d'une entaille dans un corps constitué d'un matériau élastique, linéaire, homogène, isotrope. La forme du domaine Ω occupé par le corps est quelconque, mais régulière, à l'exception d'une entaille. Ce corps est soumis à des efforts imposés sur une partie de son bord, à des déplacements imposés sur la partie complémentaire. Pour simplifier, les forces de volume sont supposées nulles et le problème est posé en déformations planes. L'origine des coordonnées est choisie en fond d'entaille. L'entaille est symétrique par rapport à Ox et son demi-angle d'ouverture ω est compris entre $\pi/2$ et π (cf figure 2.2).

⁵La section 2.4 propose cependant de traiter à titre d'exercice le cas d'un trou de section circulaire ($a = b$). Le lecteur intéressé par le cas général pourra consulter Maugis [15].

⁶Le rivetage est toujours en usage dans certaines structures composites dont le collage est parfois très délicat.

On s'intéresse au comportement asymptotique du champ de contrainte en fond d'entaille, lorsque r tend vers 0. Le résultat principal de cette section est le suivant :

Quel que soit le corps considéré et le chargement appliqué, le champ de contrainte solution du problème d'élasticité linéaire posé sur un corps contenant une entaille est singulier en fond d'entaille :

$$\sigma_{ij} \sim r^\alpha f_{ij}(\theta) \quad \text{au voisinage de } r = 0, \quad \text{avec } \alpha < 0. \quad (2.2)$$

α ne dépend que de la géométrie de l'entaille (il est en particulier indépendant de la géométrie du corps et du chargement). En revanche les fonctions f_{ij} dépendent de la géométrie du corps et du chargement appliqué.

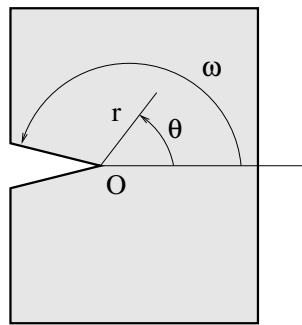


Fig. 2.2: Epreuve entaillée.

Commentaires

1. Il y a donc une différence fondamentale entre un défaut de forme régulière, au bord duquel les contraintes sont amplifiées mais restent finies, et une entaille anguleuse au fond de laquelle les contraintes sont infinies. On peut évidemment discuter la validité de cette singularité, puisque des contraintes infinies entraînent des déformations infinies en fond d'entaille (par la loi de comportement), alors qu'une hypothèse de base de notre calcul est que les déformations sont infinitésimales. Il est vraisemblable que la prise en compte de grandes déformations et d'un comportement plus réaliste du matériau pourra modifier cette conclusion. En dépit de cette (petite) contradiction, le résultat ci-dessus s'avère en pratique fort utile comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre.

2. La différence de sévérité entre un défaut anguleux (rayon de courbure nul) et un défaut régulier (rayon de courbure fini) est illustré sur la figure 2.3. Une éprouvette contenant deux entailles, l'une semi-circulaire (à gauche), l'autre anguleuse (à droite) est soumise à une traction simple.

3. La différence entre concentration et singularité de contrainte peut être utilisée pour supprimer la singularité de contrainte au bord d'un défaut anguleux et en stopper l'avancement : il suffit souvent d'en « arrondir » la pointe en y perçant des trous circulaires⁷. Les congés en fabrication mécanique ont également pour but d'éviter les zones à forte courbure qui sont des lieux de concentration de contrainte.

⁷Procédé connu sous le nom de méthode SNCF!

2.2. SINGULARITÉ DE CONTRAINTE EN FOND D'ENTAILLE



Fig. 2.3: Nocivité des défauts. La pièce ci-dessus, contenant une entaille circulaire (à gauche) et une entaille en V (à droite) a été soumise à une traction dans la direction horizontale. La fissure s'initie sur l'entaille en V au bord de laquelle les contraintes sont singulières.

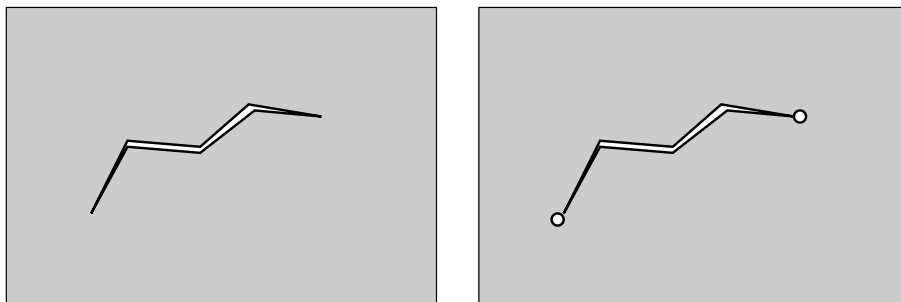


Fig. 2.4: Réduction du facteur de concentration de contrainte à la pointe d'un défaut. A droite : défaut initial. A gauche : défaut émoussé.

Preuve de (2.2) : La démonstration qui suit repose sur le calcul de la fonction d'Airy du problème (on trouvera à l'annexe A quelques rappels d'élasticité linéaire, notamment sur la résolution de problèmes plans à l'aide de la fonction d'Airy).

Afin de déterminer le comportement asymptotique des contraintes au voisinage de la pointe de l'entaille, on cherche le développement de la fonction d'Airy du problème d'élasticité sous la forme

$$\Phi(r, \theta) = r^{\alpha+2}g(\theta) \quad \text{au voisinage de } O.$$

La fonction d'Airy est une fonction biharmonique : $\Delta\Delta\Phi = 0$. Le Laplacien s'exprime en coordonnées polaires par :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}. \quad (2.3)$$

En cherchant le développement de Φ au voisinage de $r = 0$ sous la forme indiquée $r^{\alpha+2}g(\theta)$ on obtient

$$\Delta\Phi = [(\alpha + 2)^2g(\theta) + g''(\theta)]r^\alpha = h(\theta)r^\alpha,$$

puis, en posant $\beta = \alpha + 2$

$$\Delta(\Delta\Phi) = [\alpha^2h(\theta) + h''(\theta)]r^{\alpha-2} = [g^{(4)}(\theta) + (\beta^2 + \alpha^2)g''(\theta) + \alpha^2\beta^2g(\theta)]r^{\alpha-2}.$$

g est donc solution de l'équation différentielle à coefficients constants :

$$g^{(4)}(\theta) + (\alpha^2 + \beta^2)g''(\theta) + \alpha^2\beta^2g(\theta) = 0. \quad (2.4)$$

Les solutions de (2.4) sont de la forme $Ae^{p\theta}$, où p vérifie

$$p^4 + (\alpha^2 + \beta^2)p^2 + \alpha^2\beta^2 = 0. \quad (2.5)$$

Les solutions de (2.5) sont $p^2 = -\alpha^2$ et $p^2 = -\beta^2$, et les solutions de (2.4) s'écrivent donc

$$g(\theta) = A\cos(\beta\theta) + B\sin(\beta\theta) + C\cos(\alpha\theta) + D\sin(\alpha\theta).$$

Les conditions aux limites du problème sont :

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0 \text{ pour } \theta = \pm\omega.$$

Compte tenu des relations (A.14) entre $\underline{\sigma}$ et Φ ,

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2},$$

les conditions aux limites s'écrivent

$$g'(\theta) = g(\theta) = 0 \text{ pour } \theta = \pm\omega,$$

i.e

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta\omega) & \sin(\beta\omega) & \cos(\alpha\omega) & \sin(\alpha\omega) \\ \cos(\beta\omega) & -\sin(\beta\omega) & \cos(\alpha\omega) & -\sin(\alpha\omega) \\ -\beta\sin(\beta\omega) & \beta\cos(\beta\omega) & -\alpha\sin(\alpha\omega) & \alpha\cos(\alpha\omega) \\ \beta\sin(\beta\omega) & \beta\cos(\beta\omega) & \alpha\sin(\alpha\omega) & \alpha\cos(\alpha\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant la somme et la différence des lignes 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part, ce système 4×4 peut être réduit à deux systèmes 2×2 :

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta\omega) & \cos(\alpha\omega) \\ \beta\sin(\beta\omega) & \alpha\sin(\alpha\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin(\beta\omega) & \sin(\alpha\omega) \\ \beta\cos(\beta\omega) & \alpha\cos(\alpha\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

L'existence d'une solution non nulle à l'un de ces systèmes linéaires n'est possible que si le déterminant du système considéré est nul. L'annulation du déterminant du premier système s'écrit⁸ :

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\cos(\beta\omega)\sin(\alpha\omega) - \beta\sin(\beta\omega)\cos(\alpha\omega) \\ &= \frac{(\alpha + \beta)}{2} [\cos(\beta\omega)\sin(\alpha\omega) - \sin(\beta\omega)\cos(\alpha\omega)] \\ &+ \frac{(\alpha - \beta)}{2} [\sin(\beta\omega)\cos(\alpha\omega) + \cos(\beta\omega)\sin(\alpha\omega)] \\ &= -(\alpha + 1)\sin(2\omega) - \sin(2(\alpha + 1)\omega) \end{aligned}$$

L'exposant α est donc solution de :

$$\sin(2(\alpha + 1)\omega) = -(\alpha + 1)\sin(2\omega),$$

ou encore

$$\frac{\sin(2(\alpha + 1)\omega)}{2(\alpha + 1)\omega} = -\frac{\sin(2\omega)}{2\omega}. \quad (2.7)$$

L'existence d'une solution non nulle pour le second système de (2.6) conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\sin(2(\alpha + 1)\omega)}{2(\alpha + 1)\omega} = \frac{\sin(2\omega)}{2\omega}. \quad (2.8)$$

Compte tenu des relations entre les composantes du tenseur des contraintes et la fonction d'Airy Φ , les contraintes varient comme r^α au voisinage de $r = 0$. Le champ de contrainte sera donc singulier en fond d'entaille si $\alpha < 0$. D'autre part, l'énergie élastique du système doit rester finie : $\psi \sim \sigma^2 \sim r^{2\alpha}$ qui n'est intégrable dans \mathbb{R}^2 que lorsque $\alpha > -1$. En résumé, on recherche α solution de (2.7) et/ou (2.8)

2.3. SINGULARITÉ DE CONTRAINTE À LA POINTE D'UNE FISSURE PLANE.

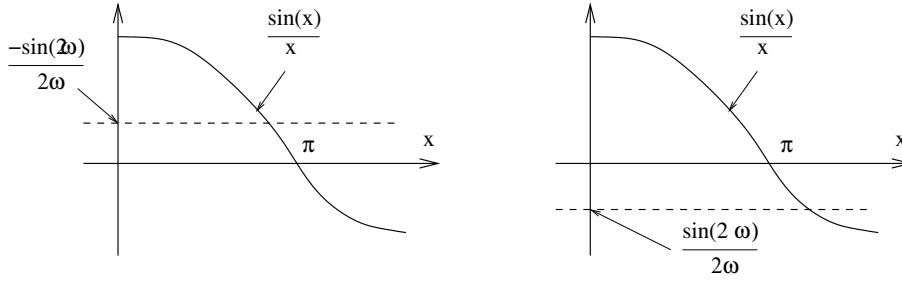


Fig. 2.5: Résolution graphique des équations (2.7) (à gauche) et (2.8) (à droite).

en se limitant aux valeurs supérieures à -1 . La plus petite solution donnera le terme dominant dans le développement et seules les solutions négatives donneront lieu à des contraintes singulières. La résolution des équations (2.7) (2.8) se fait graphiquement (cf figure 2.5) en posant $x = 2(\alpha + 1)\omega$. On cherche la plus petite racine positive des équations $\sin(x)/x = \pm \sin(2\omega)/2\omega$.

Pour $\frac{\pi}{2} \leq \omega < \pi$ (correspondant à une entaille), $\sin(2\omega)$ est négatif et la première solution positive $x = 2(\alpha + 1)\omega$ de l'équation (2.7) est inférieure à π ce qui correspond à une valeur de α dans l'intervalle $] -1, 0[$, donc à une singularité des contraintes. Nous pouvons déjà affirmer que :

les contraintes au voisinage de la pointe de l'entaille sont singulières.

La solution de l'équation (2.8) est supérieure à π , ce qui correspond à une valeur positive de α qui n'entraîne pas de singularité, sauf lorsque $\omega = \pi$. Ce cas nécessite une étude particulière menée au paragraphe suivant.

Les constantes A, B, C, D ne sont pas déterminées par cette analyse. Elles sont déterminées par le comportement de la fonction d'Airy en dehors du voisinage du fond d'entaille. Elles dépendent donc de la géométrie du corps et du chargement appliqué.

Le raisonnement ci-dessus montre qu'en cherchant des singularités algébriques aux équations de l'élasticité dans les domaines polygonaux, on en trouve effectivement. En revanche il n'établit pas que *les seules singularités sont algébriques* (elles pourraient être logarithmiques ou d'une autre nature). Ce résultat est néanmoins exact, mais plus difficile à démontrer. On en trouvera la preuve dans Grisvard [13] ainsi qu'une étude complète du comportement des solutions de l'élasticité dans les domaines polygonaux.

2.3 Singularité de contrainte à la pointe d'une fissure plane.

2.3.1 Modes plans

Une fissure plane est un cas particulier d'entaille correspondant à un demi-angle d'ouverture $\omega = \pi$. Dans ce cas $\sin(2\omega) = 0$ et les deux équations (2.7) et (2.8) ont le même ensemble de solutions. La plus petite solution $\alpha > -1$ est alors

$$\alpha = -1/2.$$

Nous avons donc établi le résultat suivant :

Le champ de contrainte est singulier en fond de fissure (au voisinage du point O) :

$$\sigma_{ij} \sim \frac{f_{ij}(\theta)}{\sqrt{r}} \quad \text{au voisinage de } r = 0. \quad (2.9)$$

⁸le calcul qui suit tient compte de l'égalité $\beta = \alpha + 2$

où les fonctions f_{ij} dépendent de la géométrie du corps considéré et du chargement appliqué.

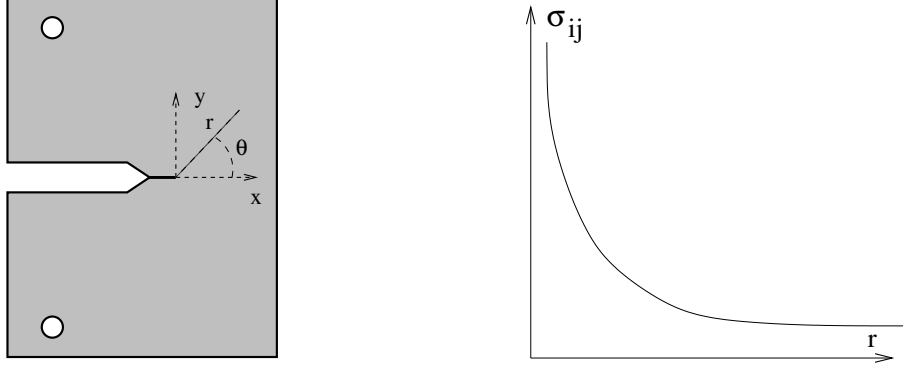


Fig. 2.6: Singularités des contraintes en pointe de fissure.

Preuve de (2.9) : $\alpha = -1/2$ est solution des équations (2.7) et (2.8). En revenant alors au système (2.6), on vérifie sans difficulté que les coefficients A, B, C et D sont liés par $C = 3A$ et $B = D$. Le développement asymptotique au voisinage de $r = 0$ de la fonction d'Airy du problème d'élasticité posé sur un corps contenant une fissure s'écrit alors, indépendamment de la forme du reste du corps et du chargement appliqué :

$$\Phi(r, \theta) = r^{3/2} \left[A \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + 3A \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + B \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right].$$

On en déduit par les relations (A.14) les expressions asymptotiques des différentes composantes des contraintes :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &\sim \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[5\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[-5\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &\sim \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[-3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \\ \sigma_{r\theta} &\sim \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

où on a posé $K_I = 3A\sqrt{2\pi}$ et $K_{II} = -B\sqrt{2\pi}$. Par application de la loi de comportement on en déduit les composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ puis par intégration les composantes de $\underline{\underline{\xi}}$. Le résultat final s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \xi_r &\sim \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(5 - 8\nu)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-5 + 8\nu)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \\ \xi_\theta &\sim \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-7 + 8\nu)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-7 + 8\nu)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Commentaires.

1. Les expressions (2.10) montrent que les contraintes en pointe de fissure sont des multiples de fonction *universelles* multipliées par des coefficients K_I et K_{II} . Ces coefficients, *et eux seuls*, dépendent de la géométrie de la pièce et du chargement appliqué.

2.3. SINGULARITÉ DE CONTRAINTE À LA POINTE D'UNE FISSURE PLANE.

2. K_I et K_{II} mesurent la sévérité de la singularité en pointe de fissure. On les appelle *facteurs d'intensité des contraintes* en mode I et mode II respectivement.

3. La discontinuité de déplacement sur les lèvres de la fissure se déduit de (2.11) :

$$[[\underline{\xi}]] = \underline{\xi}(r, +\pi) - \underline{\xi}(r, -\pi) \sim \frac{4(1-\nu)K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \underline{e}_x + \frac{4(1-\nu)K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \underline{e}_y. \quad (2.12)$$

En mode I pur ($K_I \neq 0$, $K_{II} = 0$), la discontinuité de déplacement portée par \underline{e}_y est purement normale au plan de la fissure. *Le mode I est le mode d'ouverture de la fissure.*

En mode II pur ($K_I = 0$, $K_{II} \neq 0$), la discontinuité de déplacement portée par \underline{e}_x est parallèle à la fissure dans son plan. *Le mode II est le mode de cisaillement plan de la fissure.* Ces deux modes sont représentés sur la figure 2.7.

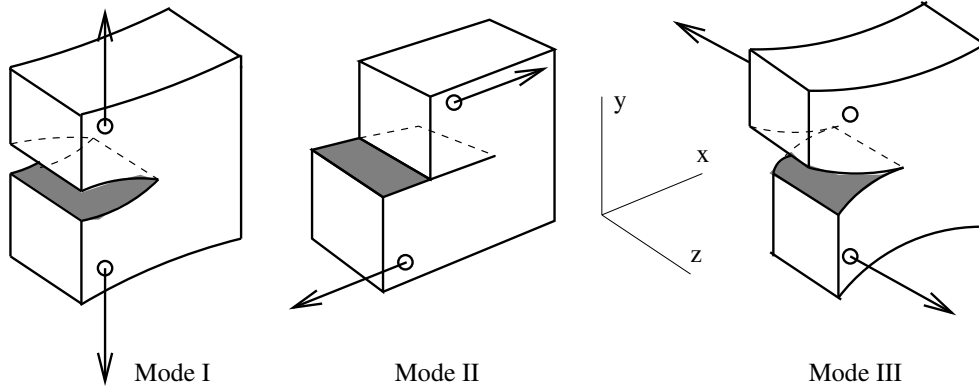


Fig. 2.7: Les trois modes de rupture

2.3.2 Mode anti-plan

Le calcul ci-dessus mené en élasticité plane peut également être mené en élasticité anti-plane (voir l'annexe A pour des rappels sur l'élasticité anti-plane et l'exercice 2 de la section 2.4 pour l'établissement détaillé de la solution). Le résultat est alors de la même teneur que pour les modes I et II (singularité des contraintes en $r^{-1/2}$) et le comportement asymptotique des champs de contrainte et de déplacement est :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rz} &\sim \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ \sigma_{\theta z} &\sim \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ \xi_z &\sim \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Commentaire : La discontinuité du déplacement est parallèle au plan de la fissure, mais hors du plan du domaine étudié. *Le mode III est le mode de cisaillement anti-plan de la fissure* (cf figure 2.7).

2.3.3 Fissures tridimensionnelles

Une fissure tridimensionnelle est une coupure \mathcal{F} de forme quelconque au sein du milieu déformable. Cette coupure possède en réalité deux faces physiques bien distinctes \mathcal{F}^+ et \mathcal{F}^- , appelées *lèvres* de la fissure, qui se confondent avec \mathcal{F} lorsque la fissure est fermée mais qui s'en distinguent dès que la fissure s'ouvre (cf figure 2.8).

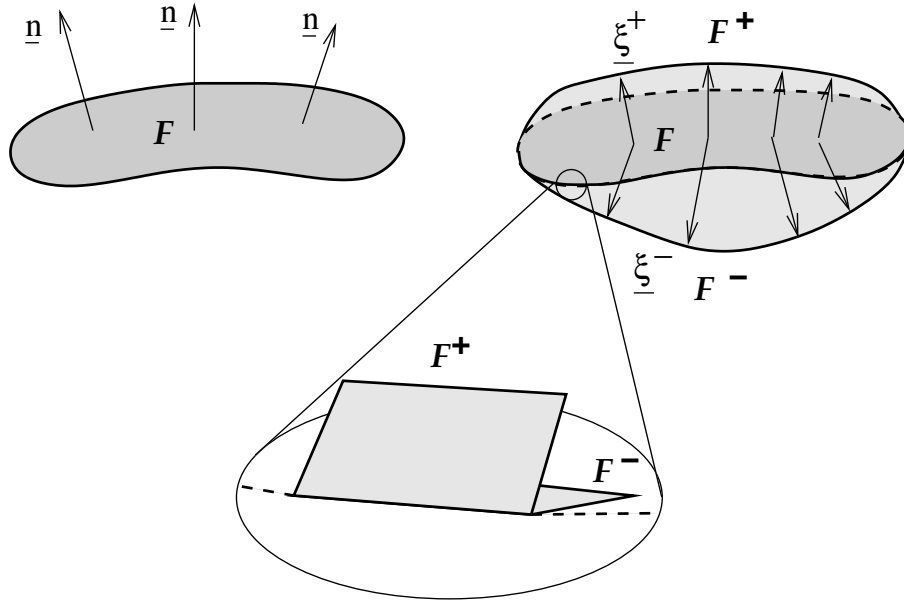


Fig. 2.8: Géométrie d'une fissure tridimensionnelle. Avant ouverture (en haut à gauche) et après ouverture (en haut à droite). Zoom local permettant de « redresser » le front de fissure (en bas).

Puisque nous travaillons dans la configuration initiale (H.P.P.), l'ouverture de la fissure se traduit par une discontinuité du champ de déplacements $\underline{\xi}$ à la traversée de \mathcal{F} , notée

$$\llbracket \underline{\xi}(x) \rrbracket = \underline{\xi}^+(x) - \underline{\xi}^-(x).$$

La composante normale de cette discontinuité $\llbracket \underline{\xi} \rrbracket \cdot \underline{n}$ est l'ouverture de la fissure, exprimant la séparation des lèvres \mathcal{F}^+ et \mathcal{F}^- (la normale \underline{n} choisie ici est la normale sortante sur \mathcal{F}^- : $\underline{n} = \underline{n}^- = -\underline{n}^+$). Une condition unilatérale portant sur cette composante exprime que les lèvres de la fissure ne peuvent que s'écarter (et non s'interpénétrer). De plus, l'effort exercé par une lèvre de la fissure sur l'autre ne peut être qu'une compression et, localement, la fissure est libre de contrainte lorsqu'elle est ouverte :

$$\left. \begin{array}{l} \text{en tout point } \underline{x} \text{ de } \mathcal{F} : \llbracket \underline{\xi}(x) \rrbracket \cdot \underline{n}(x) \geq 0, \quad \underline{\sigma}(x) = \sigma_{ij}(x) n_j(x) n_i(x) \leq 0, \\ \text{avec de plus :} \\ \underline{T}(x) = \underline{\underline{\sigma}}(x) \cdot \underline{n}(x) = \underline{0} \quad \text{si } \llbracket \underline{\xi}(x) \rrbracket \cdot \underline{n}(x) > 0 \quad (\text{ouverture de la fissure}). \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

Si on suppose de plus que le frottement entre les lèvres de la fissure est nul, la contrainte de cisaillement $\underline{\tau}$ est nulle quel que soit l'état d'ouverture ou de fermeture de la fissure.

2.3. SINGULARITÉ DE CONTRAINTE À LA POINTE D'UNE FISSURE PLANE.

Les conditions unilatérales (2.14) introduisent dans l'analyse des champs de contrainte et de déplacements une non linéarité difficile, souvent incompatible avec une détermination analytique de ces champs. Ainsi, pour éviter cette difficulté technique, non essentielle dans un premier temps, nous simplifierons les conditions (2.14) en supposant que la fissure est libre de contrainte :

$$\underline{T}(x) = \underline{\sigma}(x) \cdot \underline{n}(x) = \underline{0} \quad \text{en tout point de } \mathcal{F}. \quad (2.15)$$

On établit alors le résultat général suivant :

En élasticité linéaire homogène et isotrope, en supposant les lèvres de fissure libres de contrainte (hypothèse (2.15)), le champ de contrainte dans un corps fissuré présente en pointe de fissure un comportement asymptotique en $1/\sqrt{r}$ où r désigne la distance à la pointe de fissure :

$$\sigma_{ij} = \frac{f_{ij}(\theta)}{\sqrt{r}} + \eta(r, \theta), \quad \lim_{r \rightarrow 0} \eta(r, \theta) < +\infty. \quad (2.16)$$

Nous ne démontrerons pas ce résultat tridimensionnel. Voici cependant quelques éléments de la démarche. Tout d'abord il faut se rappeler que le résultat recherché est *asymptotique*. On peut donc effectuer une carte locale (« zoom » local) qui permet de « redresser » le front de fissure (cf figure 2.8 en bas). La recherche du comportement asymptotique des contraintes au voisinage d'un front de fissure courbe est ainsi ramené à la détermination du comportement asymptotique de ces contraintes au voisinage d'un front droit. Si la géométrie de la fissure est ainsi ramenée à une géométrie plane avec un front droit et infini, le problème (le chargement) n'est pas encore tout à fait plan. On montre dans un second temps (Leblond [14]) que le caractère tridimensionnel du chargement n'introduit pas de solutions singulières supplémentaires par rapport au cas bidimensionnel que nous avons traité.

2.3.4 Facteurs d'intensité des contraintes

La relation (2.16) établit le caractère *universel* de l'exposant $-1/2$ dans la singularité des contraintes, indépendant de la géométrie de l'éprouvette, du matériau la constituant (élastique linéaire isotrope) et du chargement appliqué. En revanche, les facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} et K_{III} dépendent de ces données. Pour un défaut donné dans une structure de géométrie donnée, la détermination des facteurs d'intensité des contraintes se fait en général numériquement. Dans certains cas particuliers, des résultats analytiques exacts peuvent être établis. En voici quelques exemples correspondant aux géométries de la figure 2.9 :

Fissure de longueur ℓ dans un milieu infini :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \frac{\ell}{2}} \cos^2 \alpha, \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi \frac{\ell}{2}} \cos \alpha \sin \alpha \quad (\text{résultat exact}). \quad (2.17)$$

Fissure semi-circulaire débouchante peu profonde dans une plaque infinie :

$$K_I = \sigma \sqrt{1.2\pi \ell} \quad (\text{approché}). \quad (2.18)$$

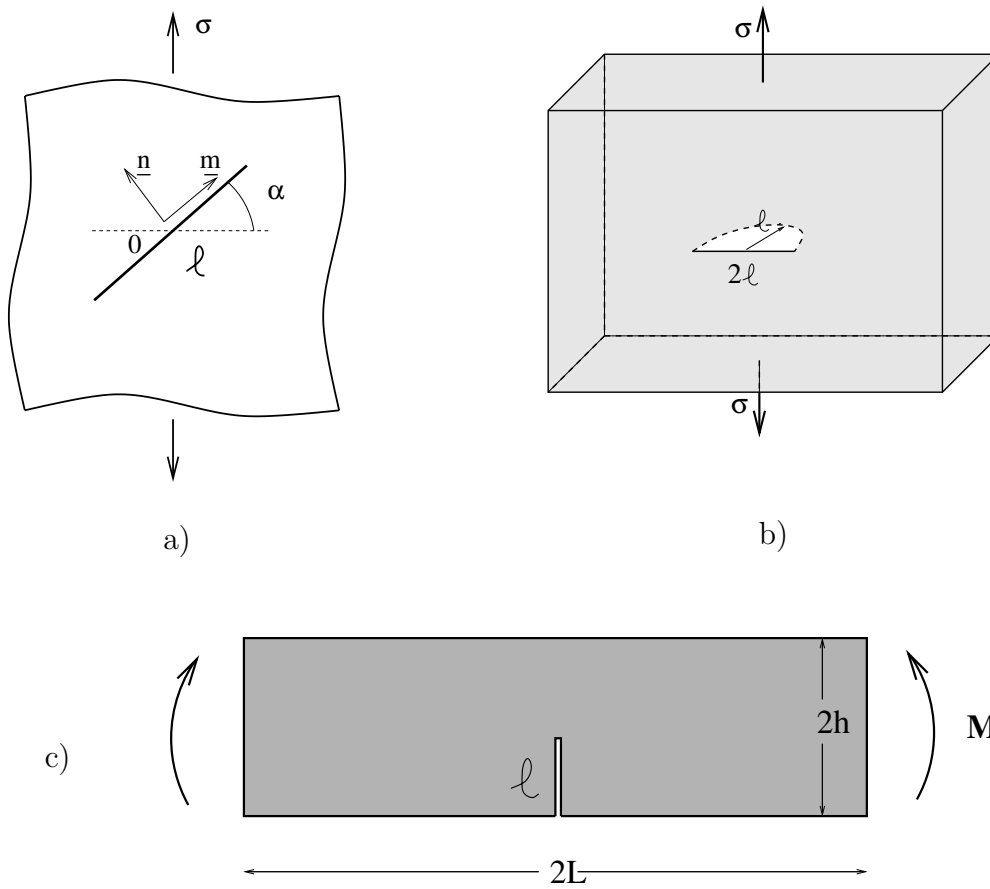


Fig. 2.9: Géométries de fissures. a) Fissure de longueur ℓ en milieu infini (bidimensionnel). b) Fissure semi-circulaire débouchante dans une plaque infinie. c) Barreau en flexion pure.

Barreau en flexion pure :

$$\left. \begin{aligned} \text{Pour } \frac{L}{h} > 4 : \quad K_I = f\left(\frac{\ell}{2h}\right) \sigma \sqrt{\pi \ell}, \quad \sigma = \frac{3M}{2bh^2}, \quad b \text{ épaisseur du barreau,} \\ f(m) = 1.122 - 1.4m + 7.33m^2 \dots (\text{approché}). \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

D'une façon plus générale, une analyse dimensionnelle simple montre que les facteurs d'intensité des contraintes sont de la forme :

$$K = \sigma \sqrt{\pi \ell} f(\ell, \text{géométrie éprouvette}), \quad (2.20)$$

où σ a la dimension d'une contrainte et dépend linéairement du chargement, ℓ est une longueur relative à la géométrie de la fissure et f est une fonction sans dimension de la géométrie de la fissure et de l'éprouvette.

Les facteurs d'intensité des contraintes ont été calculés (de façon exacte ou approchée) pour des géométries et des chargements très variés. Ils sont regroupés dans des catalogues tels que le *Handbook of stress intensity factors* (Sih [17]).

2.3.5 Propagation d'une fissure en mode I. Notion de ténacité.

Les facteurs d'intensité des contraintes K_I, K_{II}, K_{III} qui figurent dans les expressions asymptotiques des contraintes en pointe de fissure mesurent la *sévérité* de la singularité des contraintes. Ils dépendent de la forme de la pièce et du chargement appliqué.

Le critère de propagation de fissure proposé par G. Irwin en 1957 porte sur ces facteurs d'intensité des contraintes, et plus précisément sur le mode I, qui est le mode d'ouverture, caractérisé par K_I . Ce mode est intuitivement le plus dangereux (ce qui est cohérent avec le critère de la contrainte normale maximale). Irwin postule que :

Il existe une valeur critique de K_I , appelée ténacité et notée K_{Ic} , en deçà de laquelle la fissure n'évolue pas et pour laquelle la fissure avance. Cette ténacité K_{Ic} est une caractéristique du matériau indépendante de la géométrie de l'éprouvette.

Dans le cas d'une fissure plane de longueur ℓ , ce critère s'écrit donc :

$$\left. \begin{array}{l} K_I < K_{Ic} \Rightarrow \dot{\ell} = 0 \quad : \text{fissure fixe} \\ K_I = K_{Ic} \Rightarrow \dot{\ell} > 0 \quad : \text{avancée de la fissure} \end{array} \right\} \quad (2.21)$$

On notera l'analogie avec les critères en contrainte présentés au chapitre 1, à ceci près que le critère ne porte pas sur le tenseur de contrainte lui-même, mais sur le facteur d'intensité des contraintes. L'hypothèse majeure de la théorie d'Irwin est que la ténacité est une caractéristique « matériau » au même titre que le module d'Young E ou le coefficient de Poisson ν . Cette hypothèse est difficile à justifier autrement que par son efficacité et la notion de ténacité est maintenant très largement utilisée pour dimensionner les structures.

On trouvera dans la tableau ci-dessous des ordres de grandeur de la ténacité de quelques matériaux courants.

Alliage d'aluminium	$K_{Ic} \simeq 30\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$
Alliage de titane	$K_{Ic} \simeq 100\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$
Acier trempé	$K_{Ic} \simeq 120\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$
Polymère	$K_{Ic} \simeq 3\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$
Bois	$K_{Ic} \simeq 2\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$
Béton	$K_{Ic} \simeq 1\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$

Commentaire. Lorsque la fissure est sollicitée en mode mixte (superposition des modes I, II,III) le critère du K_{Ic} ne s'applique pas directement. Sauf situation très particulière où la fissure est guidée (cas d'une fissure se propageant à l'interface entre deux solides de ténacités très élevées, l'interface étant faible), il y a fréquemment *bifurcation* de la fissure qui se réoriente dans la direction de mode I pur et continue sa propagation selon ce mode. Le critère du K_{Ic} s'applique à nouveau après bifurcation.

2.3.6 Taille critique des défauts

Le critère du K_{Ic} permet de déterminer la taille critique des défauts admissibles dans une structure de géométrie donnée soumise à des sollicitations données. Revenons en

effet à l'expression générale du facteur d'intensité des contraintes (2.20), dans laquelle la contrainte σ et la géométrie de l'éprouvette (notée \mathcal{E} dans la suite) sont données. Lorsque la fonction f est une fonction croissante⁹ de ℓ , l'application du critère du K_{Ic} entraîne une limitation de la taille des défauts pour un chargement donné :

$$\sigma\sqrt{\pi\ell}f(\ell, \mathcal{E}) \leq K_{Ic} \Rightarrow \ell \leq \ell_c, \quad \text{avec} \quad \ell_c f^2(\ell_c, \mathcal{E}) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma} \right)^2.$$

ℓ_c est la taille critique des défauts pour un chargement donné.

Si la structure contient des fissures d'une taille supérieure à ℓ_c elle est dangereuse car ces fissures risquent de se propager sous ce chargement.

Pour illustrer ce propos considérons une plaque, suffisamment grande pour pouvoir être supposée infinie, constituée d'un matériau de ténacité $K_{Ic} = 30\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$, de limite élastique $\sigma_0 = 300\text{MPa}$. Cette plaque est sollicitée en déformation plane par une traction dans la direction \underline{e}_y de sorte que le facteur d'intensité en mode I, mode le plus dangereux, est ici :

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi\frac{\ell}{2}} \cos^2\alpha,$$

où ℓ désigne la longueur d'une éventuelle fissure. La longueur critique d'un défaut se déduit du critère du K_{Ic} :

$$K_I < K_{Ic} \Rightarrow \ell < \ell_c(\alpha) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma} \right)^2 \frac{1}{\cos^4\alpha}.$$

Si on confond toutes les orientations en prenant le minimum de $\ell_c(\alpha)$ (atteint pour $\alpha = 0$ ce qui confirme l'évidence physique selon laquelle les défauts les plus dangereux sont situés perpendiculairement à la direction de traction) on obtient :

$$\ell_c = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma} \right)^2. \quad (2.22)$$

On souhaite utiliser la plaque en toute sûreté jusqu'à sa limite élastique σ_0 qui est donc la contrainte à considérer dans (2.22). On obtient alors une longueur critique de $\ell_c = 6.3\text{mm}$.

En conclusion, si on dispose d'un moyen de contrôle permettant de détecter des défauts de 6 mm, la plaque peut être considérée comme sûre. Si on ne peut pas détecter les défauts d'une telle taille, la plaque doit être considérée comme dangereuse. La contrainte d'utilisation doit être diminuée pour ramener la taille critique ℓ_c (2.22) dans les limites du pouvoir séparateur du dispositif de contrôle.

On voit sur cet exemple (mais le raisonnement est plus général) que la ténacité d'un matériau est aussi une mesure de sa *tolérance au dommage*. Plus la ténacité est élevée, plus la longueur critique des défauts est grande (cf équation (2.22)). On comprend de même que le dimensionnement mécanique de la structure est très fortement dépendant des moyens de contrôle non destructif dont on dispose pour détecter d'éventuelles fissures, inévitables dans les structures.

⁹Ce qui est le cas le plus fréquent, mais pas universel, il faut donc y prêter attention.

2.3.7 Dimensionnement d'une structure vis à vis de la rupture fragile.

La mise en oeuvre du critère du K_{Ic} se déroule en plusieurs étapes :

1°) Tout d'abord il faut *mesurer* la ténacité du matériau constituant la structure. Afin d'assurer une bonne reproductibilité de cette mesure, les essais sont normalisés. Deux essais normalisés courants sont l'essai de flexion 3 points et l'essai de traction sur éprouvette CT (*compact tensile*) représentés sur la figure 2.12. Les facteurs d'intensité des contraintes correspondants sont connus de façon approchée (voir section 2.5).

2°) Puis il faut connaître le facteur d'intensité des fissures qui ont éventuellement été localisées, ce qui nécessite le plus souvent un calcul de structure, avec une analyse très fine au voisinage de la fissure (cf. par exemple le chapitre 4 du cours [6]). L'application du critère du K_{Ic} donnera alors une première borne sur les efforts à appliquer.

3°) Enfin il faut se prémunir contre les fissures « invisibles », c'est-à-dire non visibles avec les moyens de contrôle dont on dispose. Il faut donc déterminer quel est le type de défaut le plus pénalisant et assurer que la taille critique de ce défaut est supérieure à la résolution du dispositif de contrôle en diminuant éventuellement encore le chargement appliqué à la structure. Voici un exemple de cette démarche.

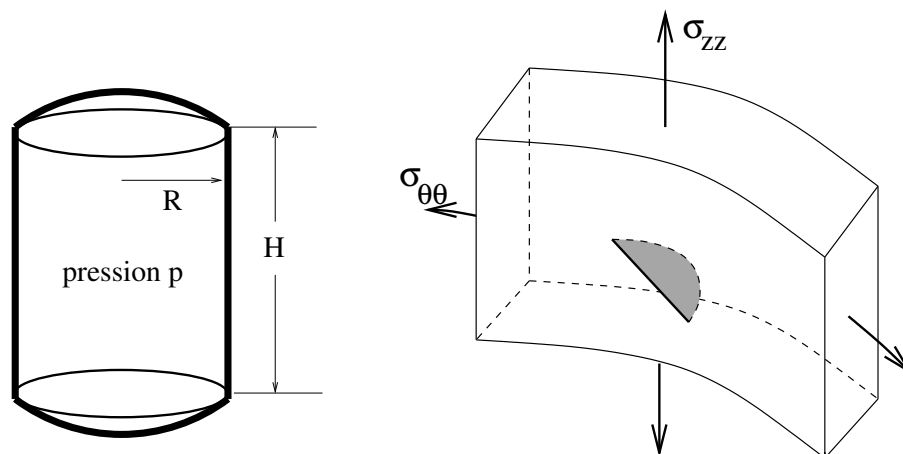


Fig. 2.10: Réservoir sous pression.

Choix d'un acier de réservoir sous pression. Un réservoir sous pression se présente sous la forme d'un tube cylindrique de rayon $R = 2\text{m}$, de hauteur H à paroi mince, fermé à ses extrémités par deux fonds. On supposera $H \gg R$.

Le réservoir contient un fluide à la pression p et doit pouvoir supporter une pression interne maximale $p_{max} = 50\text{MPa}$. Le concepteur a le choix entre 3 nuances d'acier qui diffèrent par leur contrainte ultime σ_u , la plus grande contrainte supportable par l'acier (au sens de la contrainte équivalente de von Mises), et leur ténacité K_{Ic} :

$$\begin{aligned}
 \text{nuance A : } & \sigma_u = 1250\text{MPa} & K_{Ic} &= 90\text{MPa}\sqrt{m}, \\
 \text{nuance B : } & \sigma_u = 900\text{MPa} & K_{Ic} &= 120\text{MPa}\sqrt{m}, \\
 \text{nuance C : } & \sigma_u = 650\text{MPa} & K_{Ic} &= 190\text{MPa}\sqrt{m}.
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

On s'interroge donc sur le choix de la nuance d'acier en fonction des défauts à craindre dans ce type de structure.

Les défauts dangereux, car difficilement détectables, sont des fissures non traversantes (sinon on pourrait les détecter sur la face externe), mais débouchant sur la face interne du tube. Ces fissures ont une forme plane que l'on peut assimiler à un demi-disque (cf 2.10). Elles peuvent être détectées par radiographie X par exemple, mais le pouvoir séparateur de ces procédés de contrôle ne permet pas de déceler des fissures de moins de 1 cm de diamètre (il s'agit d'un ordre de grandeur).

Détermination des contraintes dans la structure : Pour évaluer les contraintes exercées sur d'éventuelles fissures, nous nous livrons à une première analyse globale du champ de contrainte (ne tenant pas compte de la présence de la fissure). La paroi étant mince, les contraintes orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$ et axiale σ_{zz} qui résultent de cette pression interne peuvent être considérées comme constantes dans l'épaisseur. Ces contraintes peuvent être estimées avec une assez bonne précision par des considérations purement statiques, en écrivant successivement l'équilibre d'un demi-réservoir, en projection sur Oy et sur Oz (voir figure 2.11). Détaillons par exemple le calcul de σ_{zz} en écrivant l'équilibre de la moitié supérieure du réservoir. Les efforts exercés par la moitié inférieure ont pour résultante $-2\pi R e \sigma_{zz} \underline{e}_z$. Cette résultante est opposée (équilibre) à la résultante des efforts exercés sur la partie supérieure par la pression p dont la densité surfacique est $p\underline{n}$, \underline{n} étant (une fois n'est pas coutume) la normale orientée de l'intérieur du réservoir vers l'extérieur (vecteur opposé à la normale extérieure à la face interne). Pour calculer la résultante de ces efforts de pression, il suffit de remarquer que l'intégrale sur une surface fermée d'une densité $p\underline{n}$ est nulle (théorème divergence-flux) :

$$\int_{\partial\Omega} p\underline{n} \, da = \int_{\Omega} \operatorname{div}(p) \, d\underline{x} = 0.$$

Ce résultat est appliqué au volume interne de la moitié de réservoir, dont le bord consiste en la face interne du réservoir complété par le disque de centre O et de rayon R . La

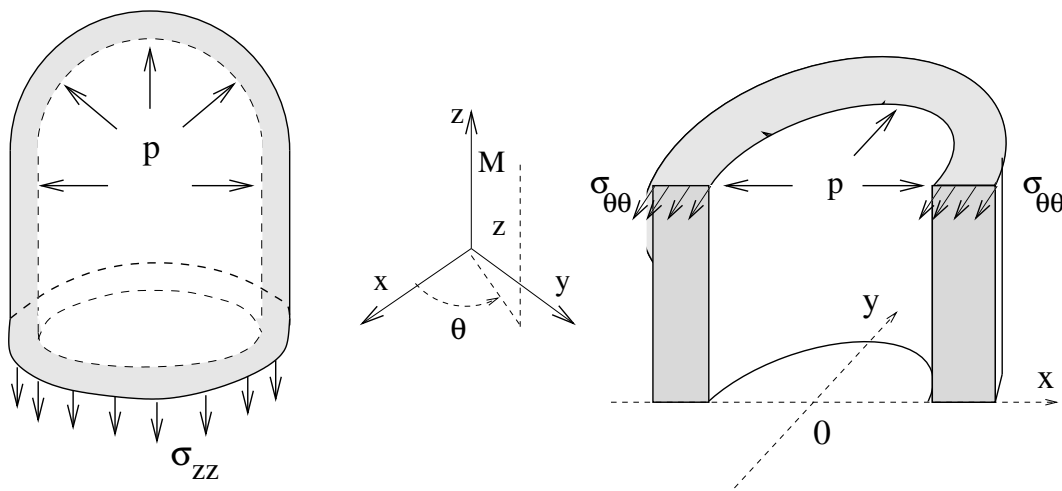


Fig. 2.11: Détermination approchée des contraintes par l'écriture de l'équilibre de sous-ensembles du réservoir.

2.3. SINGULARITÉ DE CONTRAINTE À LA POINTE D'UNE FISSURE PLANE.

résultante des efforts exercés sur la face interne du réservoir est donc opposée à la résultante des efforts exercés sur le disque de rayon R et qui vaut $-\pi R^2 p \underline{e}_z$. La résultante des efforts de pression sur la moitié supérieure du réservoir est donc $\pi R^2 p \underline{e}_z$ (et ceci indépendamment de la forme du fond du réservoir). De la même façon, la résultante des efforts de pression exercés sur une demi-couronne (figure 2.11 droite) est $2Rp \underline{e}_y$. Les deux équations d'équilibre sont donc $2\pi R e \sigma_{zz} = \pi R^2 p$ et $2e \sigma_{\theta\theta} = 2Rp$, ce qui conduit aux expressions suivantes (formule dite des « chaudronniers ») :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{e}, \quad \sigma_{zz} = \frac{pR}{2e}. \quad (2.24)$$

La contrainte normale maximale est $\sigma_{\theta\theta}$. Ce sont les fissures *verticales*, soumises à cette contrainte maximale d'ouverture $\sigma_{\theta\theta}$ qui sont soumises au mode I de plus grande intensité et qui sont donc dans la situation la plus défavorable. Ce sont celles que nous considérerons dans la suite.

Dimensionnement vis à vis de la rupture. Le facteur d'intensité des contraintes en mode I pour une fissure débouchante de rayon ℓ est (cf 2.18) :

$$K_I = 1.1 \sigma \sqrt{\pi \ell} = 1.1 \frac{pR}{e} \sqrt{\pi \ell},$$

où l'on a assimilé le tube à une plaque (ce qui est justifié par l'importance du rayon comparé à l'épaisseur), et où ℓ est le rayon de la plus petite fissure détectable, $\ell = 5.10^{-3}$ m. L'épaisseur requise pour chaque nuance d'acier se déduit de la ténacité à l'aide du critère $K_I < K_{Ic}$, ce qui conduit à une épaisseur minimale e_R (R pour rupture) donnée par :

$$e_R = pR \frac{1.1 \sqrt{\pi \ell}}{K_{Ic}}.$$

Pour la pression de service imposée, les épaisseurs nécessaires sont alors :

$$\text{nuance A : } e = 15.3 \text{ cm,} \quad \text{nuance B : } e = 11.5 \text{ cm,} \quad \text{nuance C : } e = 7.3 \text{ cm.}$$

C'est donc *a priori* la nuance C qui est la plus économique pour le dimensionnement aux défauts.

Dimensionnement vis à vis de la contrainte ultime. Mais il reste à assurer le dimensionnement vis à vis de la contrainte ultime. On calcule la contrainte équivalente globale (calculée en l'absence de fissure) en négligeant σ_{rr} devant $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} (approximation justifiée par la minceur de la paroi) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{pR}{e} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{pR}{2e} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z, \quad \underline{\underline{s}} = -\frac{pR}{2e} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{pR}{2e} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta.$$

Il vient alors :

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} (s_{rr}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{zz}^2) \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pR}{e}.$$

L'épaisseur minimale e_u (u pour contrainte ultime) de l'acier est alors donnée par :

$$e_u = pR \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_u}.$$

Pour la pression de service imposée, les épaisseurs nécessaires sont alors :

nuance A : $e = 6.9$ cm, nuance B : $e = 9.6$ cm, nuance C : $e = 13.3$ cm.

Si l'on tient compte des deux critères de dimensionnement, rupture fragile et contrainte ultime, il faut donner à l'acier une épaisseur au moins égale à $\max(e_R, e_u)$.

C'est donc finalement l'acier B qui respectera le mieux les deux critères de dimensionnement, tenue aux défauts et contrainte ultime, pour une épaisseur minimale de 11.5cm. Il est particulièrement significatif que ce n'est ni l'acier qui présente la meilleure ténacité, ni celui qui possède la meilleure contrainte ultime qui sera finalement retenu.

2.3.8 Critique de la Mécanique linéaire de la rupture

La Mécanique linéaire de la Rupture utilise de façon essentielle la linéarité des équations décrivant l'équilibre d'un corps élastique en petites perturbations. C'est cette linéarité, et le principe de superposition qui en découle, qui permet la décomposition en *modes* de rupture auxquels sont associés les facteurs d'intensité des contraintes.

On peut cependant objecter qu'il n'est pas physique d'observer des contraintes infinies en pointe de fissure. Il est vraisemblable qu'un phénomène physique autre que l'élasticité (plasticité, transformation de phases) viendra supprimer (ou modifier significativement) cette singularité. L'analyse élastique qui peut être admise comme valable loin du fond de fissure, est sujette à caution au voisinage de celui-ci. A ceci on peut répondre deux choses :

- Des corrections peuvent être apportées pour tenir compte de la plasticité en fond de fissure et estimer la taille de la zone plastique. Dans le cas où cette zone plastique est très petite, notamment vis à vis d'autres caractéristiques géométriques du problème (comme la taille de grain), l'essentiel du champ de contrainte est bien décrit par la solution singulière de la Mécanique de la Rupture.
- L'idée sous-jacente est qu'il faut raisonner en « élément de volume » plus qu'en valeur ponctuelle : des contraintes infinies en un point n'ont pas de réel sens physique, mais des contraintes très grandes dans un élément de volume d'une taille suffisante constituent un élément significatif. Cette notion d'élément de volume est essentielle en Mécanique de la Rupture, linéaire ou non.
- L'argument le plus indiscutable en faveur de la Mécanique Linéaire de la Rupture est son efficacité dans le cadre de ses hypothèses de travail : elle permet *effectivement* un dimensionnement des structures qui à l'usage s'avère tout à fait pertinent.

Une autre voie d'approche de la rupture, beaucoup plus globale, a été explorée en raison des critiques qui peuvent être adressées à la notion de singularité des contraintes. Cette deuxième voie, énergétique, sera abordée au chapitre suivant.

Formules et résultats essentiels

- **Singularités de contrainte**

▷ Comportement en pointe de fissure :

$$\sigma_{ij} \sim \frac{f_{ij}(\theta)}{\sqrt{r}} \quad \text{au voisinage de } r = 0.$$

- ▷ Trois modes de rupture. Mode I : ouverture plane. Mode II : cisaillement plan. Mode III : cisaillement anti-plan.
- ▷ Les fonctions f_{ij} dépendent linéairement de 3 *facteurs d'intensité des contraintes* K_I, K_{II} et K_{III} correspondant aux 3 modes de rupture.
- ▷ Forme générale des facteurs d'intensité des contraintes :

$$K = \sigma \sqrt{\pi \ell} f(\ell, \text{géométrie éprouvette}).$$

- **Ténacité d'un matériau**

▷ En mode I, valeur critique du facteur d'intensité des contraintes

$$K_I < K_{Ic} \Rightarrow \dot{\ell} = 0 \quad : \text{ fissure fixe}$$

$$K_I = K_{Ic} \Rightarrow \dot{\ell} > 0 \quad : \text{ avancée de la fissure}$$

▷ K_{Ic} : ténacité du matériau.

- **Taille critique des défauts**

▷ Taille critique de défaut sous charge donnée, ℓ_c :

$$\ell_c f^2(\ell_c) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma} \right)^2.$$

▷ Charge critique pour une longueur donnée de fissure donnée :

$$\sigma < \sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi \ell} f(\ell)}.$$

2.4 Exercices

Exercice 1. Concentration de contrainte au voisinage d'un trou circulaire Une plaque mince, infinie, constituée d'un matériau élastique, linéaire, homogène, isotrope, contient un trou circulaire de rayon a . Cette plaque est soumise à l'infini à un état plan de contraintes, s'exprimant dans la base principale $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$, par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^\infty = P\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + Q\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y, \quad \text{pour } |r| \rightarrow \infty.$$

1⁰) Etude du cas $P = Q$. Chercher une fonction d'Airy du problème respectant la symétrie du problème, et déterminer les champs de contraintes et de déplacements.

2⁰) Etude du cas $Q = -P$. Chercher une fonction d'Airy du problème sous la forme $\Phi(r, \theta) = f(r)g(\theta)$, où $g(\theta)$ est déterminée par les conditions à l'infini. Déterminer les champs de contrainte et de déplacements.

3⁰) On soumet la plaque à une traction simple dans la direction \underline{e}_y :

$$\underline{\underline{\sigma}}^\infty = \sigma^\infty \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y, \quad \text{pour } r \rightarrow +\infty.$$

Par superposition des 2 cas précédents, déterminer la solution du problème. Examiner en particulier l'allure des contraintes et des déplacements au bord du trou.

Eléments de réponse

1⁰) La plaque étant mince on peut se placer dans l'hypothèse des contraintes planes. Le chargement et le trou sont à symétrie de révolution et on cherche une fonction d'Airy Φ ne dépendant que de r . Le Laplacien s'exprime en coordonnées polaires par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right), \quad \text{si } \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0.$$

La fonction d'Airy est biharmonique $\Delta(\Delta\Phi) = 0$. On déduit dans un premier temps qu'il existe des constantes A et B telles que $\Delta\Phi = A \log r + B$, puis par une nouvelle intégration que : $\Phi(r) = Cr^2 \log r + Dr^2 + F \log r + G$. Le champ de contrainte qui s'en déduit par les relations :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2},$$

s'écrit :

$$\sigma_{rr} = 2C \log(r) + (C + 2D) + \frac{F}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2C \log r + (3C + 2D) - \frac{F}{r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = 0.$$

Les constantes C , D et F sont déterminées par les conditions à l'infini et la condition de bord libre en $r = a$

$$C = 0, \quad D = \frac{P}{2}, \quad F = -Pa^2.$$

En conclusion :

$$\sigma_{rr} = P \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = P \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Le champ de déplacement se déduit de la symétrie du problème (qui implique $\xi_\theta = 0$) et de la loi de comportement :

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} = \varepsilon_{rr} = -\frac{\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{rr} = \frac{1-\nu}{E} P + \frac{1+\nu}{E} \frac{F}{r^2},$$

2.4. EXERCICES

$$\frac{\xi_r}{r} = \varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\theta\theta} = \frac{1-\nu}{E} P - \frac{1+\nu}{E} \frac{F}{r^2}$$

i.e.

$$\xi_r = \frac{1-\nu}{E} Pr + \frac{1+\nu}{E} \frac{Pa^2}{r}.$$

On a donc construit une solution complète du problème (contrainte et déplacement). Par unicité de la solution, c'est la solution du problème (à un déplacement rigide près pour $\underline{\underline{\xi}}$).

Une traction équibiaxiale de module P à l'infini se traduit au bord de la cavité par un état de traction uniaxiale circonférentielle de module $2P$ (le facteur de concentration de contrainte est 2)

2⁰) Comme le suggère l'énoncé, on cherche la fonction d'Airy sous la forme

$$\Phi(r) = f(r)g(\theta).$$

On obtient alors par les relations rappelées précédemment liant $\underline{\underline{\sigma}}$ et Φ :

$$\sigma_{\theta\theta} = f''(r)g(\theta), \quad \sigma_{rr} = \frac{f(r)}{r^2}g''(\theta) + \frac{f'(r)}{r}g(\theta), \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{f(r)}{r}g'(\theta).$$

Les conditions aux limites à l'infini s'écrivent dans les bases $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ et $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$ respectivement :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \underline{\underline{\sigma}} &= P\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - P\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y, \\ &= P \sin 2\theta \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r - P \sin 2\theta (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) - P \cos 2\theta \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta. \end{aligned}$$

En comparant les deux formes obtenues pour $\sigma_{\theta\theta}$, l'une par la fonction d'Airy, l'autre par les conditions à l'infini, on conclut que $g(\theta) = \cos 2\theta$. L'équation biharmonique $\Delta(\Delta\Phi) = 0$ se réduit alors, compte tenu de l'expression (2.3) du Laplacien en coordonnées polaires, à :

$$\left(f^{(4)} + \frac{2}{r}f^{(3)} - \frac{9}{r^2}f'' + \frac{9}{r^3}f' \right) \cos 2\theta = 0,$$

dont les solutions, cherchées (et trouvées) sous la forme $f(r) = r^\alpha$, sont :

$$f(r) = Ar^4 + Br^2 + C + \frac{D}{r^2}.$$

Le champ de contrainte qui en dérive est :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left(-2B - \frac{4C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left(12Ar^2 + 2B + \frac{6D}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} &= 2 \left(6Ar^2 + B - \frac{C}{r^2} - \frac{3D}{r^4} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \right\}$$

Les conditions aux limites à l'infini et en $r = a$ ($\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0$) entraînent :

$$A = 0, \quad B = -\frac{P}{2}, \quad C = Pa^2, \quad D = -\frac{Pa^4}{2},$$

et donc

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= P \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta\theta} &= -P \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta} &= -P \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta\end{aligned}$$

La loi de comportement s'écrit :

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial \xi_r}{\partial r} = \left[\frac{\nu}{E} \frac{4C}{r^2} + \frac{1+\nu}{E} \left(P - \frac{4C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} \right) \right] \cos 2\theta, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\xi_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} = \left[\frac{\nu}{E} \frac{4C}{r^2} + \frac{1+\nu}{E} \left(-P + \frac{6D}{r^4} \right) \right] \cos 2\theta \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} - \xi_\theta \right) \right] = -\frac{1+\nu}{E} \left(P + \frac{2C}{r^2} + \frac{6D}{r^4} \right) \sin 2\theta\end{aligned} \right\}$$

La forme du champ de déformation $\underline{\varepsilon}$, suggère de rechercher ξ_r et ξ_θ sous la forme :

$$\xi_r = F(r) \cos 2\theta, \quad \xi_\theta = G(r) \sin 2\theta.$$

Les relations de comportement fournissent trois équations différentielles pour F et G :

$$\left. \begin{aligned}F'(r) &= \frac{\nu}{E} \frac{4C}{r^2} + \frac{1+\nu}{E} \left(P - \frac{4C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} \right), \\ \frac{1}{r}(F+2G)(r) &= \frac{\nu}{E} \frac{4C}{r^2} + \frac{1+\nu}{E} \left(-P + \frac{6D}{r^4} \right), \\ \frac{1}{2} [G'(r) - \frac{1}{r}(2F(r) + G(r))] &= -\frac{1+\nu}{E} \left(P + \frac{2C}{r^2} + \frac{6D}{r^4} \right),\end{aligned} \right\}$$

dont la solution est :

$$\left. \begin{aligned}F(r) &= -\frac{\nu}{E} \frac{4C}{r} + \frac{1+\nu}{E} \left(Pr + \frac{4C}{r} + \frac{2D}{r^3} \right), \\ G(r) &= \frac{\nu}{E} \frac{4C}{r} - \frac{1+\nu}{E} \left(Pr + \frac{2C}{r} - \frac{2D}{r^3} \right),\end{aligned} \right\}$$

En dépit des apparences (hypothèse a priori sur la forme de Φ et de $\underline{\xi}$), nous avons bien résolu le problème dans toute sa généralité : nous avons trouvé une solution $(\underline{\sigma}, \underline{\xi})$ vérifiant les équations d'équilibre, la loi de comportement et les conditions aux limites. En invoquant l'unicité de la solution nous sommes assurés d'avoir trouvé *la* solution du problème.

³⁰) On remarque que l'état de traction simple est une superposition des deux cas de chargement étudiés précédemment :

$$\sigma_\infty \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x = \frac{\sigma_\infty}{2} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \frac{\sigma_\infty}{2} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y).$$

Si l'on se limite à examiner les états de contrainte au bord de l'hétérogénéité on obtient :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \text{ en } r = a.$$

Une traction uniaxiale de module σ^∞ induit donc une traction de module $3\sigma^\infty$ sur les points du bord situés à $\pm \frac{\pi}{2}$ de la direction de traction (facteur de concentration de contrainte = 3), et une compression de $-\sigma^\infty$ sur les points situés à 0 et π par rapport à la direction de traction.

2.4. EXERCICES

Exercice 2. Singularité de contrainte en mode anti-plan. *On reprend l'analyse du comportement asymptotique des contraintes en fond d'entaille mais dans le cadre d'un problème anti-plan. Montrer que le champ de contrainte est singulier en fond d'entaille. On cherchera pour une fonction de contrainte de la forme $\varphi(r, \theta) = r^{\alpha+1}g(\theta)$. Etablir les expressions (2.13) des champs de contrainte et de déplacement pour une fissure plane sollicitée en mode anti-plan.*

Eléments de réponse.

La fonction de contrainte est une fonction harmonique :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = [(\alpha+1)^2g(\theta) + g''(\theta)] = 0.$$

La fonction $g(\theta)$ est donc somme de fonctions de la forme $e^{p\theta}$ où $p^2 = -(\alpha+1)^2$:

$$g(\theta) = A \cos((\alpha+1)\theta) + B \sin((\alpha+1)\theta).$$

Les conditions de bord libre sur les lèvres de l'entaille se traduisent par :

$$g'(\theta) = 0 \quad \text{pour } \theta = \pm\omega,$$

i.e.

$$\pm A \sin((\alpha+1)\omega) + B \cos((\alpha+1)\omega) = 0. \quad (2.25)$$

Si $\cos((\alpha+1)\omega) \neq 0$, B est nécessairement nul et A sera non nul si $\sin((\alpha+1)\omega) = 0$. Pour que l'énergie élastique soit intégrable α doit être supérieur à -1 et la plus petite solution à l'équation précédente est $\alpha = \pi/\omega - 1$. Elle est positive et ne conduit donc pas à une singularité de contrainte. En revanche, si $\cos((\alpha+1)\omega) = 0$, il existe une solution de (2.25) avec B non nul. La plus petite valeur de $\alpha > -1$ est alors $\alpha = \pi/(2\omega) - 1$ qui est négative (rappelons que $\pi/2 \leq \omega \leq \pi$). Puisque $\sigma \sim r^\alpha$, cette solution correspond à une singularité du champ de contrainte en fond d'entaille.

Lorsque $\omega = \pi$ (fissure), la solution est $\alpha = -1/2$. La fonction de contrainte est alors :

$$\varphi(r, \theta) = \frac{B}{\sqrt{r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

et les composantes du champ de contrainte s'en déduisent :

$$\sigma_{rz} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{B}{2\sqrt{r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \sigma_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{B}{2\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Puis on obtient par application de la loi de comportement :

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial\xi_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{rz} = \frac{B}{4\mu\sqrt{r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2r}\frac{\partial\xi_z}{\partial\theta} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{\theta z} = \frac{B}{4\mu\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

et enfin, par intégration :

$$\xi_z = \frac{B\sqrt{r}}{\mu} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

On retrouve ainsi les expressions (2.13) en posant $K_{III} = \sqrt{2\pi}B/2$.

2.5 Annexe : éprouvettes normalisées

Une procédure particulière doit être suivie pour obtenir une fissure de longueur donnée. On usine au préalable dans ces éprouvettes normalisées une *entaille* en V, puis on amorce une fissure par un trait de scie en fond d'entaille. L'éprouvette est ensuite soumise à des cycles de fatigue à des niveaux très bas ce qui a pour effet de faire avancer la fissure jusqu'à la longueur voulue, sans trop de déformation plastique à la pointe. Puis l'éprouvette est testée en flexion ou en traction (selon sa forme). La mesure de la valeur critique du paramètre de chargement conduisant à une propagation de la fissure permet une évaluation de la ténacité, une fois connus les facteurs d'intensité des contraintes pour chaque cas.

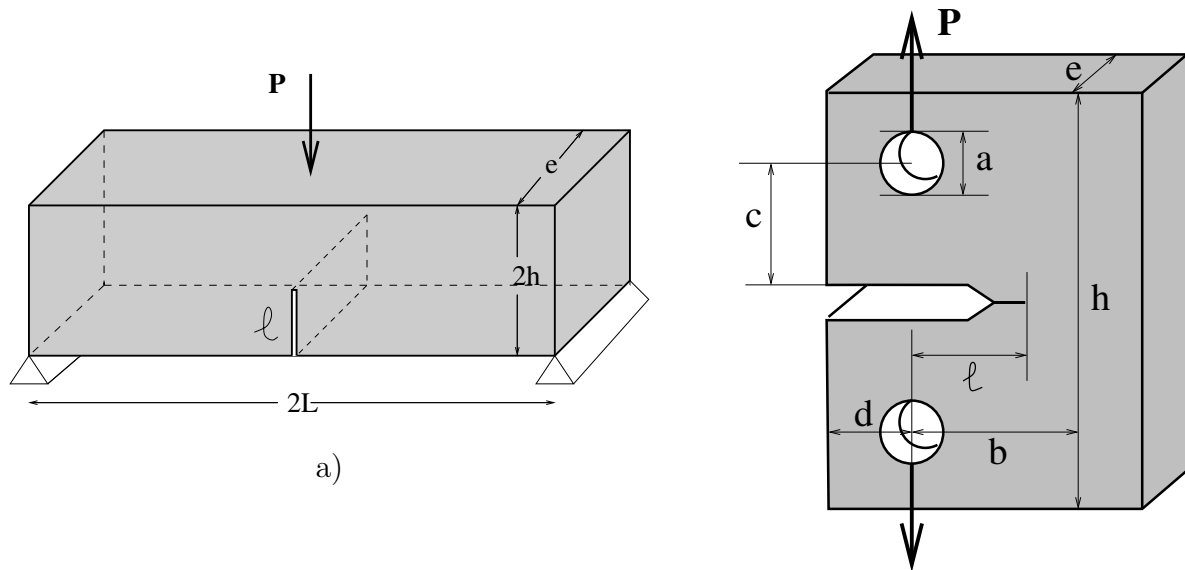


Fig. 2.12: Eprouvettes normalisées. a) Eprouvette de flexion 3 points. b) Eprouvette CT (Compact Tensile).

Eprouvette de flexion 3 points : (source : Bui [12])

$$\text{Pour } L/h = 8 : K_I = \frac{3PL\sqrt{\ell}}{4h^2e} f\left(\frac{\ell}{2h}\right) \quad (2.26)$$

$$f(m) \simeq (1.96 - 2.75m + 13.66m^2 - 23.98m^3 + 25.22m^4), \quad m = \ell/2h.$$

Eprouvette CT : (source : Bui [12])

$$\left. \begin{aligned} \text{Données géométriques : } \phi = d = \frac{b}{4}, \quad e = \frac{b}{2}, \quad h = 1.2b, \quad c = 0.275b, \\ \text{Pour } 0.3 < \frac{\ell}{b} < 0.7 : K_I = \frac{P\sqrt{\ell}}{be} f\left(\frac{\ell}{b}\right), \\ f(m) \simeq 29.6 - 185.5m + 655.7m^2 - 1017m^3 + 638.9m^4, \quad m = \ell/h. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Chapitre 3

Analyse énergétique de la propagation d'une fissure

Introduction et cadre de travail...

Le point de vue local, basé sur la seule analyse des contraintes en pointe de fissure, peut être contesté sur le plan physique. Un autre point de vue, au contraire tout à fait global, permet d'analyser la progression des fissures sous l'angle *des échanges d'énergie* qu'elle met en jeu.

Pour simplifier l'exposé nous ferons tout au long de ce chapitre les mêmes hypothèses qu'au chapitre précédent :

- ▷ *les déformations sont suffisamment petites pour que l'hypothèse des petites perturbations soit légitime,*
- ▷ *les matériaux étudiés ont un comportement élastique et linéaire (et ils seront le plus souvent homogènes et isotropes),*
- ▷ *la géométrie est bidimensionnelle, les fissures étudiées sont droites,*
- ▷ *les transformations sont suffisamment lentes pour pouvoir se placer dans l'approximation d'une évolution quasi-statique et isotherme (les effets d'inertie et les variations de température sont négligés).*

On montre alors que l'avancée de la fissure s'accompagne d'une dissipation d'énergie égale au produit de la vitesse d'avancement de la fissure par une force thermodynamique, *le taux de restitution de l'énergie*, qui n'est autre (au signe près) que la dérivée de l'énergie mécanique du système par rapport à la longueur de fissure.

Enfin, alors que l'approche énergétique de ce chapitre, très globale, et la notion de singularité de contrainte développée au chapitre précédent, au contraire très locale, paraissent totalement indépendantes, on montre que les deux points de vue sont en fait reliés par la formule d'Irwin (1957).

3.1 Analyse énergétique

Les fondements de l'approche énergétique remontent à Griffith (1920). L'idée sous-jacente est de faire un bilan des énergies mises en jeu avant et après propagation de la fissure, en tenant compte de l'énergie de surface créée par l'avancée de la fissure.

3.1.1 Propriété variationnelle des solutions d'un problème d'élasticité linéaire

Considérons pour commencer un problème d'élasticité linéaire dans le cadre HPP, *c'est à dire sans avancée de fissure*. Soit Ω le domaine (fixe) occupé par le milieu déformable dont on souhaite étudier l'équilibre. Ce corps est soumis à des forces de volume \underline{F} , à des déplacements imposés \underline{u}^d sur une partie S_u de son bord et à une densité surfacique d'efforts \underline{T}^d sur la partie complémentaire S_T du bord. Les équations permettant de déterminer le déplacement $\underline{\xi}$ à partir de la position initiale et les contraintes $\underline{\sigma}$ à l'équilibre s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equilibre :} \\ \text{Comportement :} \\ \text{Compatibilité :} \\ \text{Conditions aux limites :} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{div } \underline{\sigma} + \rho \underline{F} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \underline{\sigma} = \underline{C} : \underline{\varepsilon} \quad \text{dans } \Omega, \\ \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\underline{\nabla} \underline{\xi} + {}^T \underline{\nabla} \underline{\xi} \right) \quad \text{dans } \Omega, \\ \underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \quad \text{sur } S_T, \quad \underline{\xi} = \underline{\xi}^d \quad \text{sur } S_\xi. \end{array} \quad (3.1)$$

Moyennant certaines conditions sur le chargement, le problème d'équilibre (3.1) admet une solution en général unique pour les champs de contrainte et de déformation, le champ de déplacement étant éventuellement défini à un déplacement rigidifiant près.

Cette solution a des propriétés variationnelles très utiles. Soient :

- $\mathbb{C}(S_\xi, \underline{\xi}^d)$ l'ensemble des *champs de déplacement cinématiquement admissibles* avec les déplacements imposés $\underline{\xi}^d$ sur S_ξ :

$$\mathbb{C}(S_\xi, \underline{\xi}^d) = \{ \underline{\xi}' \text{ tels que } \underline{\xi}' = \underline{\xi}^d \text{ sur } S_\xi \},$$

- $W(\underline{\xi}')$ l'énergie élastique du corps pour un champ de déplacement cinématiquement admissible $\underline{\xi}'$:

$$W(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}) w(\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}')) \, d\Omega,$$

où $\rho w(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}' : \underline{C} : \underline{\varepsilon}'$ est la densité d'énergie élastique du matériau,

- $-L(\underline{\xi}')$ le potentiel des efforts extérieurs :

$$L(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}) \underline{F}(\underline{x}) \cdot \underline{\xi}'(\underline{x}) \, d\Omega + \int_{S_T} \underline{T}^d(\underline{x}) \cdot \underline{\xi}'(\underline{x}) \, da,$$

- P l'énergie potentielle totale du corps dans le champ de déplacement virtuel $\underline{\xi}'$:

$$P(\underline{\xi}') = W(\underline{\xi}') - L(\underline{\xi}').$$

Alors : la solution $\underline{\xi}$ du problème (3.1) rend minimum l'énergie potentielle totale :

$$P(\underline{\xi}) = \inf_{\underline{\xi}' \in \mathbb{C}(S_\xi, \underline{\xi}^d)} P(\underline{\xi}'). \quad (3.2)$$

3.1.2 Le bilan énergétique de Griffith (1920)

Le principe variationnel (3.2) peut être appliqué à l'analyse énergétique de l'avancée d'une fissure dans un corps élastique. Nous nous plaçons pour simplifier dans un contexte bidimensionnel (contraintes ou déformations planes, ou problème antiplan). Le corps considéré occupe un domaine $\Omega(\ell)$, et contient une fissure rectiligne $\mathcal{F}(\ell)$ de longueur ℓ , libre de contraintes mais susceptible d'avancer. On note $\partial_0\Omega$ la partie inchangée du bord de $\Omega(\ell)$ (l'autre partie du bord étant $\mathcal{F}(\ell)$), S_ξ la partie de $\partial_0\Omega$ soumise à des déplacements imposés $\underline{\xi}^d$, S_T la partie de $\partial\Omega$ soumise à des forces imposées \underline{T}^d . On supposera de plus que le chargement imposé, spécifié par la donnée de \underline{F} , \underline{T}^d et $\underline{\xi}^d$ dépend d'un nombre fini de paramètres¹ regroupés dans une liste notée \mathcal{C} . Ils peuvent être des paramètres de force (force imposée au corps fissuré) ou de déplacement (déplacements imposés à ce corps). Le contexte précise en général leur signification physique sans ambiguïté.

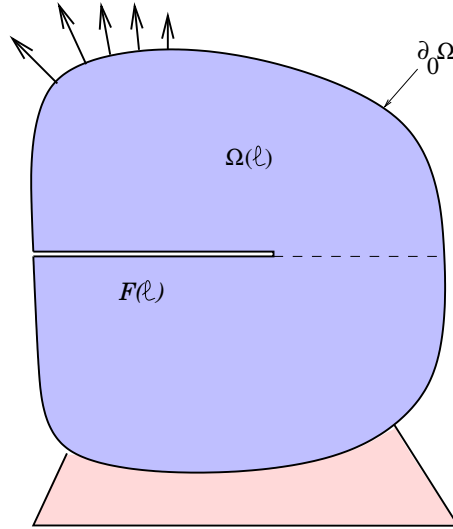


Fig. 3.1: Géométrie du corps fissuré.

L'énergie potentielle totale P du corps dépend de la géométrie du corps (la seule variable géométrique qui pourra évoluer sera la longueur ℓ de la fissure) et du chargement \mathcal{C} (qui est susceptible d'évoluer au cours de la vie de la structure). Cette énergie potentielle totale comporte un terme d'énergie élastique et un terme dû aux efforts extérieurs et s'écrit :

$$P(\ell, \mathcal{C}) = W(\ell, \underline{\xi}) - L(\ell, \mathcal{C}, \underline{\xi}),$$

où le champ de déplacement solution $\underline{\xi}$ dépend lui-même de ℓ et \mathcal{C} et où :

$$W(\ell, \underline{\xi}) = \int_{\Omega(\ell)} \rho w(\underline{\underline{\xi}}(\underline{\xi})) \, d\Omega, \quad L(\ell, \mathcal{C}, \underline{\xi}) = \int_{\Omega(\ell)} \rho \underline{F} \cdot \underline{\xi} \, d\Omega + \int_{S_T} \underline{T}^d \cdot \underline{\xi} \, da. \quad (3.3)$$

Dans le cadre de nos hypothèses de travail (élasticité linéaire, processus quasi-statique et isotherme) les énergies mises en jeu lors de l'avancée d'une fissure sont maintenant de deux types :

¹La notion de chargement dépendant d'un nombre fini de paramètres sera discutée plus généralement au paragraphe 6.3.2.2.

1⁰) *L'énergie potentielle mécanique P*. Le champ $\underline{\xi}$, solution du problème d'élasticité considéré, rend minimale l'énergie mécanique P du système parmi l'ensemble $\mathbb{C}(S_{\underline{\xi}}, \underline{\xi}^d)$ des champs cinématiquement admissibles avec les données en déplacement du problème. Soulignons à nouveau que le champ de déplacement $\underline{\xi}$ solution et l'énergie mécanique du système P dépendent du corps et du chargement considérés, donc de la longueur de fissure ℓ et des paramètres de chargement \mathcal{C} : $\underline{\xi}(\ell, \mathcal{C})$, $P(\ell, \mathcal{C})$.

2⁰) *L'énergie de surface due à la présence d'une surface libre*. Cette énergie est directement proportionnelle à la quantité de surface créée par la fissure. Dans un contexte bidimensionnel et pour une fissure droite de longueur ℓ , cette énergie de surface est

$$W^s = 2\gamma\ell. \quad (3.4)$$

γ est la *densité surfacique* d'énergie (densité linéique dans le cas bidimensionnel considéré ici). Le facteur 2 provient de ce qu'il faut prendre en compte les 2 lèvres de la fissure. Cette énergie n'était pas prise en compte dans le cas d'un domaine fixe envisagé au paragraphe 3.1.1 car, dans ce cas, elle est constante et n'affecte pas la propriété variationnelle (3.2).

L'énergie totale du corps contenant une fissure de longueur ℓ susceptible d'avancer sous l'effet du chargement \mathcal{C} est donc $P(\ell, \mathcal{C}) + W^s(\ell)$.

Sous l'application du chargement, la fissure a le choix entre rester fixe (longueur ℓ) ou avancer d'une quantité $d\ell$. Pour décider lequel de ces cas doit être retenu, Griffith fait l'hypothèse que la nature est économe de son énergie :

Pour le même chargement \mathcal{C} le corps déformable « choisit » la configuration qui rend minimale son énergie totale $P + W^s$. En d'autres termes :

- Si $P(\ell, \mathcal{C}) + W^s(\ell) < P(\ell + d\ell, \mathcal{C}) + W^s(\ell + d\ell)$, la fissure n'évolue pas et conserve sa longueur ℓ .
- Si $P(\ell, \mathcal{C}) + W^s(\ell) \geq P(\ell + d\ell, \mathcal{C}) + W^s(\ell + d\ell)$, le corps « a intérêt » à accroître la longueur de la fissure de $d\ell$ pour minimiser son énergie.

Le critère permettant de décider de l'avancée de la fissure est donc donné par le signe de la quantité :

$$\frac{P(\ell + d\ell, \mathcal{C}) - P(\ell, \mathcal{C})}{d\ell} + 2\gamma.$$

En définissant le *taux de restitution de l'énergie* G ² par :

$$G = -\frac{\partial P}{\partial \ell}(\ell, \mathcal{C}), \quad (3.5)$$

le critère de propagation s'écrit :

$$\left. \begin{array}{l} G < 2\gamma \quad : \text{non propagation} \\ G \geq 2\gamma \quad : \text{propagation} \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

²La terminologie, *taux de restitution de l'énergie*, est justifiée par le signe de G : lorsque la longueur de la fissure passe de ℓ à $\ell + d\ell$, le système voit son énergie passer de $P(\ell)$ à $P(\ell + d\ell)$ (nous omettons provisoirement la dépendance par rapport au chargement, qui est le même dans les deux cas), soit un « gain » de $P(\ell + d\ell) - P(\ell)$ ou inversement une « restitution » de l'énergie stockée dans le corps de $P(\ell) - P(\ell + d\ell) = Gd\ell$.

3.1. ANALYSE ÉNERGÉTIQUE

Commentaires :

1. *Le taux de restitution de l'énergie G est toujours positif.* En effet, le domaine $\Omega(\ell + d\ell)$ est inclus dans le domaine $\Omega(\ell)$. Par conséquent pour chaque champ ξ' les intégrales qui apparaissent dans (3.3) sont plus petites lorsqu'elles portent sur $\Omega(\ell + d\ell)$ que lorsqu'elles portent sur $\Omega(\ell)$. De plus l'ensemble des champs cinématiquement admissibles étant composé de fonction continues, il y a plus de champs admissibles pour $\Omega(\ell + d\ell)$ que pour $\Omega(\ell)$ et le minimum de l'énergie est donc inférieur. On a donc

$$P(\ell + d\ell, \mathcal{C}) \leq P(\ell, \mathcal{C}),$$

d'où il résulte que G est positif.

2. Dans le contexte tridimensionnel, l'énergie de surface W^s est proportionnelle à la surface \mathcal{S} de la fissure (et non à sa longueur) de sorte que

$$W^s = 2\gamma\mathcal{S}, \quad G = -\frac{\partial P}{\partial \mathcal{S}}(\mathcal{S}, \mathcal{C}).$$

3. On peut se demander quelle est l'origine de l'énergie de surface γ intervenant dans le raisonnement de Griffith. La physique du solide nous en donne une interprétation. Considérons un réseau atomique infini. La configuration d'équilibre de ce réseau résulte de l'équilibre entre les forces interatomiques qui lient les différents atomes du réseau. Coupons maintenant ce réseau en deux parties. Les forces interatomiques vont être modifiées au voisinage de la surface libre créée par la coupure, puisque les liaisons entre les deux parties du réseau ont été rompues. Il va en résulter une nouvelle configuration d'équilibre et une nouvelle énergie associée à cette configuration. La différence entre les énergies « avant » et « après » est l'énergie de surface (à nouveau il faut tenir compte du fait que deux faces ont été créées).

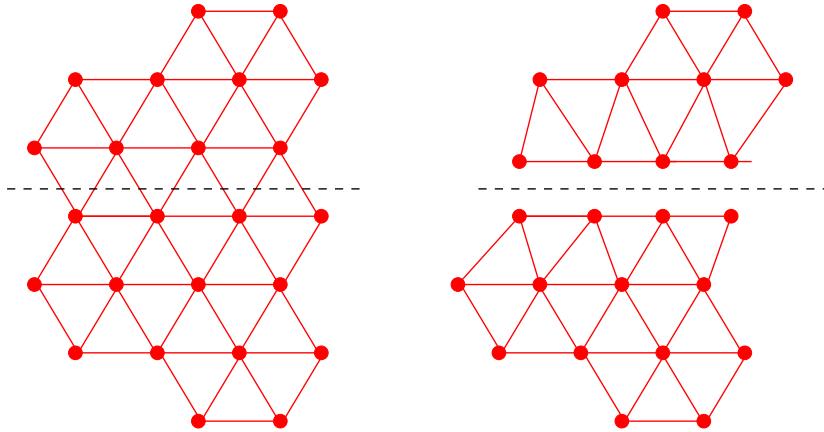


Fig. 3.2: Création d'une énergie de surface.

Le calcul de l'énergie de surface pour différents matériaux en fonction des potentiels interatomiques peut être fait, soit analytiquement soit numériquement. On constate que les énergies de surface ainsi trouvées pour les métaux courants sont très faibles, bien inférieures aux valeurs expérimentales de G pour lesquelles on observe la propagation de la fissure.

En y regardant de plus près le raisonnement de Griffith est critiquable, car il n'introduit pas la notion *d'irréversibilité*. Ainsi en relâchant les efforts la fissure devrait se ressouder, ce qui est contraire à l'intuition physique. De la même façon, l'interprétation donnée pour l'énergie de surface montre que celle-ci est une énergie réversible qui s'apparente à une énergie d'attraction électrostatique : lorsqu'on sépare les deux parties du réseau atomiques, on crée une énergie de surface, mais lorsqu'on rapproche à nouveau ces deux parties, l'équilibre des forces interatomiques se recrée et le réseau initial se reforme.

L'idée de Griffith d'effectuer un bilan d'énergie lors de la propagation de la fissure est donc intéressante, mais doit être exploitée avec plus de précaution en introduisant notamment la notion *d'irréversibilité* du processus, ou, ce qui revient au même, la notion d'énergie dissipée lors de l'avancée de la fissure.

3.1.3 Analyse thermodynamique simplifiée

La prise en compte du caractère irréversible de la fissuration nécessite une analyse thermodynamique du processus. Le premier principe de la Thermodynamique introduit la notion d'énergie d'un système et effectue un bilan entre les différentes formes d'énergie (mécanique et calorifique) apportées au système et stockées dans celui-ci. Le second principe introduit explicitement la notion d'irréversibilité en l'associant à la positivité de la dissipation.

Dans le cadre de travail de ce chapitre (élasticité linéaire, évolution quasi-statique et isotherme), les deux principes de la Thermodynamique se résument au bilan suivant :

La puissance mécanique fournie par l'extérieur du système est utilisée en partie pour modifier son énergie de déformation, le reste étant dissipé en chaleur

$$\mathcal{P}_e = \dot{W} + \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \geq 0, \quad (3.7)$$

où \mathcal{P}_e est la puissance des efforts extérieurs, \dot{W} la variation d'énergie élastique, et \mathcal{D} la dissipation.

Appliquons ce bilan à l'avancée d'une fissure en prenant soin de tenir compte de la variation de géométrie en cours de processus.

La variation d'énergie élastique $W(\ell, \mathcal{C})$ stockée dans la structure sous chargement se compose de deux termes :

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{C}}(\ell, \mathcal{C})\dot{\mathcal{C}} + \frac{\partial W}{\partial \ell}(\ell, \mathcal{C})\dot{\ell} = \dot{W}|_{\text{géométrie fixe}} + \dot{W}|_{\text{chargement constant}}.$$

De la même façon la puissance des efforts dans l'avancée de la fissure se compose de deux termes :

$$\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_e|_{\text{géométrie fixe}} + \mathcal{P}_e|_{\text{chargement constant}}.$$

Remarquons que le principe des puissances virtuelles qui s'applique lorsque la géométrie est *fixe* (les champs de vitesse sont virtuels et le temps réel est figé, de même que la géométrie) entraîne :

$$\mathcal{P}_e|_{\text{géométrie fixe}} \stackrel{PPV}{=} -\mathcal{P}_{int}|_{\text{géométrie fixe}} = \int_{\Omega(\ell)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}|_{\text{géométrie fixe}} d\Omega$$

3.1. ANALYSE ÉNERGÉTIQUE

$$= \int_{\Omega(\ell)} \rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}|_{\text{géométrie fixe}} d\Omega = \dot{W}|_{\text{géométrie fixe}}.$$

Le bilan (3.7) se simplifie donc en :

$$\mathcal{P}_e|_{\text{chargement constant}} = \dot{W}|_{\text{chargement constant}} + \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \geq 0. \quad (3.8)$$

En comparant (3.7) et (3.8) on constate, résultat remarquable, que l'analyse thermodynamique peut être faite sans perte de généralité *en supposant le chargement constant au cours du processus d'avancée de fissure*. L'expression de la dissipation sera identique, qu'elle soit calculée en chargement variable ou en chargement constant. Nous supposons le plus souvent dans la suite que le chargement est constant pour simplifier certains calculs (en omettant le plus souvent la précision « à chargement constant »), ce qui n'enlève rien à la généralité du résultat.

La puissance des efforts extérieurs s'écrit :

$$\mathcal{P}_e|_{\text{chargement constant}} = \int_{\Omega(\ell)} \underline{F} \cdot \underline{\dot{\xi}} d\Omega + \int_{S_T} \underline{T}^d \cdot \underline{\dot{\xi}} da,$$

où on a utilisé le fait que \mathcal{F} est libre de contraintes et que $\underline{\dot{\xi}}$ est nulle sur $\partial_{\xi}\Omega$ (chargement constant, y compris les données en déplacement). Dans la phase d'avancée de la fissure, \underline{F} , \underline{T}^d et $\underline{\xi}^d$ étant maintenus constants, il vient :

$$\mathcal{P}_e|_{\text{chargement constant}} = \dot{L}|_{\text{chargement constant}} \quad \text{où} \quad L(\underline{\xi}) = \int_{\Omega(\ell)} \underline{F} \cdot \underline{\xi} d\Omega + \int_{S_T} \underline{T}^d \cdot \underline{\xi} da. \quad (3.9)$$

Il résulte alors de (3.8) et (3.9) que :

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}_e|_{\text{chargement constant}} - \dot{W}|_{\text{chargement constant}} = -\dot{P}|_{\text{chargement constant}} \quad \text{où} \quad P = W - L. \quad (3.10)$$

Le chargement étant fixé, il vient :

$$\dot{P}|_{\text{chargement constant}} = \frac{\partial P}{\partial \ell}(\ell, \mathcal{C}) \dot{\ell}.$$

En se reportant à (3.10) il apparaît donc que la dissipation \mathcal{D} lors de l'avancée de la fissure ne fait intervenir que le taux de restitution de l'énergie G :

$$\mathcal{D} = G\dot{\ell}, \quad \text{où} \quad G = -\frac{\partial P}{\partial \ell}(\ell, \mathcal{C}). \quad (3.11)$$

L'énergie restituée par le corps lors de l'avancée de la fissure est totalement dissipée.

Récapitulons les résultats :

- la variable ℓ joue pour le corps fissuré le rôle d'une variable d'état du système de type cinématique (c'est une longueur), décrivant un phénomène irréversible.
- La force (thermodynamique) associée à cette variable est la dérivée de l'énergie P du système par rapport à cette variable : c'est, d'après (3.5), le taux de restitution de l'énergie G .
- La puissance dissipée lors de l'avancée irréversible de la fissure est, d'après (3.11), le produit de la force G par la vitesse $\dot{\ell}$.

3.1.4 Critère de propagation

Ces résultats sont essentiels pour formuler les lois (ou critères) de propagation des fissures. Le taux de restitution de l'énergie G est *la force motrice de l'avancée de la fissure*. Il est donc naturel d'exprimer la loi de propagation, c'est à dire la loi donnant $\dot{\ell}$ ou son évolution, à l'aide de cette force.

Si le phénomène de rupture que l'on souhaite modéliser est purement irréversible³, cette loi de comportement ne peut pas lier directement $\dot{\ell}$ et G , car le comportement ainsi modélisé ne prendrait pas en compte l'histoire du chargement et serait réversible. En d'autres termes, à une valeur de G serait associée une unique valeur de $\dot{\ell}$ indépendamment de l'histoire suivie par le corps fissuré et notamment de la longueur actuelle de la fissure (on pourrait ainsi refermer une fissure ou « sauter » brusquement d'une valeur à une autre).

Dans l'hypothèse d'un comportement irréversible, cette loi ne peut qu'exprimer l'évolution future de la longueur de fissure, à partir de sa valeur actuelle et donc s'exprimer mathématiquement sous la forme

$$\dot{\ell} = f(G). \quad (3.12)$$

La fonction f ne peut être *a priori* que déterminée par l'expérience. Le second principe n'impose comme seule restriction que la positivité de la dissipation $G\dot{\ell} \geq 0$, et puisque G est positif, la fonction f doit être positive, ce qui entraîne que $\dot{\ell}$ ne peut être que positive et donc que la fissure ne peut qu'avancer (phénomène irréversible).

En Mécanique linéaire de la rupture (rupture fragile), la loi la plus couramment admise repose sur l'existence d'une valeur critique G_c du taux de restitution de l'énergie, à partir de laquelle la fissure avance :

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } G < G_c \text{ alors } \dot{\ell} = 0, \\ \text{si } G = G_c \text{ alors } \dot{\ell} \geq 0. \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

La situation $G > G_c$ est physiquement exclue ; elle n'est pas compatible avec l'hypothèse d'une évolution quasi-statique, et n'est envisageable que dans une évolution dynamique. G_c est nécessairement positif car le taux de restitution de l'énergie est positif.

Commentaires :

1. L'analogie entre la loi (3.13) et le critère de Griffith (3.6) est évidente, mais le contenu des lois est différent. Dans le cas du critère de Griffith, le phénomène décrit est réversible, comme cela a déjà été souligné, et la dissipation est nulle. Dans le cas du critère (3.13), il y a dissipation d'énergie au cours de l'avancée de la fissure $\mathcal{D} = G_c \dot{\ell}$. Par le second principe cette dissipation est nécessairement positive. Il est possible de prendre en compte l'énergie de surface réversible comme l'a fait Griffith en remplaçant dans le bilan (3.7) P par $P + W^s$. La puissance dissipée est alors :

$$\mathcal{D} = (G - 2\gamma)\dot{\ell},$$

³C'est en général le cas, mais il en irait différemment si l'on souhaitait modéliser un phénomène réversible comme l'attraction électrostatique par exemple (penser à deux transparents « collés » l'un à l'autre par des forces électrostatiques).

3.2. TAUX DE RESTITUTION DE L'ÉNERGIE

et la loi de propagation (3.13) devient :

$$\text{si } G - 2\gamma < G_c \text{ alors } \dot{\ell} = 0, \quad \text{si } G - 2\gamma = G_c \text{ alors } \dot{\ell} \geq 0.$$

Le modèle de Griffith correspond à $G_c = 0$, donc à une dissipation nulle.

2. L'intérêt de la formulation énergétique qui vient d'être exposée est qu'elle repose sur des grandeurs physiques incontestables, l'énergie mécanique de la structure et le taux de restitution de l'énergie qui est la force associée au paramètre « longueur de fissure ». Elle est également de portée beaucoup plus générale que l'analyse des singularités de contrainte du chapitre 2. On conçoit par exemple qu'elle puisse être étendue au cas où l'élasticité du matériau est non linéaire (non linéarité physique ou grandes transformations).

3. Le calcul analytique de l'énergie n'est pas toujours facile, mais comme il s'agit d'une grandeur globale, à l'inverse de la singularité des contraintes qui est très locale, certaines approximations peuvent être faites dans le calcul sans pour autant remettre en cause sa validité (calcul approché de l'énergie par des théories de type poutre ou plaque lorsque la géométrie s'y prête, voir exercices).

4. G_c est un paramètre nouveau, qui dépend *a priori* de la forme du corps considéré. C'est donc *a priori* un paramètre *matériau* et *structure* ce qui n'est pas d'un emploi commode puisque cela signifie qu'il faut déterminer la valeur de G_c pour chaque géométrie d'éprouvette et chaque configuration de fissure. Nous verrons plus loin qu'il ne s'agit en fait que d'un paramètre *matériau*, indépendant de la géométrie de l'éprouvette considérée.

5. G_c a la dimension d'une énergie de surface et on l'appelle *énergie de rupture* du matériau. Ce paramètre mesure l'énergie dissipée par unité de longueur de la fissure et non l'énergie due à la création d'une nouvelle surface. C'est une notion très macroscopique qui intègre (sans y faire référence explicitement) beaucoup de phénomènes irréversibles qui ont lieu à toute petite échelle en pointe de fissure (microplasticité, changement de phase etc...) et qui n'ont pas lieu d'être modélisés dans le détail à l'échelle de l'ingénieur.

6. G est une fonction de ℓ et du chargement. L'équation (3.12) est donc une équation différentielle en ℓ dont il n'est pas évident qu'elle possède toujours une solution. Il n'est pas non plus évident que cette solution soit une fonction régulière du temps. On connaît assez peu de résultats généraux sur ces différentes questions. On a pu mettre en évidence des solutions par « sauts », la fissure passant brusquement d'une longueur donnée à une autre longueur.

3.2 Taux de restitution de l'énergie

3.2.1 Expression de G en fonction de paramètres globaux

Pour pouvoir appliquer le critère de propagation (3.13) il est nécessaire de savoir mesurer G_c d'une part, d'autre part de savoir calculer ou mesurer G .

Remarquons que dans le cadre des hypothèses faites (élasticité linéaire, processus quasi-statique et isotherme), l'énergie élastique du corps fissuré s'écrit (la dépendance par rapport au chargement est omise puisque celui-ci peut être considéré comme constant) :

$$W(\ell) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(\ell)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{\xi} \, da \quad \text{car} \quad \underline{T} = 0 \text{ sur } \mathcal{F},$$

et compte tenu de l'expression (3.9) de L

$$P = W - L = \frac{1}{2} \left(\int_{S_{\underline{\xi}}} \underline{T} \cdot \underline{\xi}^d da - \int_{S_T} \underline{T}^d \cdot \underline{\xi} da \right).$$

Tenant compte des conditions aux limites fixées (\underline{T}^d et $\underline{\xi}^d$ sont indépendants de ℓ), $\underline{\xi} = \underline{\xi}^d$ sur $S_{\underline{\xi}}$ et $\underline{T} = \underline{T}^d$ sur S_T , l'expression de G est alors

$$G = -\frac{\partial P}{\partial \ell}(\ell) = \frac{1}{2} \left(\int_{S_T} \underline{T}^d \cdot \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \ell} da - \int_{S_{\underline{\xi}}} \frac{\partial \underline{T}}{\partial \ell} \cdot \underline{\xi}^d da \right),$$

ou encore, toujours à l'aide des conditions aux limites indépendantes de ℓ

$$G = \frac{1}{2} \int_{\partial_0 \Omega} \left(\underline{T} \cdot \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \ell} - \frac{\partial \underline{T}}{\partial \ell} \cdot \underline{\xi} \right) da, \quad (3.14)$$

où $\partial_0 \Omega$ est la partie fixe du bord de $\Omega(\ell)$. Il semble d'après ce résultat que la connaissance de G nécessite non seulement la connaissance des champs $\underline{\xi}$ et $\underline{\sigma}$ sur la configuration $\Omega(\ell)$, mais également sur la configuration $\Omega(\ell + d\ell)$ (nous verrons plus loin qu'il n'en est rien et que G peut être calculé à partir de champs sur $\Omega(\ell)$ seulement).

Exploitions cette relation dans le cas d'un chargement à un paramètre Q , la variable cinématique correspondante étant notée q , de sorte que la puissance des efforts extérieurs est donnée par

$$\mathcal{P}_e = Q\dot{q}.$$

Ce paramètre peut être par exemple la composante verticale de la force appliquée à une éprouvette, comme cela est représenté sur la figure 3.3, le paramètre cinématique q étant alors le déplacement vertical du point d'application de la force Q . Les paramètres q et Q

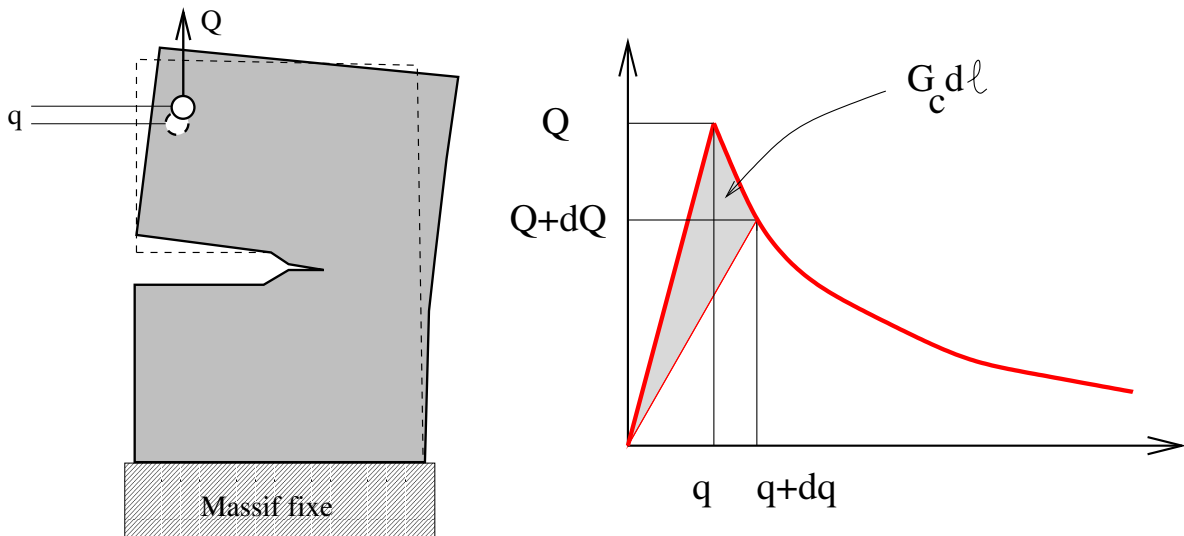


Fig. 3.3: Chargement généralisé Q . Réponse d'une éprouvette fissurée en variables généralisées (q, Q) .

3.2. TAUX DE RESTITUTION DE L'ÉNERGIE

sont dits paramètres de chargement *généralisés* ou *globaux*. Dans ce cas l'expression (3.14) se réduit à :

$$G = \frac{1}{2} \left(Q \frac{\partial q}{\partial \ell} - \frac{\partial Q}{\partial \ell} q \right). \quad (3.15)$$

Plaçons nous dans le repère (q, Q) et augmentons le chargement à partir de 0. Le début de la réponse (q, Q) est linéaire ce qui traduit le fait que la fissure n'avance pas, puis devient non linéaire, ce qui correspond à l'avancée de la fissure. Après la perte de linéarité, la courbe (q, Q) dépend fortement du paramètre de chargement qui est contrôlé (ce peut être q ou Q ou un autre paramètre). Dans le passage d'une longueur de fissure ℓ à une longueur $\ell+d\ell$ les paramètres généralisés passent de (q, Q) à $(q+dq, Q+dQ)$. L'aire balayée par le vecteur (q, Q) lors de l'avancée de la fissure de $d\ell$, hachurée sur la figure 3.3b, est la moitié du produit vectoriel des vecteurs $(q+dq, Q+dQ)$ et (q, Q) et vaut $\frac{1}{2}(Qdq - qdQ)$, donc égale à $Gd\ell$.

Ce résultat donne un moyen simple de mesure de G_c par mesure de (q, Q) et ℓ dans les premiers instants de la propagation de la fissure.

La mesure de G , et donc de G_c , peut également se faire par une mesure de la variation de raideur du corps $\Omega(\ell)$. La raideur $R(\ell)$ et la souplesse $S(\ell)$ de $\Omega(\ell)$ (grandeurs globales) sont définies par

$$Q(\ell) = R(\ell)q(\ell), \quad q(\ell) = S(\ell)Q(\ell).$$

L'expression (3.15) de G se réduit à

$$G = -\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \ell}(\ell) q^2(\ell) = \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \ell}(\ell) Q^2(\ell) \quad (3.16)$$

L'équation (3.16) établit deux points remarquables :

- i) G ne dépend de q et Q que par leur valeur en ℓ , alors que l'expression (3.15) faisait intervenir des dérivées de ces quantités par rapport à ℓ . Conséquence importante : il suffit pour calculer G de connaître les champs $\underline{\xi}$ et $\underline{\sigma}$ sur la configuration $\Omega(\ell)$.
- ii) En particulier G peut être mesuré en maintenant Q constante, ou en maintenant q constante : le résultat final sera identique. Les deux aires hachurées sur la figure 3.4 sont égales (au premier ordre par rapport à $d\ell$). Des considérations de stabilité peuvent faire préférer telle ou telle méthode de contrôle, le contrôle en déplacement étant plus stable que le contrôle en force (cf exercice 2).

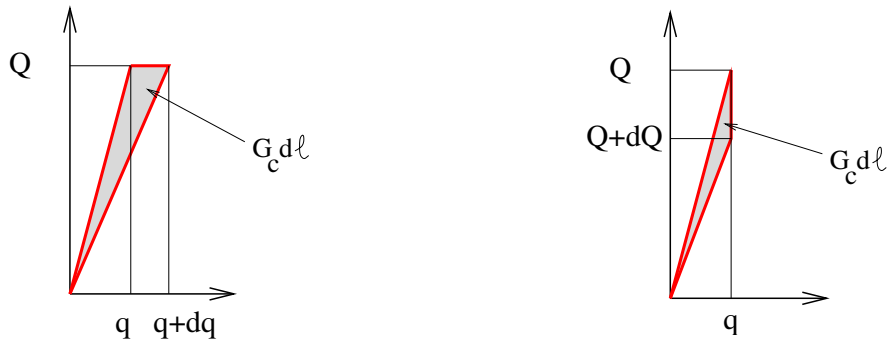


Fig. 3.4: Mesure de G_c . a) A force imposée. b) A déplacement imposé.

3.2.2 Stabilité de la propagation d'une fissure

Considérons une structure contenant une fissure de longueur ℓ et soumise à un chargement donné. Nous supposons qu'un calcul analytique ou numérique a fourni la courbe $G(\ell)$ donnant le taux de restitution de l'énergie en fonction de la longueur de fissure. Comment décider si la fissure existante risque de se propager brutalement à travers la structure (instabilité) ou si au contraire elle n'avancera qu'à condition d'augmenter le chargement (stabilité) ?

La première condition pour l'avancée de la fissure est l'égalité $G = G_c$. Supposons cette condition remplie et interrogeons nous sur la *stabilité* de la propagation. La propagation de la fissure sera stable si une augmentation de la longueur de fissure provoque une diminution du taux de restitution de l'énergie. En effet après une augmentation infinitésimale de la fissure, le taux de restitution de l'énergie deviendra inférieur à G_c et la fissure s'arrêtera. Il faudra alors augmenter le chargement pour augmenter G (qui varie selon (3.16) comme Q^2) et faire avancer la fissure. Au contraire, si une augmentation de la longueur de fissure se traduit par une augmentation de G la fissure sera instable.

En résumé :

$$\text{Propagation si } G = G_c, \left. \begin{array}{l} \text{Propagation stable si } \frac{\partial G}{\partial \ell}(G_c) < 0, \\ \text{Propagation instable si } \frac{\partial G}{\partial \ell}(G_c) > 0, \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

Le statut du cas $\frac{\partial G}{\partial \ell} = 0$ est déterminé par le signe de la première dérivée non nulle de G par rapport à ℓ .

Par exemple, si la courbe $G(\ell)$ de la structure étudiée a la forme présentée sur la figure 3.5, les fissures de longueur inférieure à ℓ_0 ou supérieure à ℓ_1 seront stables et n'avanceront que lorsque le chargement sera augmenté, tandis que les fissures de longueur comprise entre ℓ_0 et ℓ_1 seront instables et croîtront très rapidement jusqu'à atteindre ℓ_1 où elles se stabiliseront.

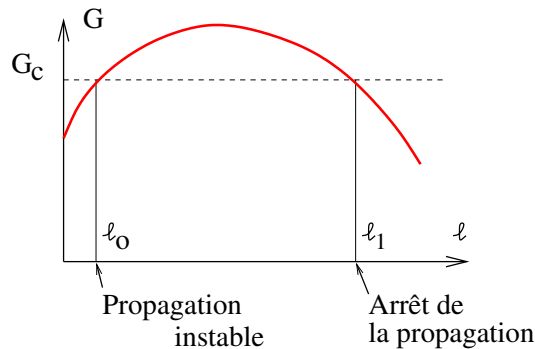


Fig. 3.5: Stabilité de la propagation d'une fissure.

3.3 Lien entre les notions de singularité des contraintes et de taux de restitution de l'énergie

À première vue les notions de singularité des contraintes (notion locale) et celle de taux de restitution de l'énergie, dont l'expression (3.15) souligne le caractère global, n'ont pas de point commun. Pourtant un résultat dû à Irwin (1957) relie ces deux notions.

3.3. LIEN ENTRE SINGULARITÉ DES CONTRAINTES ET TAUX DE RESTITUTION DE L'ÉNERGIE

Dans le cadre des hypothèses précédentes (élasticité linéaire isotrope et homogène, processus quasi-statique, géométrie plane, fissure rectiligne) et en supposant de plus l'élasticité homogène et isotrope, le taux de restitution de l'énergie et les facteurs d'intensité des contraintes en point de fissure sont reliés par :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2. \quad (3.18)$$

(sous l'hypothèse des déformations planes pour les deux premiers modes).

Commentaires :

1. La formule d'Irwin éclaire d'un jour nouveau les notions de facteurs d'intensité des contraintes et de ténacité K_{Ic} , dont le caractère physique peut être contesté, comme nous l'avons vu au chapitre 2. En reliant ces deux notions à celle de taux de restitution de l'énergie, dont l'interprétation physique est incontestable, elle leur confère du même coup une plus grande légitimité physique. Par exemple, la présence d'une toute petite zone plastique en pointe de fissure peut complètement remettre en cause la présence même de singularités, tandis qu'elle n'affectera que très peu l'énergie globale P dont dérive G .

2. La formule d'Irwin est valable en mode mixte à condition que les hypothèses sous lesquelles elle est établie soient satisfaites. Parmi ces hypothèses figure le fait que la fissure doit être rectiligne et avancer en ligne droite. Il y a peu de chances pour que ce soit le cas d'une fissure sollicitée en mode II (une bifurcation de la fissure est plus vraisemblable). De même, le mode III risque d'introduire une influence de la troisième variable d'espace et les hypothèses qui assurent la validité de la formule d'Irwin risquent rapidement de ne plus être satisfaites. Le domaine d'application de cette formule est donc essentiellement le mode I.

3. Le critère de propagation (3.13) est en accord avec le critère du K_{Ic} . L'énergie de rupture G_c et la ténacité K_{Ic} sont reliées par :

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{EG_c}{1 - \nu^2}}. \quad (3.19)$$

L'énergie de rupture G_c est donc un paramètre *matériau* (au même titre que la ténacité K_{Ic}), qui ne dépend pas de la *structure* considérée.

Démonstration de (3.18) : Considérons deux états successifs de la fissure de longueur ℓ (état 1) et $\ell + d\ell$ (état 2). Les champs de déplacement $\underline{\xi}$ et de contrainte $\underline{\sigma}$ dans les états 1 et 2 sont affectés d'indices supérieurs 1 et 2. Le chargement est identique dans les deux cas (on a vu que cette hypothèse n'avait en fait pas d'importance pour le calcul de G). Il résulte de (3.14) que le taux de restitution de l'énergie s'exprime, au premier ordre par rapport à $d\ell$ par :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\partial_0 \Omega} \left[\underline{T}(\ell) \cdot \frac{\underline{\xi}(\ell + d\ell) - \underline{\xi}(\ell)}{d\ell} - \frac{\underline{T}(\ell + d\ell) - \underline{T}(\ell)}{d\ell} \cdot \underline{\xi}(\ell) \right] da,$$

relation qui, après simplification et usage des notations précédentes, se réduit à :

$$Gd\ell = \frac{1}{2} \int_{\partial_0 \Omega} (\underline{T}^1 \cdot \underline{\xi}^2 - \underline{T}^2 \cdot \underline{\xi}^1) da.$$

Cette forme rappelle le théorème de Maxwell-Betti et incite à en reprendre le raisonnement. En vertu des symétries du tenseur de raideur élastique $\underline{\underline{C}}$ on remarque que :

$$\int_{\Omega(\ell+d\ell)} \underline{\underline{\varepsilon}}^1 : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 d\Omega = \int_{\Omega(\ell+d\ell)} \underline{\underline{\sigma}}^1 : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 d\Omega = \int_{\Omega(\ell+d\ell)} \underline{\underline{\varepsilon}}^1 : \underline{\underline{\sigma}}^2 d\Omega.$$

Les deux derniers termes de cette égalité peuvent être transformés par la formule de Green en tenant compte du fait que les forces de volume sont nulles. Le bord du domaine $\Omega(\ell + d\ell)$ se compose du bord fixe $\partial_0\Omega$, de la fissure $\mathcal{F}(\ell)$ de longueur ℓ , et d'une portion supplémentaire $\Gamma(d\ell)$ correspondant à l'accroissement de la fissure (3.6). Le vecteur contrainte dans l'état 2 est nul sur toute la fissure $\mathcal{F}(\ell + d\ell)$ tandis que le vecteur contrainte dans l'état 1 est nul sur $\mathcal{F}(\ell)$ mais non nul sur Γ . Il vient alors :

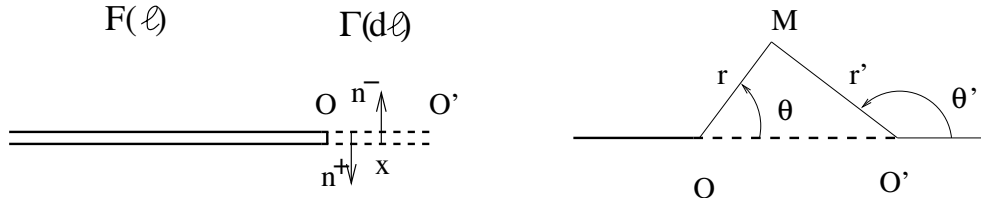


Fig. 3.6: Progression infinitésimale de la fissure.

$$\int_{\Omega(\ell+d\ell)} \underline{\underline{\sigma}}^2 : \underline{\underline{\varepsilon}}^1 d\Omega = \int_{\partial_0\Omega} \underline{T}^2 \cdot \underline{\xi}^1 da, \quad \int_{\Omega(\ell+d\ell)} \underline{\underline{\varepsilon}}^2 : \underline{\underline{\sigma}}^1 d\Omega = \int_{\partial_0\Omega} \underline{T}^1 \cdot \underline{\xi}^2 da + \int_{\Gamma} \underline{T}^1 \cdot \underline{\xi}^2 da,$$

et par différence :

$$\int_{\partial_0\Omega} (\underline{T}^1 \cdot \underline{\xi}^2 - \underline{T}^2 \cdot \underline{\xi}^1) da = - \int_{\Gamma} \underline{T}^1 \cdot \underline{\xi}^2 da,$$

soit finalement

$$Gd\ell = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \underline{T}^1 \cdot \underline{\xi}^2 da. \quad (3.20)$$

Avant de continuer le calcul soulignons une particularité de ce résultat. A gauche de (3.20) figure une quantité très globale, la variation de l'énergie totale du système dans un accroissement $d\ell$ de la longueur de fissure. A droite de (3.20) figure au contraire une quantité très locale, portée par Γ qui est l'accroissement infinitésimal de la fissure. Cette « réconciliation » entre les aspects globaux et locaux de l'avancée de la fissure est à la base de la formule d'Irwin.

Il reste à calculer le second membre de (3.20). Pour cela nous pouvons employer les expressions asymptotiques des champs \underline{T}^1 et $\underline{\xi}^2$ établies au chapitre 2, en tenant compte du fait que Γ compte deux lèvres notées Γ^+ et Γ^- et que l'origine des coordonnées polaires est O pour \underline{T}^1 et O' pour $\underline{\xi}^2$ (figure 3.6). Les quantités nécessaires au calcul sont :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^+ : \quad \underline{T}^1 &= \underline{\underline{\sigma}}^1 \cdot \underline{n}^+ = -\sigma_{\theta r}^1 e_1 - \sigma_{\theta\theta}^1 e_2 - \sigma_{\theta z}^1 e_3 \quad \text{en } r = x, \theta = 0, \\ \underline{\xi}^2 &= \xi_r^2 e_1 + \xi_\theta^2 e_2 + \xi_z^2 e_3 \quad \text{en } r' = d\ell - x, \theta' = \pi, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^- : \quad \underline{T}^1 &= \underline{\underline{\sigma}}^1 \cdot \underline{n}^- = \sigma_{\theta r}^1 e_1 + \sigma_{\theta\theta}^1 e_2 + \sigma_{\theta z}^1 e_3 \quad \text{en } r = x, \theta = 0, \\ \underline{\xi}^2 &= \xi_r^2 e_1 + \xi_\theta^2 e_2 + \xi_z^2 e_3 \quad \text{en } r' = d\ell - x, \theta' = -\pi, \end{aligned} \right\}$$

Il vient :

$$- \int_{\Gamma} \underline{T}^1 \cdot \underline{\xi}^2 da = \int_0^{d\ell} [\sigma_{\theta r}^1(x, 0) [\xi_r^2](d\ell - x) + \sigma_{\theta\theta}^1(x, 0) [\xi_\theta^2](d\ell - x) + \sigma_{\theta z}^1(x, 0) [\xi_z^2](d\ell - x)] dx.$$

3.3. LIEN ENTRE SINGULARITÉ DES CONTRAINTES ET TAUX DE RESTITUTION DE L'ÉNERGIE

Cette intégrale est calculée (au premier ordre par rapport à $d\ell$) à l'aide des expressions asymptotiques (2.10), (2.12) et (2.13). On note qu'il n'est pas nécessaire de distinguer dans le calcul les facteurs d'intensité des contraintes en ℓ et en $\ell + d\ell$, cette distinction n'intervenant qu'à l'ordre 2 en $d\ell$ dans le résultat. Détaillons par exemple le calcul du dernier terme (les autres calculs sont analogues) :

$$\int_0^{d\ell} \sigma_{\theta z}^1(x, 0) \llbracket \xi_z^2 \rrbracket (d\ell - x) dx = \int_0^{d\ell} \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi x}} \frac{4K_{\text{III}}}{\mu} \sqrt{\frac{d\ell - x}{2\pi}} dx = \frac{2K_{\text{III}}^2}{\mu\pi} \int_0^{d\ell} \sqrt{\frac{d\ell - x}{x}} dx = \frac{K_{\text{III}}^2}{\mu} d\ell.$$

De la même façon on obtient :

$$\int_0^{d\ell} \sigma_{\theta r}^1(x, 0) \llbracket \xi_r^2 \rrbracket (d\ell - x) dx = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} K_{\text{II}}^2 d\ell, \quad \int_0^{d\ell} \sigma_{\theta\theta}^1(x, 0) \llbracket \xi_\theta^2 \rrbracket (d\ell - x) dx = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} K_{\text{I}}^2 d\ell,$$

ce qui joint à (3.20) conduit à la relation annoncée (3.18).

Formules et résultats essentiels

- **Energie potentielle d'une structure**

▷ Energie élastique :

$$W = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}) w(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi})) \, d\Omega.$$

▷ Potentiel des efforts extérieurs : $-L$ où :

$$L(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}) \underline{F}(\underline{x}) \cdot \underline{\xi}(\underline{x}) \, d\Omega + \int_{S_T} \underline{T}^d(\underline{x}) \cdot \underline{\xi}(\underline{x}) \, da.$$

▷ Energie potentielle totale :

$$P = W - L.$$

- **Taux de restitution de l'énergie**

▷ Structure contenant une fissure rectiligne de longueur ℓ :

$$G = -\frac{\partial P}{\partial \ell}(\ell).$$

▷ Energie dissipée dans l'avancée d'une fissure d'une quantité $d\ell$:

$$\mathcal{D} = G \dot{\ell} \geq 0.$$

- **Critère de propagation**

▷ Taux de restitution de l'énergie critique :

$$\text{si } G < G_c \text{ alors } \dot{\ell} = 0, \quad \text{si } G = G_c \text{ alors } \dot{\ell} \geq 0.$$

▷ Expression de G en fonction de la raideur $R(\ell)$ ou de la souplesse $S(\ell)$ de la structure :

$$G = -\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \ell}(\ell) q^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \ell}(\ell) Q^2.$$

▷ Stabilité de la propagation :

$$\text{Propagation stable si } \frac{\partial G}{\partial \ell}(G_c) < 0, \quad \text{propagation instable si } \frac{\partial G}{\partial \ell}(G_c) > 0.$$

- **Lien entre taux de restitution de l'énergie et facteurs d'intensité des contraintes**

▷ Formule d'Irwin dans un matériau homogène et isotrope :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2.$$

3.4 Exercices

Exercice 1. Test de pelage. *Un ruban adhésif est assimilé à une bande élastique de module d'Young E et d'épaisseur $e \ll 1$. Ce ruban est collé sur un substrat par un adhésif qui présente un comportement de type fragile caractérisé par une énergie de rupture G_c . Le ruban est soumis à un test de « pelage » qui consiste en l'application d'une force $\underline{Q} = Q\underline{u}$ faisant un angle constant θ avec le substrat.*

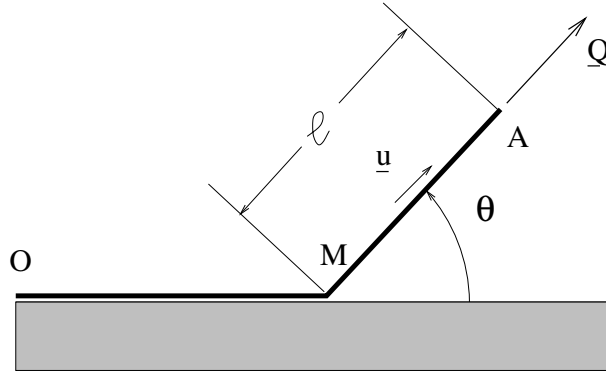


Fig. 3.7: test de pelage.

1⁰) *Le ruban est décollé sur une longueur ℓ . En assimilant la partie décollée MA du ruban à un milieu élastique unidimensionnel rectiligne, exprimer l'énergie élastique du ruban en fonction de ℓ . Faire de même pour l'énergie potentielle de l'effort \underline{Q} .*

2⁰) *En admettant que le décollement du ruban est régi par le critère (3.13), déterminer la valeur de la force Q pour laquelle se produit le décollement en fonction de l'énergie de rupture G_c .*

Eléments de réponse

1⁰) La partie OM du ruban adhérent au substrat ne subit aucune déformation et son énergie élastique est donc nulle. La partie MA subit une contrainte $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{u} \otimes \underline{u}$, où $\sigma = \frac{Q}{e}$ et son énergie élastique est :

$$W = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} e \ell = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{eE} \ell.$$

L'énergie potentielle des efforts extérieurs s'écrit :

$$-L = -\underline{Q} \cdot \underline{OA} = -Q [\ell_0 \cos \theta + \ell(1 - \cos \theta)],$$

où ℓ_0 désigne la longueur totale du ruban (en réalité sans importance pour la suite car l'énergie potentielle est définie à une constante additive près). L'énergie potentielle totale est donc :

$$P(\ell) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{eE} \ell - Q [\ell_0 \cos \theta + \ell(1 - \cos \theta)],$$

et le taux de restitution de l'énergie est

$$G = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{eE} + Q(1 - \cos \theta).$$

2⁰) Le décollement se produira lorsque :

$$G = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{eE} + Q(1 - \cos \theta) = G_c.$$

Cette équation du second degré n'a de solution que lorsque l'énergie de rupture de l'adhésif n'est pas trop grande :

$$G_c \leq \frac{Ee}{2}(1 - \cos \theta)^2.$$

Dans ce cas la plus petite solution positive de cette équation du second degré est :

$$Q = \frac{2G_c}{1 - \cos \theta + \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 - \frac{2G_c}{Ee}}}.$$

On vérifie aisément que cette force est une fonction décroissante de θ : plus l'angle θ est important, plus il est facile d'arracher le ruban du substrat. Lorsque le ruban est très raide ($E \rightarrow +\infty$), la force de pelage est

$$Q = \frac{G_c}{1 - \cos \theta}.$$

Chapitre 4

Analyse énergétique de la propagation d'une fissure II.

Fissuration par fatigue

Introduction et cadre de travail...

Le chapitre précédent a posé les bases de l'analyse énergétique de la propagation d'une fissure, et montré la pertinence et l'utilité de critères de propagation basés sur une notion d'énergie critique de rupture. Il importe alors de pouvoir mettre en œuvre de tels critères sur des structures complexes. Cela demande de savoir évaluer (par exemple) le taux de restitution de l'énergie pour une configuration (fissure, chargement,...) donnée. On présente ainsi dans ce chapitre (section 4.1) des expressions de G sous forme d'intégrales sur des domaines de contrôle, ou sur le contour de tels domaines, qui sont bien adaptées au calcul numérique.

Par souci de simplification, les notions essentielles de mécanique de la rupture ont été jusqu'ici surtout discutées pour des géométries bidimensionnelles. La section 4.2 discute l'extension des principaux concepts (notamment celui de taux de restitution de l'énergie) dans un cadre tridimensionnel, permettant d'appréhender quelques aspects techniquement délicats introduits par cette généralisation.

Enfin, la section 4.3 présente un aperçu de la fissuration par fatigue, engendrée par des chargements sous-critiques répétitifs.

Tout ce chapitre s'appuie sur une série d'hypothèses déjà retenues aux chapitres 2 et 3, à savoir :

- ▷ *les déformations sont suffisamment petites pour que l'hypothèse des petites perturbations soit légitime,*
- ▷ *les matériaux étudiés ont un comportement élastique et linéaire (et ils seront le plus souvent homogènes et isotropes),*
- ▷ *les transformations sont suffisamment lentes pour pouvoir se placer dans l'approximation d'une évolution quasi-statique (les termes d'accélération sont négligés),*
- ▷ *Les fissures sont libres de contraintes.*

4.1 Taux de restitution de l'énergie : intégrales invariantes

L'objectif de cette section est d'exprimer le taux de restitution de l'énergie G sous forme d'intégrales (de contour ou de domaine) *indépendantes du contour*. Ces résultats sont notamment très utiles, comme on le montrera, pour le calcul numérique de G par la méthode des éléments finis.

Nous plaçons cette section dans un contexte bidimensionnel (déformations planes). Reprenant les notations du chapitre 3, le corps considéré occupe un domaine $\Omega(\ell)$, et contient une fissure rectiligne $\mathcal{F}(\ell)$ de longueur ℓ , libre de contraintes mais susceptible d'avancer. On note $\partial_0\Omega$ la partie inchangée du bord de $\Omega(\ell)$ (l'autre partie du bord étant $\mathcal{F}(\ell)$), S_ξ la partie de $\partial_0\Omega$ soumise à des déplacements imposés $\underline{\xi}^d$, S_T la partie de $\partial\Omega$ soumise à des forces imposées \underline{T}^d . L'ensemble des sollicitations appliquées est parfois noté symboliquement par \mathcal{C} .

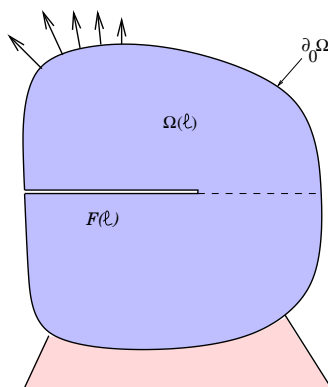


Fig. 4.1: Géométrie du corps fissuré.

4.1.1 Taux de restitution de l'énergie

On a montré au chapitre 3 que la puissance dissipée \mathcal{D} dans une propagation rectiligne de fissure telle que la pointe avance avec une vitesse $\dot{\ell}$ est liée à l'énergie potentielle à l'équilibre P par

$$\mathcal{D} = G\dot{\ell} = -\frac{\partial P}{\partial \ell}(\ell, \mathcal{C})\dot{\ell} = -\frac{dP}{dt}\Big|_{\mathcal{C}=\text{cste}} \quad (4.1)$$

où P , donnée en fonction de la solution à l'équilibre $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$ par

$$P = \frac{1}{2} \int_{\Omega(\ell)} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\partial_T \Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{\xi} \, da, \quad (4.2)$$

est en fait fonction (implicite) de la géométrie de fissure ℓ et du chargement appliqué \mathcal{C} à travers la solution $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$, déterminée par (ℓ, \mathcal{C}) .

Pour une évolution donnée $\ell(t)$ de longueur de fissure, on peut ainsi exprimer G sous la forme d'une dérivée temporelle :

$$G(t) = -\frac{d}{dt}P(\ell(t), \mathcal{C}) = -\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} [P(\ell(t+dt), \mathcal{C}) - P(\ell(t), \mathcal{C})] \quad (4.3)$$

où le chargement \mathcal{C} est maintenu constant (égal à la valeur atteinte à l'instant t considéré).

4.1.2 Expression de G sous forme d'intégrale de domaine

On cherche ici à mettre en œuvre l'idée suivante : évaluer le taux de restitution de l'énergie G par calcul direct de la dérivée temporelle (4.3). Pour ce faire, on introduit une *transformation* du domaine Ω :

$$\underline{x} \in \Omega(t) \implies \underline{x} + \dot{\ell}(t)\underline{\theta}(\underline{x})dt \in \Omega(t+dt) \quad (4.4)$$

définie en termes d'un champ de *vitesse de transformation* $\underline{\theta}$, supposé continu sur $\Omega(\ell(t))$ et construit de façon à ce qu'un voisinage D de la pointe de fissure « suive » cette dernière dans un avancement de vitesse unité, donc tel que (avec les notations de la figure 4.2) :

$$\begin{aligned} \underline{\theta} &= \underline{0} && \text{à l'extérieur de } D, \\ \underline{\theta} &= \underline{e}_x && \text{en pointe de fissure.} \end{aligned} \quad (4.5)$$

La transformation (4.4) est fictive : c'est un artifice mathématique pour représenter le changement de domaine associé à la propagation de fissure. Elle ne décrit pas les trajectoires matérielles suivies par les points matériels de Ω sous l'effet de la propagation, et $\dot{\ell}(t)\underline{\theta}(\underline{x})$ n'est en général *pas* la vitesse du point matériel situé en \underline{x} à l'instant t .

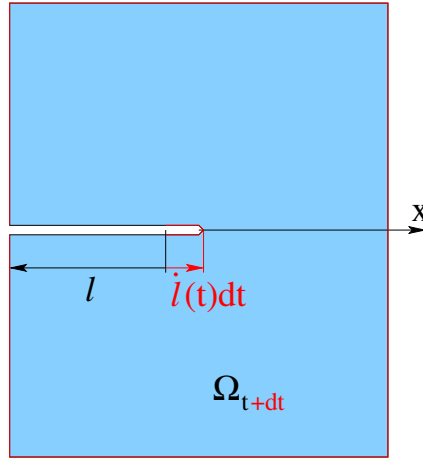


Fig. 4.2: Transformation du domaine Ω , vitesse de transformation $\underline{\theta}$.

L'idée générale est alors d'évaluer la dérivée temporelle (4.3) par *dérivation particulière* de l'expression (4.2) dans le « mouvement » (4.4), au moyen des formules de dérivation particulière d'intégrales établies en Cinématique des milieux continus [1, 2]. Cette opération conduit à l'expression (démonstration ci-après) :

$$\frac{d}{dt}P(\ell(t), \mathcal{C}) = \dot{\ell}(t) \int_{\Omega(t)} \left[\frac{1}{2}(\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}) \operatorname{div} \underline{\theta} - \underline{\sigma} : (\underline{\nabla} \xi \cdot \underline{\nabla} \theta) \right] d\Omega. \quad (4.6)$$

Introduisant le *tenseur d'Eshelby* $\underline{\underline{E}}$, défini par

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon})\underline{\underline{1}} - {}^T \underline{\nabla} \xi \cdot \underline{\underline{\sigma}}, \quad (4.7)$$

l'expression (4.6) de la dérivée de l'énergie potentielle prend alors la forme compacte

$$\frac{d}{dt}P(\ell(t), \mathcal{C}) = \dot{\ell}(t) \int_{\Omega(t)} {}^T \underline{\nabla} \theta : \underline{\underline{E}} d\Omega. \quad (4.8)$$

La puissance dissipée dans une vitesse d'avancée de fissure $\dot{\ell}$ étant donnée par (4.1), on obtient donc le résultat

$$G = - \int_{\Omega(t)} \text{T} \underline{\underline{\nabla}} \theta : \underline{\underline{E}} \, d\Omega. \quad (4.9)$$

Propriété remarquable du tenseur d'Eshelby : celui-ci vérifie

$$\text{div} \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{hors de la pointe de fissure} \quad (4.10)$$

en l'absence de forces de volume (démonstration : simple vérification à partir de la définition (4.7) de $\underline{\underline{E}}$).

Démonstration de l'expression (4.6) de dP/dt . Comme indiqué précédemment, elle met en œuvre des outils issus de la cinématique des milieux continus :

(i) Dérivée particulaire \dot{g} d'un champ $g(\underline{x}, t)$:

$$\dot{g}(\underline{x}, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} [g(\underline{x} + \dot{\ell}(t)\underline{\theta}(\underline{x})dt, t + dt) - g(\underline{x}, t)] = \frac{\partial g}{\partial t}(\underline{x}, t) + \dot{\ell}(t)\underline{\nabla}g(\underline{x}, t) \cdot \underline{\theta}(\underline{x})$$

(ii) Dérivée particulaire d'un champ de gradient :

$$\widehat{\underline{\underline{\nabla}}\xi}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\nabla}}\dot{\xi}(\underline{x}, t) - \dot{\ell}(t)\underline{\nabla}\xi(\underline{x}, t) \cdot \underline{\nabla}\underline{\theta}(\underline{x})$$

(iii) Dérivée lagrangienne d'une intégrale de domaine :

$$I(t) = \int_{\Omega(t)} g(\underline{x}, t) \, d\Omega \quad \frac{dI}{dt} = \int_{\Omega(t)} \{ \dot{g}(\underline{x}, t) + \dot{\ell}(t)g(\underline{x}, t) \text{div} \underline{\theta}(\underline{x}) \} \, d\Omega$$

Les dérivées sont prises à l'instant t , avec $\Omega(\ell(t))$ choisi comme configuration de référence. La dérivée particulaire de la densité d'énergie de déformation se calcule au moyen de (ii) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \widehat{\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}} &= \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} && \text{(bilinearité)} \\ &= \widehat{\underline{\underline{\nabla}}\xi} : \underline{\underline{\sigma}} && \text{(symétrie mineure de } \underline{\underline{C}} \text{ + comportement)} \\ &= \underline{\underline{\nabla}}\dot{\xi} : \underline{\underline{\sigma}} - \dot{\ell}(t)(\text{T} \underline{\underline{\nabla}}\underline{\theta} \cdot \text{T} \underline{\underline{\nabla}}\xi) : \underline{\underline{\sigma}} && \text{identité (ii)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

La dérivée particulaire de l'énergie de déformation est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega &= \int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{1}{2} \widehat{\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}} + \dot{\ell}(t)\underline{\varepsilon} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \text{div} \underline{\theta} \right\} \, d\Omega \quad \text{(identité (iii))} \\ &= \int_{\Omega(t)} \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}[\dot{\xi}] : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \dot{\ell}(t)\text{T} \underline{\underline{\nabla}}\underline{\theta} : \underline{\underline{E}} \right\} \, d\Omega \quad \text{((4.11) et définition (4.7))} \end{aligned}$$

La surface S_T étant fixe dans la transformation (4.4), la dérivée particulaire de l'énergie potentielle à l'équilibre (4.2) est ainsi donnée par

$$\frac{dP}{dt} = \int_{\Omega(t)} \underline{\underline{\varepsilon}}[\dot{\xi}] : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega + \dot{\ell}(t) \int_{\Omega(t)} \text{T} \underline{\underline{\nabla}}\underline{\theta} : \underline{\underline{E}} \, d\Omega - \int_{S_T} \underline{\underline{T}}^D \cdot \underline{\underline{\dot{\xi}}} \, da \quad (4.12)$$

4.1. TAUX DE RESTITUTION DE L'ÉNERGIE : INTÉGRALES INVARIANTES

On élimine alors $\dot{\underline{\xi}}$ (dérivée particulière de la solution), en remarquant que

$$\forall t, \underline{\xi} \in \mathcal{C}(\underline{\xi}^d) \implies \dot{\underline{\xi}} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

permet d'écrire l'identité (formulation faible de l'équilibre et symétrie du comportement) :

$$\int_{\Omega(t)} \underline{\underline{\underline{\underline{\xi}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}} d\Omega - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \dot{\underline{\xi}} da = 0$$

L'expression (4.6) découle alors de l'utilisation de l'identité ci-dessus dans (4.12).

Remarques :

- (a) On retrouve dans l'expression (4.9) le fait que G ne dépend que de la solution sur la configuration actuelle $\Omega(t)$.
- (b) Il faut encore vérifier que l'expression (4.9) est indépendante du choix de prolongement $\underline{\theta}$ de la vitesse d'avancée de fissure $\dot{\underline{\ell}}_{\underline{e}_x}$ (voir section 4.1.6).

4.1.3 Expression de G sous forme d'intégrale de contour

Compte tenu de la propriété (4.10) du tenseur d'Eshelby, il est tentant de chercher à transformer l'expression (4.9) en intégrale de contour par application du théorème de la divergence et des hypothèses (4.5) faites pour $\underline{\theta}$. Cette manipulation conduit au résultat (faux!) $G = 0$ si elle est faite sans précaution. Cela est lié à la non-intégrabilité de $\text{div } \underline{\underline{E}}$, singulier comme $O(r^{-2})$, à la pointe de fissure.

On va alors adapter cette approche en *isolant* un voisinage de la pointe de fissure, l'idée étant donc d'exploiter la propriété (4.10) sur une région ne contenant pas de pointe. Considérons à nouveau un voisinage D de la pointe de fissure, introduisons un voisinage D_1 de la pointe de fissure *strictement contenu dans* D (figure 4.3), délimité par un contour C joignant F^+ à F^- . Choisissons un champ de vitesse de transformation $\underline{\theta}$ *constant dans* D_1 , qui doit donc satisfaire aux conditions

$$\begin{aligned} \underline{\theta} &= \underline{0} && \text{à l'extérieur de } D_2, \\ \underline{\theta} &= \underline{e}_x && \text{à l'intérieur de } D_1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Cette démarche conduit au résultat suivant (démonstré ci-après), donnant une expression de G sous la forme d'une intégrale de contour, habituellement notée J et connue sous le nom d'*intégrale J de Rice-Eshelby* :

$$G = J \quad \text{avec} \quad J = \int_C \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{n} da = \int_C \left(\frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) n_x - \underline{\xi}_{,x} \cdot \underline{T}(\underline{n}) \right) da \quad (4.14)$$

On montrera un peu plus loin (section 4.1.4) que l'intégrale J est *indépendante du choix du contour C* .

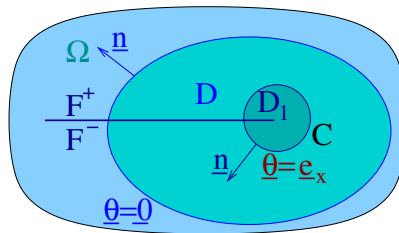


Fig. 4.3: Voisinsages emboîtés $D_1 \subset D$ de la pointe de fissure

Démonstration du résultat (4.14). Scindant l'expression (4.9) de G de façon à isoler la contribution de D_1 , on peut écrire

$$G = - \int_{D_1} \text{T}\underline{\underline{\nabla}}\theta : \underline{\underline{E}} \, d\Omega - \int_{D-D_1} \text{T}\underline{\underline{\nabla}}\theta : \underline{\underline{E}} \, d\Omega$$

La première intégrale s'annule car les conditions (4.13) entraînent $\underline{\underline{\nabla}}\theta = \underline{\underline{0}}$. La seconde est transformée en remarquant que

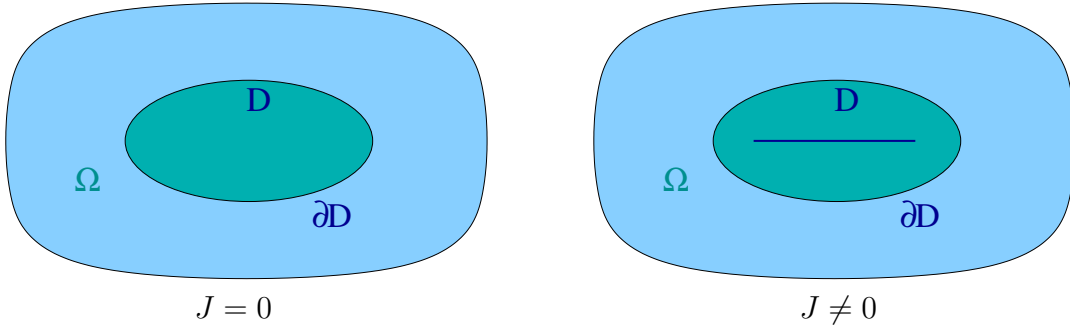
$$\text{T}\underline{\underline{\nabla}}\theta : \underline{\underline{E}} = \text{div}(\underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{E}}) - \underline{\underline{\theta}} \cdot \text{div}(\underline{\underline{E}}) = \text{div}(\underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{E}}),$$

exploitant la propriété (4.10). L'application du théorème de la divergence conduit alors au résultat (4.14) via :

$$G = - \int_{D-D_1} \text{div}(\underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{E}}) \, d\Omega = \int_C \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{n}} \, da - \int_{\partial D} \underline{\underline{\theta}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{n}} \, da = \int_C \underline{\underline{e}}_x \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{n}} \, da = J,$$

Indicatrice de présence d'une fissure. L'intégrale J peut être vue comme indicatrice de la présence d'une fissure. En effet, D étant un domaine de contrôle $D \subset \Omega$ quelconque, de bord ∂D , on a :

$$J = \int_{\partial D} \underline{\underline{e}}_x \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{n}} \, da = \int_{\partial D} \left(\frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) n_x - \xi_{,x} \cdot \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{n}}) \right) da$$



Si le solide ne contient pas de fissure, alors :

$$J = \int_D \underline{\underline{e}}_x \cdot \text{div} \underline{\underline{E}} \, d\Omega \Rightarrow J = 0$$

Si le solide ne contient pas de fissure, alors en général :

$$J = G \neq 0$$

Cette interprétation peut être utile dans des situations où l'on cherche à déterminer à l'aide de mesures non destructives, généralement réalisées en paroi externe, si un solide contient ou non une fissure cachée (on peut par exemple prendre $D = \Omega$ et évaluer J à partir des données aux limites si on connaît le déplacement *et* le vecteur contrainte sur *toute* la frontière).

4.1.4 Indépendance de l'intégrale J par rapport au contour

Pour examiner l'indépendance de l'intégrale J par rapport au contour, considérons d'abord deux domaines de contrôle D_1, D_2 emboîtés ($D_2 \supset D_1$) et posons $D_2 = D_1 \cup D_{12}$ (figure 4.4). L'intégrale $J(D_2)$ pour le domaine de contrôle D_2 , de contour ∂D_2 , s'écrit alors

4.1. TAUX DE RESTITUTION DE L'ÉNERGIE : INTÉGRALES INVARIANTES

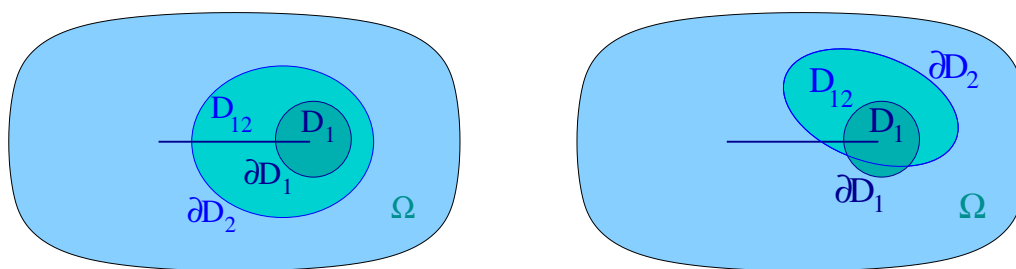


Fig. 4.4: Indépendance de l'intégrale J par rapport au contour : domaines de contrôle emboîtés (à gauche) ou non emboîtés (à droite).

$$\begin{aligned} J(D_2) &= \int_{\partial D_2} \underline{e}_x \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da - \int_{\partial D_1} \underline{e}_x \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da + \int_{\partial D_1} \underline{e}_x \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da \\ &= J(D_{12}) + J(D_1) \end{aligned}$$

De plus, $J(D_{12}) = 0$ (par exploitation de (4.10), D_{12} ne contenant pas de pointe de fissure, et application de la formule de la divergence) d'où

$$J(D_2) = J(D_1)$$

L'indépendance de l'intégrale J par rapport au contour est ainsi établie dans le cas de deux contours emboîtés. Pour le cas de deux domaines de contrôle D_1, D_2 non emboîtés (figure 4.4), l'argument précédent s'adapte (exercice), et on a encore

$$J(D_2) = J(D_1)$$

La figure 4.5 récapitule les diverses possibilités, selon qu'une fissure est présente ou non, et (si oui) son intersection avec les domaines de contrôle. L'invariance de J par

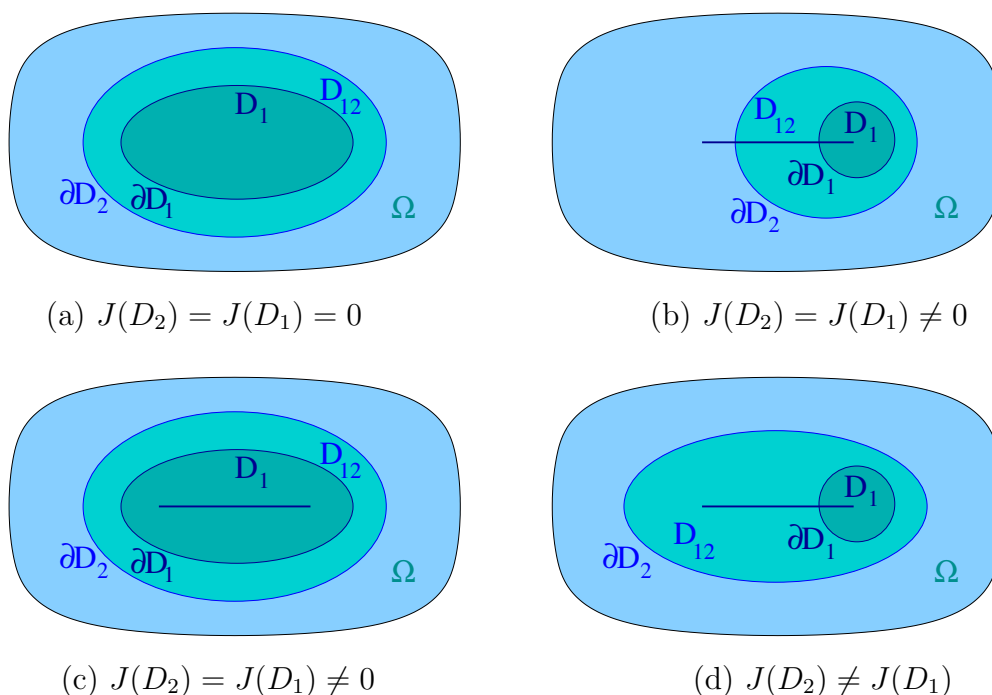


Fig. 4.5: Invariance (ou non) de J par rapport au contour.

rapport au contour n'a lieu que pour des configurations fissure-contour topologiquement identiques (cas (a), (b) et (c) de la figure 4.5).

4.1.5 Intégrale J et formule d'Irwin

L'intégrale J étant indépendante par rapport au contour, elle est égale à sa valeur trouvée par passage à la limite pour un contour évanouissant encerclant la pointe de fissure. Considérons donc un voisinage D_ϵ circulaire de (petit) rayon ϵ (figure 4.6), et examinons la limite

$$J = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} \underline{e}_x \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da$$

Pour ϵ suffisamment petit, on peut approcher les champs de déplacement et de contrainte dans l'expression (4.7) de \underline{E} par leurs expressions asymptotiques en pointe de fissure (chapitre 2) :

$$\underline{\nabla} \xi \sim \frac{K}{\sqrt{\rho}} F_\xi(\theta), \quad \underline{\sigma} \sim \frac{K}{\sqrt{\rho}} F_\sigma(\theta). \quad (4.15)$$

Compte tenu de ce qu'on a également $da = \epsilon d\theta$ sur le contour ∂D_ϵ , l'évaluation de la limite (4.15) conduit comme attendu, tous calculs faits, la *formule d'Irwin* (3.18) :

$$J = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 = G.$$

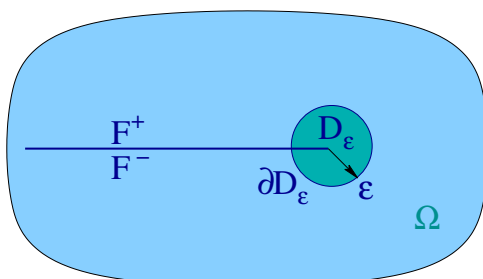


Fig. 4.6: Voisinage D_ϵ circulaire évanouissant encerclant la pointe de fissure.

4.1.6 Formulation par intégrale de domaine : indépendance en $\underline{\theta}$

Pour tout domaine de contrôle D contenant la pointe de fissure, pour tout champ vectoriel $\underline{\theta}$ continu sur $\Omega(\ell)$, nul à l'extérieur de D et égal en A à la vitesse d'avancement $\dot{\ell} \underline{e}_x$ de la pointe de fissure, le taux de restitution de l'énergie est donné par (4.9), i.e. :

$$G = - \int_D \text{T} \underline{\nabla} \theta : \underline{E} \, d\Omega = - \int_D \left(\frac{1}{2} (\underline{\sigma} : \underline{\nabla} \xi) \text{div} \underline{\theta} - \underline{\sigma} \cdot (\underline{\nabla} \xi \cdot \underline{\nabla} \theta) \right) d\Omega$$

(démonstration ci-après). L'indépendance en $\underline{\theta}$ de la formulation par intégrale de domaine de G est ainsi établie, et le calcul de G par intégrale de domaine peut donc être effectué au moyen d'un champ $\underline{\theta}$ choisi arbitrairement (à l'intérieur des limitations ci-dessus).

En notation indicielle, l'expression ci-dessus devient :

$$G = - \int_D \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \xi_{i,j} \theta_{k,k} - \sigma_{ij} \theta_{i,k} \xi_{k,j} \right) d\Omega.$$

4.1. TAUX DE RESTITUTION DE L'ÉNERGIE : INTÉGRALES INVARIANTES

Démonstration. On considère un domaine de contrôle D_ϵ délimité par un contour fini C et un contour évanouissant C_ϵ (figure(4.7)), et un champ de vitesse de transformation $\underline{\theta}$ continu tel que

$$\begin{aligned} \underline{\theta} &= \underline{0} && \text{à l'extérieur de } C, \\ \underline{\theta} &= \underline{e}_x && \text{à l'intérieur de } C_\epsilon. \end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} G &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \underline{e}_x \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da && \text{(intégrale } J \text{ avec contour évanouissant } C_\epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \underline{\theta} \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, da \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{D_\epsilon} {}^T \underline{\nabla} \theta : \underline{E} \, d\Omega && \text{(formule de la divergence sur } D_\epsilon) \\ &= - \int_D {}^T \underline{\nabla} \theta : \underline{E} \, d\Omega && \text{(limite de l'intégrale impropre convergente)} \end{aligned}$$

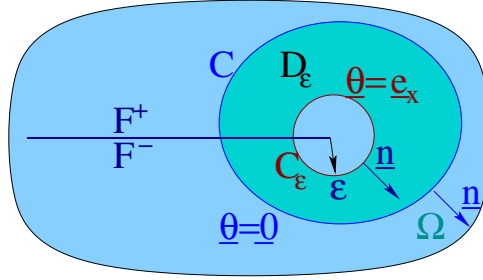


Fig. 4.7: Indépendance en $\underline{\theta}$ de la formulation par intégrale de domaine de G : domaine de contrôle.

4.1.7 Extraction de K_I et K_{II}

Les invariants (de domaine ou de contour) précédemment établis permettent le calcul pratique de G connaissant la solution $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$ de l'équilibre élastique pour la configuration fissurée $\Omega(\ell)$ courante. Le taux de restitution de l'énergie G combine les facteurs d'intensité des contraintes K_I et K_{II} . Il est parfois utile de pouvoir évaluer séparément K_I et K_{II} (selon par exemple la forme prise par le critère de propagation de fissure). La méthode ci-après, dite de l'*intégrale d'interaction*, permet d'extraire séparément K_I et K_{II} de la solution $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$ par un calcul *global* (intégrale de domaine). Celui-ci évite une analyse asymptotique locale de $\underline{\nabla} \xi$ ou $\underline{\sigma}$ au voisinage de la pointe de fissure, que la méthode de représentation approchée des champs (éléments finis) rendrait souvent imprécise, voire impossible.

Pour extraire K_I de la solution $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$, notons $\underline{\xi}_I$ la solution singulière connue (définie par (2.11)) telle que $K_I = 1$, $K_{II} = 0$. On écrit alors les valeurs de G prédites par (i) la formule d'Irwin (3.18) et (ii) par l'intégrale de domaine (4.9) pour les états $\underline{\xi} + \underline{\xi}_I$ et $\underline{\xi} - \underline{\xi}_I$:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu^2}{E} [(K_I + 1)^2 + K_{II}^2] &= - \int_D {}^T \underline{\nabla} \theta : \underline{E} (\underline{\xi} + \underline{\xi}_I) \, d\Omega \\ \frac{1 - \nu^2}{E} [(K_I - 1)^2 + K_{II}^2] &= - \int_D {}^T \underline{\nabla} \theta : \underline{E} (\underline{\xi} - \underline{\xi}_I) \, d\Omega \end{aligned}$$

Par soustraction membre à membre des relations ci-dessus, on obtient alors (compte tenu de la dépendance quadratique en $\underline{\xi}$ de \underline{E}) :

$$\frac{4(1-\nu^2)}{E}K_I = - \int_D \left(\frac{1}{2}(\underline{\sigma}(\underline{\xi}) : \underline{\nabla}\underline{\xi}_I) \operatorname{div} \underline{\theta} - \underline{\sigma}(\underline{\xi}) \cdot (\underline{\nabla}\underline{\xi}_I \cdot \underline{\nabla}\underline{\theta}) \right) d\Omega$$

L'intégrale apparaissant dans la formule ci-dessus, qui donne explicitement $K_I(\underline{\xi})$ en fonction de la solution $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$, est appelée *intégrale d'interaction*.

On procède de même, avec $\underline{\xi}_{II}$ la solution singulière connue (2.11) telle que $K_{II}(\underline{\xi}_I) = 0$, $K_{II}(\underline{\xi}_I) = 1$, pour extraire K_{II} . Cette approche est très bien adaptée au calcul de \bar{K}_I et K_{II} par éléments finis.

4.1.8 Exemple 2D de calcul numérique de G : plaque rectangulaire avec fissure droite

On considère la plaque rectangulaire (largeur $2H$, hauteur $2V$) représentée en figure 4.8 dans une situation de déformations planes, et contenant une fissure définie géométriquement par un segment situé sur la droite $x_2 = 0$, de longueur $2a$, en position centrée. La plaque est chargée en mode I, par une contrainte de traction simple σ normale à la fissure. La valeur exacte de K_I est connue pour une plaque de largeur finie $2H$ et de hauteur $V \rightarrow \infty$:

$$G^{\text{ref}} = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^{\text{ref}})^2 = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma^2 \pi a \operatorname{sech} \frac{\pi a}{2H} \quad (4.16)$$

L'évaluation de G pour la pointe droite B de la fissure est effectuée au moyen de la méthode $G - \theta$, sur un maillage composé d'éléments finis triangulaires à 3 nœuds (figure 4.9). La vitesse de transformation $\underline{\theta}_B$ est choisie telle que la seconde composante est nulle : $\underline{\theta}_B = \theta_h \underline{e}_1$, et est construit par interpolation de valeurs nodales (figure 4.9) :

- (a) égales à l'unité sur le disque $\|\underline{x} - \underline{x}_B\| < R_i$,
- (b) décroissant linéairement vers zéro dans la couronne $R_i < \|\underline{x} - \underline{x}_B\| < R_e$,
- (c) nulles sur le reste de la plaque

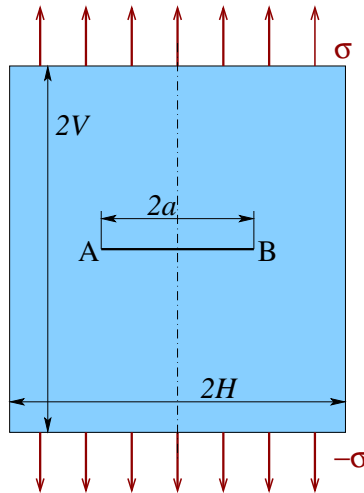


Fig. 4.8: Plaque carrée fissurée.

4.2. PROBLÈMES TRIDIMENSIONNELS

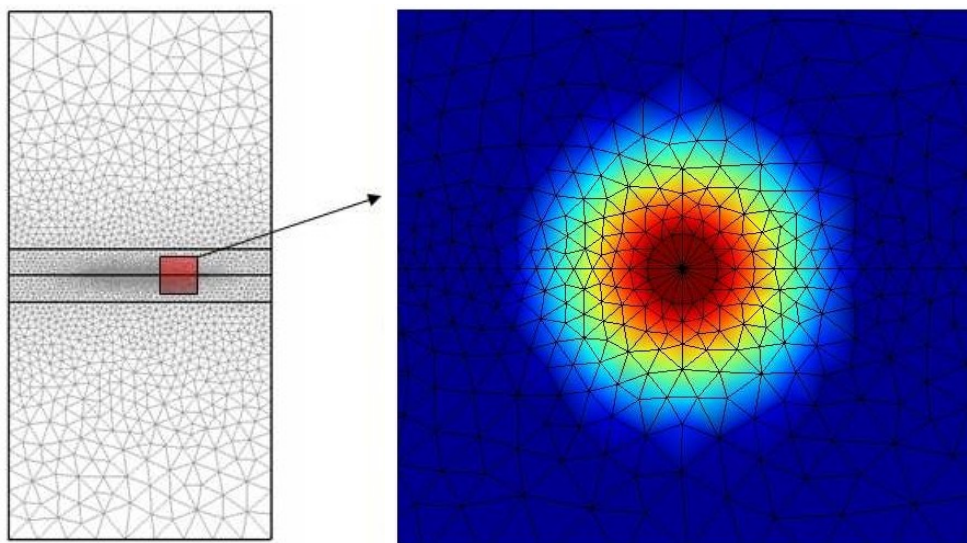


Fig. 4.9: Plaque carrée fissurée : maillage (gauche) et champ de vitesse de transformation θ (droite).

	Exact	$V_1 = 10a$	$V_2 = 15a$	$V_3 = 20a$
$K_I/(\sigma\sqrt{\pi a})$	1.8175	1.8535	1.8057	1.8062

Tableau 4.1: Plaque fissurée : valeur de K_I exacte, résultats numériques pour K_I obtenus par la méthode $G-\theta$ avec des éléments $T3$.

Les résultats obtenus sont présentés au tableau 4.1 en termes de K_I (évalué par application de la formule d'Irwin en mode I à G) pour $H = 5a$. Pour les plaques de hauteur $V_2 = 15a$ et $V_3 = 20a$, l'estimation de K_I obtenue est proche de la solution analytique (4.16).

4.1.9 Récapitulation des résultats de cette partie

- ▷ Expressions sous forme d'intégrales (domaine, contour) du taux de restitution de l'énergie
 - Indépendantes du choix de domaine de contrôle ou de contour ;
 - Expressions en termes de la solution actuelle $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$ uniquement (et non de ses dérivées par rapport à ℓ ;
 - Adaptées aux structures de géométrie complexe et au calcul numérique ;
 - À employer en association avec un critère de rupture.
- ▷ Formule d'Irwin : cas-limite de l'intégrale J pour un contour évanouissant ;
- ▷ Séparation des facteurs d'intensité des contraintes :
 - G combine les F.I.C.
 - Évaluation séparée de K_I, K_{II} par « intégrales d'interaction ».

4.2 Problèmes tridimensionnels

Cadre de travail et objectif de cette section. Par souci de simplification, les notions essentielles de mécanique de la rupture ont été jusqu'ici surtout discutées pour des géométries bidimensionnelles (modes I et II en déformations planes ou contraintes planes,

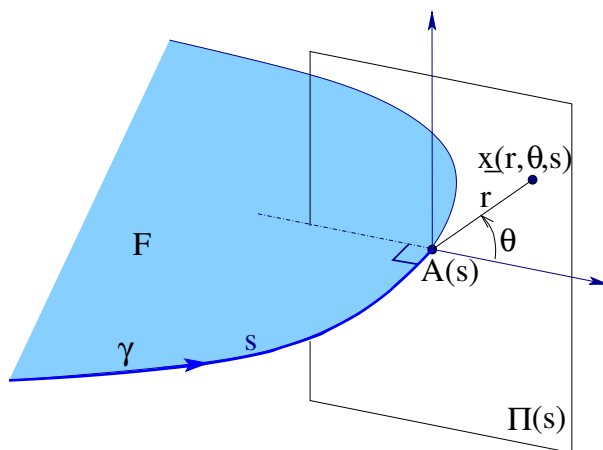


Fig. 4.10: Coordonnées curvilignes (r, θ, s) au voisinage d'un front de fissure.

mode III en déformation antiplane). Ces approximations sont souvent trop réductrices pour l'analyse à la fissuration de structures réelles. Dans cette section, on va présenter les principaux concepts (notamment celui de taux de restitution de l'énergie) dans un cadre tridimensionnel, ce qui mettra d'appréhender quelques aspects techniquement délicats introduits par cette généralisation nécessaire pour beaucoup d'applications.

Une fissure tridimensionnelle est modélisée comme une coupure de forme quelconque décrite par une surface \mathcal{F} à bord γ (lèvres \mathcal{F}^+ et \mathcal{F}^-). On reste sinon dans le cadre d'hypothèses habituel de la Mécanique linéaire de la rupture :

- ▷ Hypothèse des petites perturbations à chaque instant,
- ▷ Evolution quasi-statique : accélération négligée.
- ▷ Matériau élastique linéaire (homogène isotrope).
- ▷ Fissure libre de contrainte.

4.2.1 Singularités au voisinage du front de fissure

Considérons un point $A(s)$ du front de fissure γ , dont la position sur γ est définie par l'abscisse curviligne s . Introduisant un système mobile de coordonnées polaires (r, θ) dans le plan $\Pi(s)$ orthogonal à γ passant par $A(s)$ (figure 4.10), un point de l'espace situé dans un voisinage du front peut alors être repéré par ses coordonnées curvilignes (r, θ, s) . Pour le point $A(s)$, on peut alors *localement* définir les notions de modes I, II (ouverture et cisaillement plan dans $\Pi(s)$) et III (cisaillement antiplan dans la direction normale à $\Pi(s)$, c'est-à-dire tangente à γ en $A(s)$). La forme asymptotique du tenseur de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en un point de coordonnées (r, θ, s) proche du front est alors de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \frac{K_I(s)}{\sqrt{r}} \underline{\underline{f}}_{=I}(\theta) + \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{r}} \underline{\underline{f}}_{=II}(\theta) + \frac{K_{III}(s)}{\sqrt{r}} \underline{\underline{f}}_{=III}(\theta) + O(r^0) \quad (4.17)$$

où $\underline{\underline{f}}_{=I}(\theta)$, $\underline{\underline{f}}_{=II}(\theta)$ sont les fonctions tensorielles angulaires correspondant aux modes I et II en déformation plane (données par (2.10)) et $\underline{\underline{f}}_{=III}(\theta)$ est la fonction tensorielle angulaire correspondant au mode III (déformation antiplane, donnée par (2.13)).

Le résultat (4.17), admis, peut être interprété comme découlant du fait que les points $\underline{x}(r, \theta, s)$ proches du front (r petit devant le rayon de courbure de γ en $A(s)$) « voient »

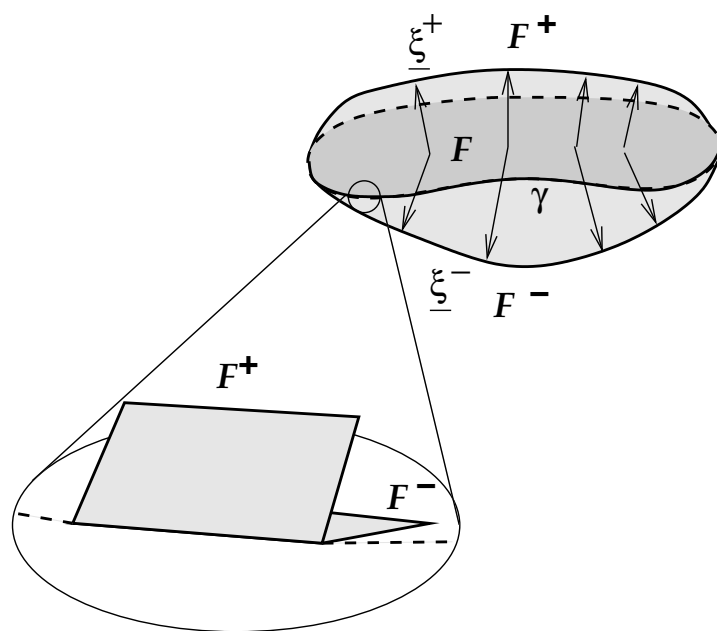


Fig. 4.11: Zoom local permettant de « redresser » le front de fissure.

le front γ comme (asymptotiquement) rectiligne (figure 4.11), voir le commentaire à ce sujet en section 2.3.3.

4.2.2 Energie dissipée dans une propagation de fissure

L'analyse de la puissance dissipée \mathcal{D} dans une propagation de fissure, faite au chapitre 3 dans un cadre bidimensionnel, conduit dans le cas tridimensionnel à écrire que \mathcal{D} est proportionnelle à l'accroissement d'aire (et non de longueur) de la fissure, soit

$$\mathcal{D} = \int_{\gamma} G(s) \dot{\ell}(s) ds, \quad (4.18)$$

où $\dot{\ell}(s)$ est la vitesse locale d'extension du front au point $A(s)$, évaluée selon la direction $\underline{\nu}(s)$ normale à γ et située dans le plan tangent à Γ en $A(s)$ (figure 4.12). Le taux de restitution de l'énergie est ainsi une grandeur *locale* sur le front de fissure : $G = G(s)$

Le cas d'une fissure tridimensionnelle particulière à front rectiligne redonne alors comme cas particulier l'expression bidimensionnelle

$$\mathcal{D} = G \dot{\ell} \quad (\text{par unité de longueur dans la direction parallèle au front rectiligne})$$

4.2.3 Critère énergétique de propagation de fissure

Critère de Griffith. Une généralisation directe du critère « de Griffith » (chapitre 3), reposant sur la notion d'énergie de rupture G_c caractéristique du matériau, s'écrit :

$$\text{en tout point } A(s) \text{ de } \gamma : \begin{cases} \text{si } G(s) < G_c & \text{alors } \dot{\ell}(s) = 0, \\ \text{si } G(s) = G_c & \text{alors } \dot{\ell}(s) \geq 0. \end{cases}$$

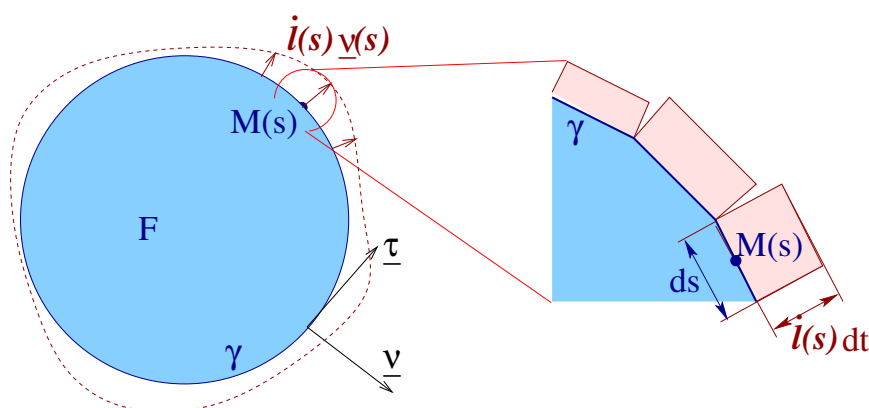


Fig. 4.12: Propagation de fissure en conditions 3D ; vitesse normale d'extension $\dot{l}(s)$.

Ce critère est *local* sur le front (figure 4.13) : la valeur critique G_c n'est pas nécessairement atteinte simultanément partout sur γ . Sous cette forme, le critère suppose que la fissure se propage *dans son plan* : il est donc applicable surtout au *mode I pur*.

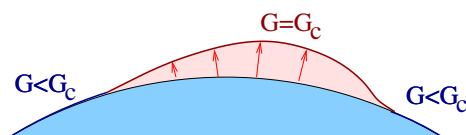


Fig. 4.13: Caractère local du critère « de Griffith » dans le cas tridimensionnel.

Limitations et extensions. La propagation plane en mode I pur est en fait une situation rare. Généralement, la propagation de fissure se fait en mode mixte (combinaison des modes I, II et III). Une fissure peut être initialement plane mais ne le reste généralement pas, l'orientation (variable dans le temps) du chargement induisant des branchements, des courbures et des déversements (figure 4.14). Cela conduit à formuler des critères permettant de prédire des évolutions non planes de fissures, combinant une loi à seuil (par exemple $G(s) \leq G_c$) et un critère complémentaire permettant la prédiction des branchements et courbures (par exemple imposer $K_{II}(s) = 0$, approche connue sous le nom de *principe de symétrie locale* [14]).

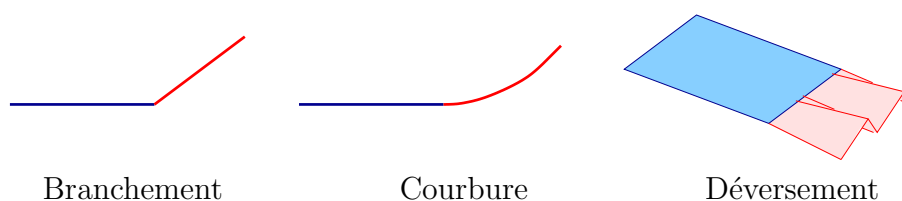


Fig. 4.14: Possibilités de trajets hors plan de propagation de fissure.

Déversement : exemple de simulation en modes I+III. A titre d'illustration des remarques ci-dessus, la figure 4.15 reproduit une simulation publiée¹ de propagation de

¹Xu G., Bower A.F., Ortiz, M., An analysis of non-planar crack growth under mixed mode loading, *Internal Journal of Solids and Structures*, **31** :2167-2193 (1994).

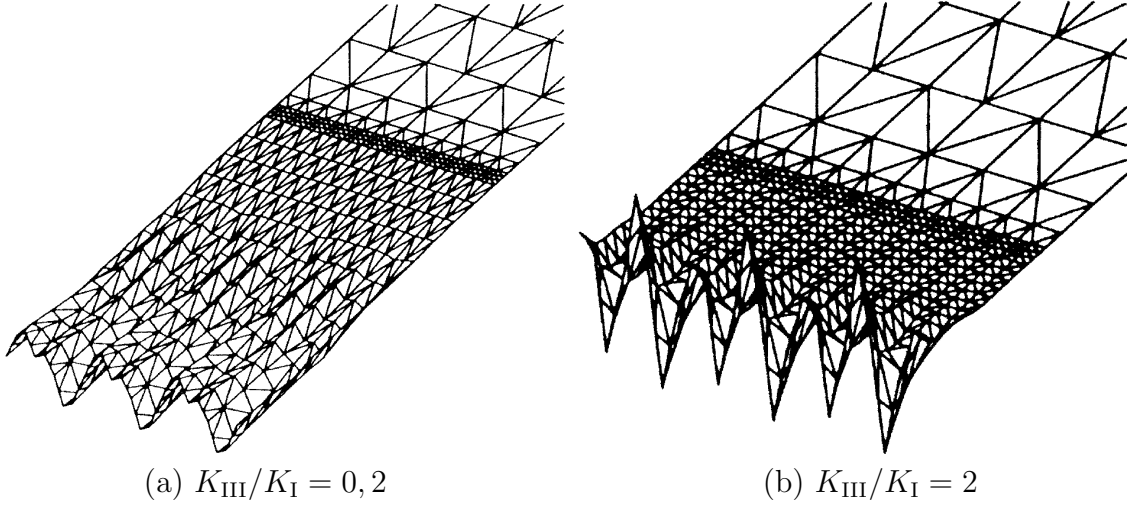


Fig. 4.15: Simulation de propagation de fissure en conditions non planes (d'après Xu, Bower et Ortiz, 1994).

fissure en conditions non planes (en mode I+III, sous les critères de propagation : $G \leq G_c$ et $K_{II} = 0$). Le chargement à l'infini est orienté de telle sorte que $K_{III}/K_I = 0,2$ pour la variante (a), et $K_{III}/K_I = 2$ pour la variante (b). La simulation numérique repose sur la méthode des éléments de frontière.

4.2.4 Calcul de G par dérivation particulière de l'énergie potentielle : la méthode $G - \theta$

Une analyse similaire à celle faite pour les problèmes plans (chapitre 3) permet de montrer que l'on a encore

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}_e - \dot{W} = (\mathcal{P}_e - \dot{W})|_{c=\text{cste}} = - \frac{dP}{dt} \Big|_{c=\text{cste}} \quad (4.19)$$

Le calcul de dP/dt peut encore être effectué, suivant les principes développés en section 4.1, par dérivation particulière exploitant un prolongement $\underline{\theta}$ continu hors de \mathcal{F} de la vitesse d'avancée de fissure. Pour ce faire, un voisinage tubulaire $D \subseteq \Omega$ du front de fissure est introduit (figure 4.16) et on considère une vitesse de transformation $\underline{\theta}$ assujettie à vérifier²

$$\underline{\theta}(\underline{x}) = \dot{\ell}(s)\underline{\nu}(s) \quad (\underline{x} \in \gamma), \quad \underline{\theta}(\underline{x}) = \underline{0} \quad (\underline{x} \in \partial D)$$

Le résultat obtenu est essentiellement identique à celui (4.6) pour le cas plan (la démonstration, non donnée ici, étant également similaire et pouvant être traitée comme exercice) :

$$\frac{dP}{dt} \Big|_{c=\text{cste}} = \int_D {}^T \underline{\nabla} \theta : \underline{E} \, d\Omega, \quad \underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}) \underline{i} - {}^T \underline{\nabla} \xi \cdot \underline{\sigma} \quad (\text{tenseur d'Eshelby}) \quad (4.20)$$

²On ne peut pas ici, contrairement au cas bidimensionnel, introduire une vitesse de transformation $\underline{\theta}$ normalisée de valeur unitaire sur le front car la vitesse d'extension $\dot{\ell}(s)$ est *a priori* variable le long du front.

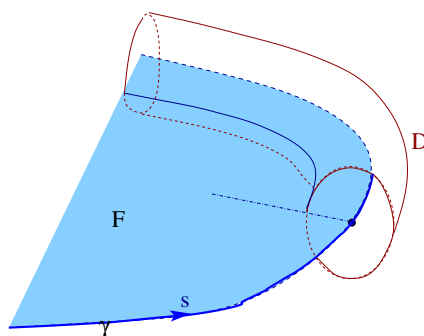


Fig. 4.16: Voisinage tubulaire D du front de fissure.

La méthode $G - \theta$. Compte tenu de (4.18), (4.19) et (4.20), le taux de restitution local $G(s)$ vérifie, pour toute distribution de vitesse d'avancée de fissure $\dot{\ell}(s)\underline{\nu}(s)$ et tout prolongement continu $\underline{\theta}$ nul en-dehors d'un ouvert $D \subseteq \Omega$ contenant γ :

$$\int_{\gamma} G(s)\dot{\ell}(s) ds = - \int_D {}^T \underline{\nabla} \theta : \underline{E} d\Omega \quad (4.21)$$

Cette relation constitue la base de la *méthode $G - \theta$* de calcul numérique de $G(s)$, dont les principales étapes consistent en :

- Poser une approximation de $G(s)$ sous la forme

$$G(s) = \sum_{k=1}^n G_k \varphi_k(\underline{x}(s)), \quad \underline{x}(s) \in \gamma$$

- Ecrire la relation (4.21) tour à tour pour chaque choix $\underline{\theta}(\underline{x}) = \varphi_k(\underline{x})\underline{\nu}(s)$. Cela conduit à un système linéaire d'inconnue $\{G\} = \{G_1, \dots, G_n\}$:

$$[A]\{G\} = \{b\} \quad A_{ik} = \int_{\gamma} \varphi_i(\underline{x}(s))\varphi_k(\underline{x}(s)) ds, \quad b_i = - \int_D {}^T \underline{\nabla}(\varphi_i \underline{\nu}) : \underline{E} d\Omega$$

La méthode $G - \theta$ est très bien adaptée à une mise en œuvre dans le cadre des éléments finis [6]. Elle est intégrée dans des codes tels que *Cast3M* (CEA), *Code_Aster* (EDF), *ZeBuLoN* (Ecole des Mines / ONERA).

La notion d'intégrale d'interaction, présentée en section 4.1.7 pour les configurations bidimensionnelles, peut être étendue aux situations tridimensionnelles, rendant possible l'extraction de $K_I(s), K_{II}(s), K_{III}(s)$. Les intégrales d'interaction sont alors obtenues à partir de la relation (4.21) écrite pour des champs de déplacement bien choisis.

Exemple numérique 3D : fissure semi-elliptique débouchante. Pour illustrer l'intérêt de la méthode $G - \theta$ dans un cas 3D, la figure 4.17 reproduit un résultat publié³ de calcul numérique de la fonction $G(s)$ le long du front d'une fissure semi-elliptique débouchante, une configuration ayant fait l'objet de nombreuses études et pour laquelle d'autres solutions approchées ont été publiées antérieurement (telle celle de Raju et Newman utilisée pour la comparaison reproduite en figure 4.17). Le calcul numérique repose sur la méthode des éléments finis.

³Rajaram H., Socrate S., Parks D., Application of domain integral methods using tetrahedral elements to the determination of stress intensity factors, *Engineering Fracture Mechanics*, **66** :455-482 (455-482).

4.2. PROBLÈMES TRIDIMENSIONNELS

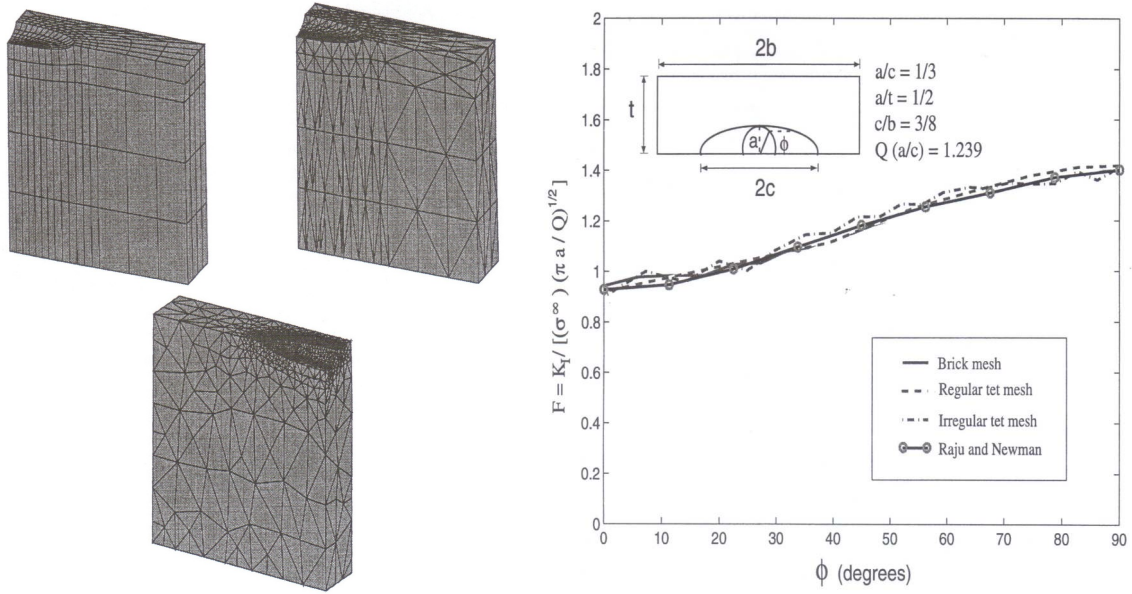


Fig. 4.17: Fissure semi-elliptique débouchante : fonction $K_I(\phi)$ calculée par éléments finis et méthode $G-\theta$, et comparaison avec la solution approchée de Raju et Newman (d'après Rajaram, Socrate et Parks, 2000).

4.2.5 Formule d'Irwin en 3D.

Il est naturel de s'interroger à ce stade sur l'existence d'invariants de contour, ainsi que sur la validité de la formule d'Irwin, pour les configurations tridimensionnelles étudiées ici. L'analyse qui suit permet de donner une réponse à ces questions. Considérons deux voisinages tubulaires D_1, D_2 du front γ , qui soient emboîtés ($D_1 \subset D_2$, voir figure 4.18), et choisissons un champ de vitesse de transformation $\underline{\theta}$ tel que, dans le plan normal à γ passant par $A(s) \in \gamma$:

$$\begin{aligned} \underline{\theta} &= \underline{0} && \text{hors de } D_2, \\ \underline{\theta} &= \dot{\ell}(s)\underline{\nu}(s) && \text{dans } D_1. \end{aligned}$$

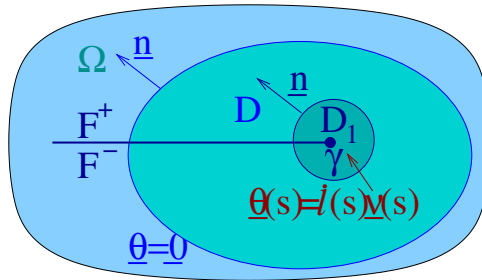


Fig. 4.18: Voisinages tubulaires emboîtés du front de fissure.

En s'appuyant sur le résultat (4.20), on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \int_{D_1} \text{T} \underline{\nabla} \theta : \underline{E} \, d\Omega + \int_{D_2 - D_1} \text{T} \underline{\nabla} \theta : \underline{E} \, d\Omega \\ &= \int_{D_1} \text{T} \underline{\nabla} \theta : \underline{E} \, d\Omega - \int_{\partial D_1} \underline{\theta} \cdot \underline{E} \cdot \underline{n} \, d\Omega \quad (\text{car } \text{div } \underline{E} = \underline{0} \text{ dans } D_2 \setminus D_1) \end{aligned}$$

Contrairement au cas bidimensionnel, l'intégrale sur D_1 dans l'expression ci-dessus ne s'annule en général pas, car $\underline{\nabla}\theta \neq \underline{0}$ (même pour une vitesse normale d'extension $\dot{\ell}$ indépendante de s) en raison de la courbure du front γ . Par conséquent, la dérivée particulière de P ne peut pas être exprimée sous forme d'une intégrale de contour (le « contour » étant ici la frontière ∂D d'un voisinage tubulaire D du front).

Le caractère invariant est ici une « invariance par rapport au voisinage tubulaire du front » : pour tout voisinage de ce type, on a

$$\mathcal{D} = -\frac{dP}{dt}\Big|_{c=\text{cste}} = \int_{\gamma} G(s)\dot{\ell}(s) ds = -\int_D {}^T\underline{\nabla}\theta:\underline{E} d\Omega + \int_{\partial D} \theta.\underline{E}.n d\Omega \quad (4.22)$$

Enfin, pour un voisinage tubulaire D_ϵ évanouissant, de petit rayon ϵ , de γ , la formule (4.22) redonne (par injection des relations (4.17) et passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0$) la formule d'Irwin :

$$G(s) = \frac{1-\nu^2}{E}(K_I^2(s) + K_{II}^2(s)) + \frac{1}{2\mu}K_{III}^2(s) \quad (4.23)$$

4.2.6 Conclusions de cette partie

Les principaux points mis en évidence dans cette section 4.2 sont :

- ▷ Le fait que les singularités de contraintes sont analogues (dans un repère mobile ajusté à la géométrie locale de fissure) à celles associées aux déformations planes et antiplanes ;
- ▷ Le caractère local (sur le front de fissure) du taux de restitution de l'énergie $G(s)$, des facteurs d'intensité des contraintes $K_{I,II,III}(s)$, et du critère de propagation ;
- ▷ Le principe de la méthode $G - \theta$, qui permet le calcul (généralement numérique) de $G(s)$ dans des conditions très générales de géométrie et de chargement et est implantée dans des codes éléments finis industriels ;
- ▷ L'absence d'expression de $G(s)$ sous forme d'intégrale de contour (contrairement au cas bidimensionnel) ;
- ▷ Les complexités de la propagation de fissure et de son analyse dans les cas tridimensionnels ;

4.3 Fissuration par fatigue

4.3.1 Matériaux et structures : dommages créés par chargements répétés

Jusqu'ici, la fissuration a été envisagée sous sa forme *critique*, c'est-à-dire gouvernée par une loi à seuil conditionnant toute évolution de fissure à l'atteinte d'une valeur critique (typiquement $G = G_c$ ou $K_I = K_{Ic}$). Cependant, on observe souvent que la rupture est également susceptible de se produire sous l'effet de la répétition (cycles) de chargements *sous-critiques* (c'est-à-dire restant en-dessous d'un seuil critique $G = G_c$ ou $K_I = K_{Ic}$ du matériau). On parle alors de rupture par *fatigue*, et on peut *grosso modo* distinguer deux grands types de fatigue :

- ▷ La fatigue à faible nombre n de cycles, dite *fatigue oligocyclique*, qui correspond habituellement à une plastification importante du matériau dans la région de la fissure ;
- ▷ La fatigue à grand nombre n de cycles ($n = O(10^5) - O(10^6)$), dite *fatigue polycyclique*, qui correspond habituellement à une plastification faible. Elle s'effectue en deux phases : (i) amorçage, puis (ii) propagation. La proportion des deux phases

4.3. FISSURATION PAR FATIGUE

dans la durée de vie totale de la structure varie selon le matériau constitutif, le chargement, la température, l'environnement (corrosion),...

Exemple : fissuration par fatigue d'un rail. La figure 4.19 montre la fissuration par fatigue d'un rail. L'amorçage se produit sur un défaut se trouvant être localisé dans une zone subissant un maximum de contrainte. La propagation par fatigue se fait ensuite sous l'effet de chargements répétitifs correspondant à chaque passage de roue.

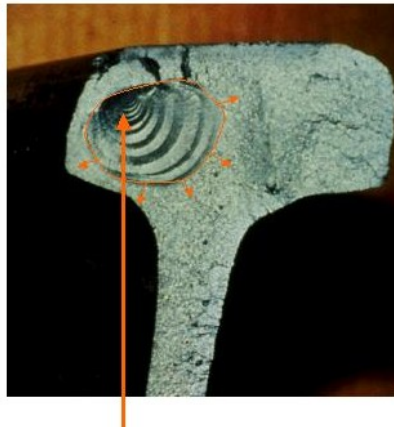


Fig. 4.19: Fissuration par fatigue d'un rail.

Exemple : Boeing 737 Aloha Airlines. La compagnie américaine Aloha Airlines assure la desserte aérienne locale entre les îles de l'archipel de Hawaï. Il s'agit de vols assez courts (typiquement 35 minutes) mais pour des flux de passagers élevés, d'où l'utilisation de gros appareils (Boeing 737) conçus pour des vols plus longs (plusieurs heures). La maintenance des appareils est déterminée en fonction du nombre d'heures de vol effectuées, tandis qu'un cycle de chargement correspond à une mission (pressurisation/dépressurisation, décollage/atterrissage). Pour le cas de Aloha Airlines, les appareils effectuent un nombre de missions environ 10 fois plus grand que celui correspondant aux conditions habituelles d'emploi, et subissent donc un nombre de cycles de chargement 10 fois plus grand que

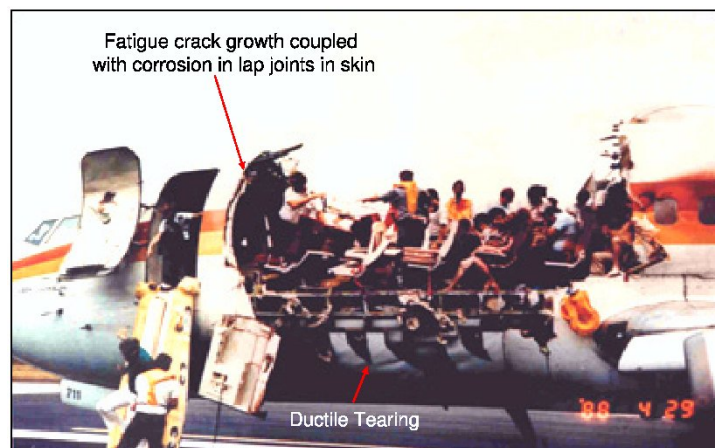


Fig. 4.20: Boeing 737 de Aloha Airlines après rupture par fatigue de la partie supérieure de sa carlingue.

celui normalement attendu entre deux maintenances. Ces dernières ne permettent ainsi pas à coup sûr de détecter à temps une rupture par fatigue. Un vol de Aloha Airlines a ainsi vu l'appareil perdre *en vol* la partie supérieure de sa carlingue (figure 4.20) suite à une rupture par fatigue (il y a eu une seule victime, et l'appareil a pu atterrir).

4.3.2 Modélisation de la fatigue

Pour cet aperçu rapide, on se place dans un cadre d'hypothèses simple :

- Chargement à un paramètre $Q(t)$;
- Elasticité linéaire H.P.P. (donc champs singuliers en pointe de fissure) ;
- Problèmes plans, propagation droite de fissure décrite par $\ell(t)$;
- Un seul mode de rupture (typiquement mode I d'ouverture) ;

Le facteur d'intensité de contraintes, dépendant linéairement du chargement (chapitre 2), est donc supposé de la forme

$$K_I(t) = Q(t)K(\ell(t)),$$

$K(\ell)$ désignant le facteur d'intensité de contraintes pour un chargement unitaire $Q = 1$ et une fissure de longueur ℓ .

Croissance de fissures par fatigue dans les métaux : faits expérimentaux. Des expériences de rupture par fatigue d'éprouvettes métalliques mettent en évidence une corrélation forte entre dl/dn (vitesse d'avancement de la fissure, le nombre n de cycles jouant le rôle de variable temporelle) et $\Delta Q = Q^{\max} - Q^{\min}$ (amplitude du chargement appliqué pour chaque cycle), comme sur l'exemple de la figure 4.21. La variable Q de chargement étant proportionnelle à K_I , l'amplitude du chargement appliqué peut ainsi être caractérisée, à ℓ fixé, par $\Delta K_I = K_I^{\max} - K_I^{\min}$. La relation typiquement observée entre dl/dn et ΔK_I pour un métal suggère de modéliser la fissuration par fatigue selon trois phases successives : (i) phase d'amorçage, (ii) phase de propagation par fatigue, durant laquelle la relation entre dl/dn et ΔK_I est à peu près linéaire, et (iii) phase de propagation brutale, une valeur critique telle que K_{Ic} ayant été atteinte.

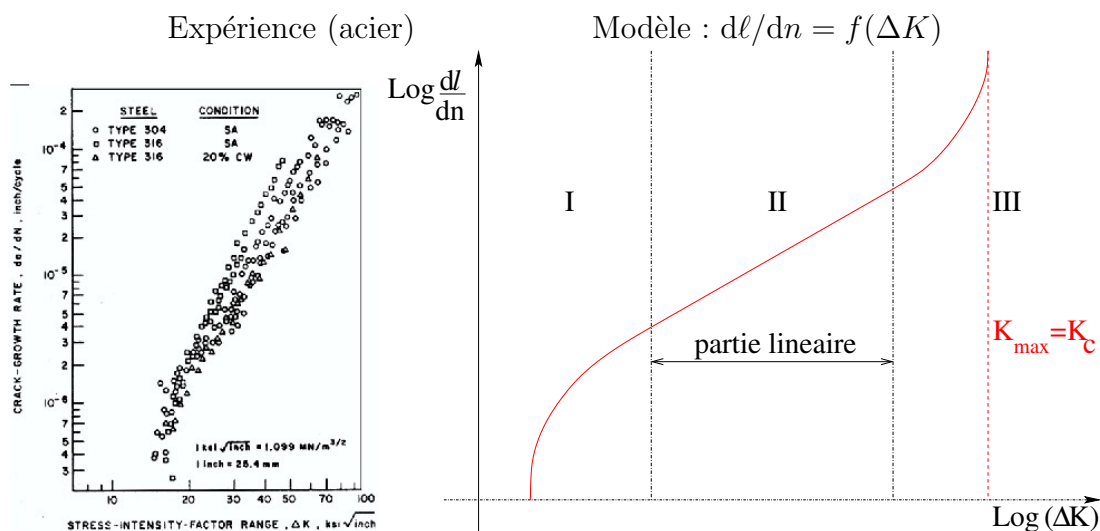


Fig. 4.21: Corrélation entre dl/dn et ΔK_I pour un métal : (a) observation et (b) modélisation (source : cours université Cornell, USA).

4.3. FISSURATION PAR FATIGUE

Lois de fatigue. Les lois de fatigue sont des lois d'évolution reliant la vitesse d'avancement de fissure (généralement exprimée en termes du nombre de cycles n jouant le rôle d'un « temps » discret) au nombre de cycles n d'un chargement identique appliqué de façon répétitive. La première loi de ce type (Paris et Erdogan, 1963) et connue sous le nom de « loi de Paris », s'écrit :

$$\frac{d\ell}{dn} = C[\Delta K(\ell)]^m,$$

où n est le nombre de cycles, $\ell = \ell(n)$ est la longueur de fissure, et C, m sont des paramètres dépendant du matériau (et de facteurs externes) à déterminer expérimentalement.

De nombreuses autres lois de fatigue ont été proposées; une forme typique en est

$$\frac{d\ell}{dn} = f\left(\Delta K(\ell), \frac{K_{\max}(\ell)}{K_{\min}(\ell)}, K_{Ic}, \dots\right)$$

Une fois la loi de fatigue connue (et validée expérimentalement), on est à même d'évaluer la *durée de vie* de structures. Cette opération repose, en sus de la loi de fatigue, sur la connaissance du chargement cyclique (amplitude ΔQ , rapport de charge Q_{\max}/Q_{\min}) et la capacité de calculer $\Delta K(\ell)$ pour toute longueur ℓ donnée (par exemple au moyen des méthodes présentées en section 4.1).

4.3.3 Exemples de simulation de fissuration par fatigue

Fissuration d'une poutre en flexion cyclique. Cet exemple, extrait d'un cours de l'université Cornell (USA)⁴, présente la simulation d'une expérience de propagation par

⁴Engineering Fracture Mechanics (graduate course), T. Ingraffea, Université Cornell (USA), <http://www.cfg.cornell.edu/education/education.htm>

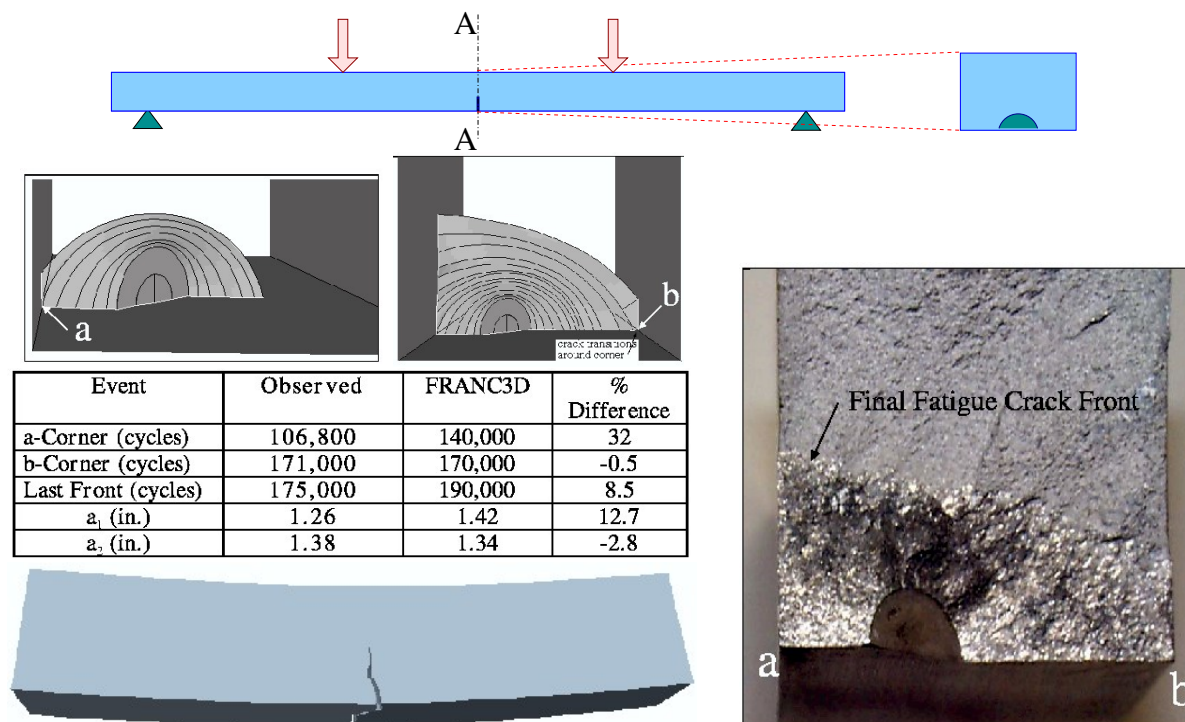


Fig. 4.22: Simulation d'une expérience de fissuration d'une poutre sous flexion cyclique (source : cours université Cornell, USA).

fatigue d'une fissure dans une poutre de section rectangulaire pré-fissurée (fissure initiale semi-elliptique) soumise à un chargement cyclique en flexion 4 points (figure 4.22). La simulation, réalisée en conditions 3D par une méthode d'éléments de frontière, présente un bon accord (en termes de nombre de cycles et de taille de fissure) avec l'expérience.

Fissuration par fatigue de disques de turbine. Cet exemple, qui permet d'illustrer simultanément l'analyse à la fatigue et l'approche énergétique de type $G - \theta$, provient d'un projet de recherche coordonné (PRC) associant SNECMA Moteurs, l'ONERA, l'Ecole Centrale de Nantes, l'ENS Cachan et l'Ecole Polytechnique (Laboratoire de Mécanique des Solides). On s'intéresse à l'analyse du risque d'éclatement de disques de turbine de moteurs à réaction en rotation rapide. La figure 4.24 montre des résultats de simulation (réalisées par V. Chiaruttini et F. Feyel, ONERA, au moyen du code *ZeBuLon*) portant sur la propagation en fatigue (loi de Paris locale de la forme $dl(s)/dn = f(\Delta G(s))$) d'une fissure plane (quart de cercle de rayon 2mm) sur une portion (1/16ème) de disque de turbine HP, sous chargement lié à une rotation à vitesse constante de 15 000 tr/min. L'évolution prédite du rayon moyen de la fissure en fonction de nombre de missions varie un peu selon les détails de la stratégie de calcul (nombre de missions par incrément, traitement explicite ou implicite des équations d'évolution). Pour chaque position de fissure traitée par l'algorithme, la distribution $G(s)$ est calculée par une approche énergétique de type $G - \theta$.

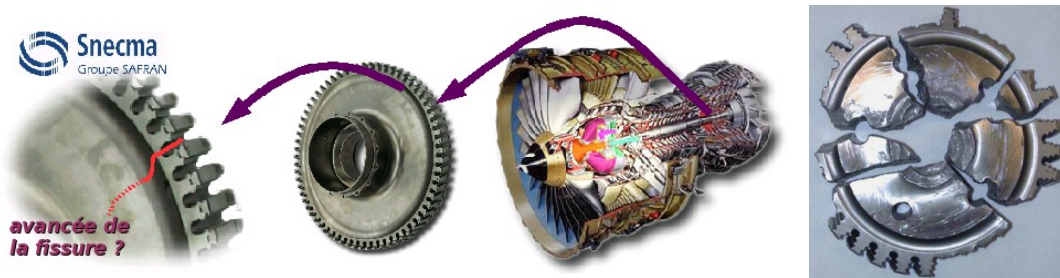


Fig. 4.23: Disques de turbine (SNECMA Moteurs); exemple de disque après éclatement.

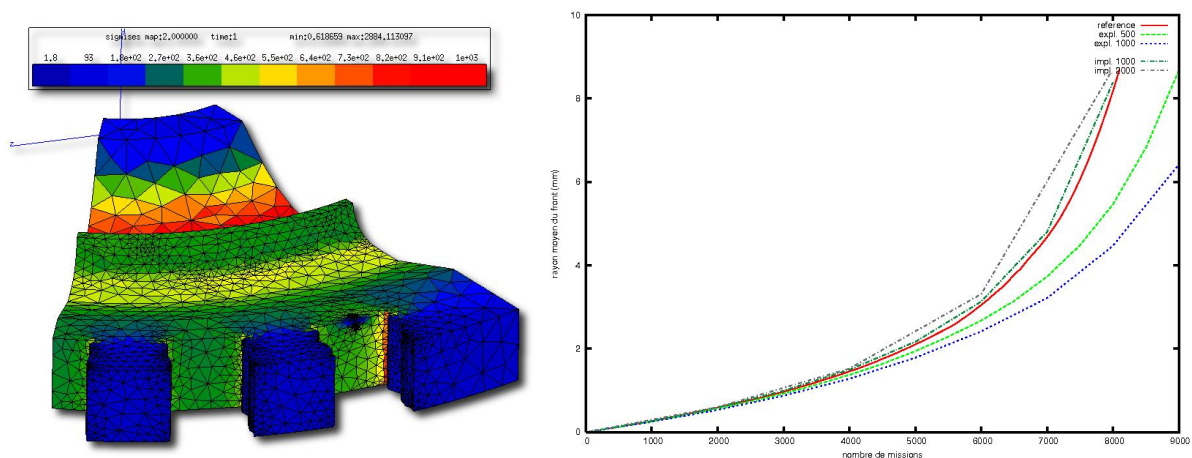


Fig. 4.24: Modèle de disques de turbine (SNECMA Moteurs); prédiction de l'évolution de taille de fissure en fonction du nombre de missions selon diverses stratégies de calcul.

Formules et résultats essentiels

• Expressions du taux de restitution de l'énergie en 2D

▷ Tenseur d'Eshelby :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{i}} - {}^T \underline{\underline{\nabla}} \xi \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

▷ Expression de G sous forme intégrale de domaine :

$$G\dot{\ell} = - \int_{\Omega(t)} {}^T \underline{\underline{\nabla}} \theta : \underline{\underline{E}} \, d\Omega = - \int_{\Omega(t)} \left(\frac{1}{2}(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) \operatorname{div} \underline{\underline{\theta}} - \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{\nabla}} \xi \cdot \underline{\underline{\nabla}} \theta) \right) \, d\Omega$$

où $\underline{\underline{\theta}}(\underline{\underline{x}})$ est un prolongement continu *arbitraire* de la vitesse d'avancée de fissure $\dot{\ell} \underline{\underline{e}}_x$

▷ Calcul numérique de G par la *méthode* $G - \theta$

▷ Expression de G sous forme d'invariant intégral de contour (intégrale J de Rice-Eshelby) :

$$G = J \quad \text{avec} \quad J = \int_C \underline{\underline{e}}_x \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{n}} \, da = \int_C \left(\frac{1}{2}(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}) n_x - \xi_{,x} \cdot \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{n}}) \right) \, da$$

où C est un contour *arbitraire* joignant F^+ à F^- tel que la pointe est intérieure au domaine délimité par D et F ($\underline{\underline{n}}$: normale extérieure à C).

▷ Extraction des modes individuels de rupture par *intégrale d'interaction*

• Rupture fragile en conditions 3D

▷ Energie dissipée dans une propagation de fissure

$$\mathcal{D} = \int_{\gamma} G(s) \dot{\ell}(s) \, ds$$

▷ Critère énergétique de propagation de fissure

$$\text{en tout point } A(s) \text{ de } \gamma : \quad \begin{array}{ll} \text{si } G(s) < G_c & \text{alors } \dot{\ell}(s) = 0, \\ \text{si } G(s) = G_c & \text{alors } \dot{\ell}(s) \geq 0. \end{array}$$

▷ Calcul de $G(s)$ par méthode $G - \theta$:

$$\int_{\gamma(t)} G(s) \dot{\ell}(s) \, ds = - \int_{\Omega(t)} {}^T \underline{\underline{\nabla}} \theta : \underline{\underline{E}} \, d\Omega$$

• Fatigue

▷ Forme typique d'une loi de fatigue ($\ell(n)$: longueur de fissure fonction du nombre n de cycles de chargement) :

$$\frac{d\ell}{dn} = f\left(\Delta K(\ell), \frac{K_{\max}(\ell)}{K_{\min}(\ell)}, K_{Ic}, \dots\right)$$

CHAPITRE 4. ANALYSE ÉNERGÉTIQUE DE LA PROPAGATION D'UNE FISSURE II.
FISSURATION PAR FATIGUE

Chapitre 5

Loi de comportement élasto-plastique

Introduction et cadre de travail...

Le mot « plasticité » dérive du grec $\pi\lambda\alpha\sigma\sigma\epsilon\upsilon\nu$ qui signifie « mettre en forme ». Les matériaux qui sont « plastiques » au sens du mécanicien¹ se caractérisent par leur bonne *ductilité*, c'est à dire une aptitude à se déformer beaucoup avant rupture, propriété qui permet leur *mise en forme par déformation*. Si l'on excepte les pièces obtenues par fonderie ou par métallurgie des poudres, la plupart des pièces métalliques sont en effet mises en forme par déformation : laminage pour obtenir une tôle, emboutissage pour passer d'une tôle plane à une forme plus complexe (une aile de voiture par exemple), extrusion, usinage etc.... Cette mise en forme est synonyme de déformations résiduelles permanentes. Ces déformations permanentes sont recherchées dans certains cas (il est préférable qu'après emboutissage une aile de voiture garde sa forme déformée plutôt que de revenir à sa forme initiale!), ou évitées dans d'autres cas (il est préférable qu'une fois construites, les structures en service restent dans le domaine élastique).

Le présent chapitre est consacré à l'étude de ces déformations permanentes ou plastiques sous deux aspects. *Quand* apparaissent ces déformations ? C'est le rôle des critères de plasticité de le préciser. *Comment* apparaissent-elles ? La réponse à cette dernière question est l'objet *des lois d'écoulement plastique*, qui sont, dans la plupart des métaux, dérivées de la *règle de normalité*.

Les résultats expérimentaux décrits dans ce chapitre ont été obtenus dans les conditions suivantes :

- ▷ *Les déformations sont petites. Les modèles qui s'attachent à décrire ces résultats expérimentaux seront donc valides dans le domaine des petites déformations.*
- ▷ *Les transformations sont lentes. Les modèles de comportement développés sont donc valides dans le cas de chargements quasi-statiques et sans effet de la température.*

¹ils peuvent être assez différents des « matières plastiques » du langage courant : un métal est plastique au sens du mécanicien car il peut être mis en forme.

5.1 Surface seuil

Les états de contrainte que l'on rencontre dans les structures sont le plus souvent *multiaxiaux*, ce qui signifie que les trois contraintes principales sont non nulles. Il faut donc adapter les notions dégagées à partir des essais uniaxiaux à ces états multiaxiaux.

5.1.1 Surface seuil initiale

5.1.1.1 Aspects expérimentaux

La première de ces notions utiles est celle de *limite d'élasticité* ou de *seuil de plasticité* (selon que l'on se place du point de vue du régime de l'élasticité qui finit ou de celui de la plasticité qui commence). Dans l'espace des contraintes (espace de dimension 6) le seuil de plasticité se traduit par une *surface*. L'intérieur du domaine délimité par cette surface correspond au régime élastique et on l'appelle *domaine d'élasticité du matériau*, la surface elle-même correspond à l'apparition de la plasticité et on l'appelle *surface seuil de plasticité*. L'ensemble domaine d'élasticité + seuil de plasticité est le *domaine de plasticité* du matériau.

Nous nous intéressons dans cette section à la surface *initiale* de plasticité sur laquelle se produit la première plastification lorsqu'on charge le matériau à partir de l'état sans contrainte $\underline{\sigma} = \underline{0}$. Pour déterminer la forme de cette surface il faut effectuer des essais *multiaxiaux*, au cours desquels plusieurs composantes du tenseur des contraintes sont pilotées.

Les essais multiaxiaux les plus courants sont des essais biaxiaux (deux contraintes principales non nulles) effectués sur éprouvettes minces. L'essai de **traction-torsion**

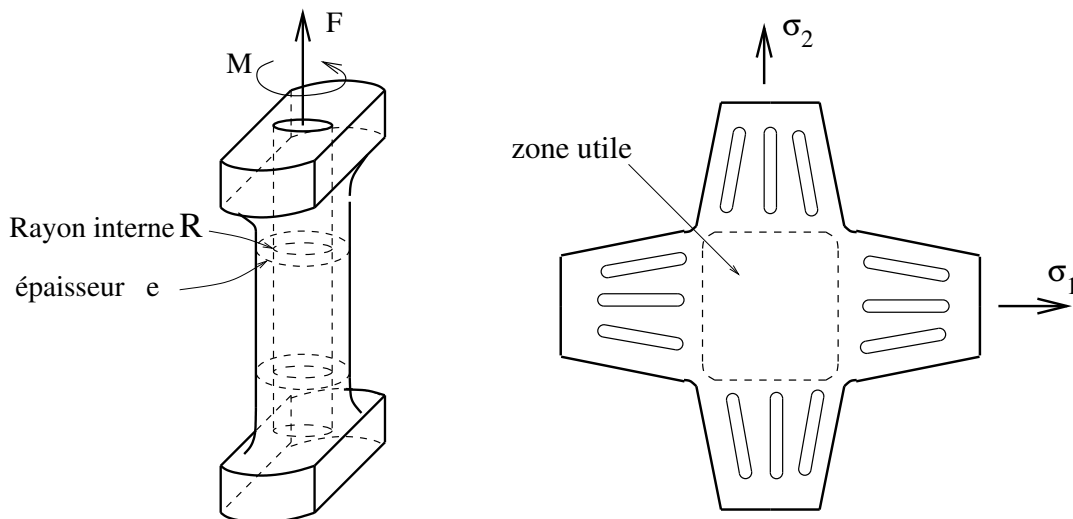


Fig. 5.1: Essais biaxiaux. A gauche : traction-torsion. A droite : traction biaxiale.

effectué sur un tube mince (figure 5.1a) permet d'imposer dans la zone utile de l'éprouvette un état de contrainte de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \tau (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \sigma = \frac{F}{2\pi R e}, \quad \tau = \frac{M}{2\pi R^2 e}. \quad (5.1)$$

5.1. SURFACE SEUIL

L'état de contrainte que l'on peut imposer lors d'un essai de **traction biaxiale** sur éprouvette plane et mince (figure 5.1b) est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2. \quad (5.2)$$

Les essais sur éprouvettes minces sont limitées par le phénomène de *flambement* (instabilité en compression) qui impose de travailler avec de faibles contraintes de compression.

Il existe peu d'essais réellement triaxiaux où les trois contraintes principales sont pilotées indépendamment². L'essai qui s'en approche le plus en mécanique des sols (où il est appelé « essai triaxial ») est un essai de compression sous pression latérale de confinement qui permet d'imposer un état de contrainte de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \frac{F}{S} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z. \quad (5.3)$$

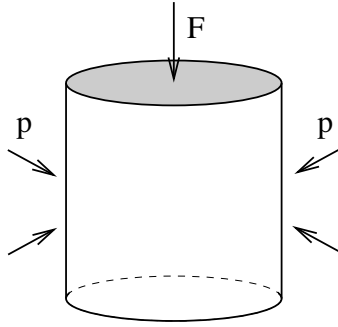


Fig. 5.2: Essai dit « triaxial ».

Détermination expérimentale de la surface seuil. Quel que soit l'essai, le principe de la détermination de la surface seuil est schématisé sur la figure 5.3. On effectue des trajets de chargement *radiaux* dans l'espace des contraintes, c'est à dire suivant une direction fixe $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$ mais avec un module $\Sigma(t)$ variable :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \Sigma(t) \hat{\underline{\underline{\sigma}}}.$$

On mesure la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ dont on déduit la déformation le long de la direction $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$ définie par $E(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(t) : \hat{\underline{\underline{\sigma}}}$. Le début de la courbe $(\Sigma(t), E(t))$ est linéaire (pour la plupart des métaux), puis non linéaire. Il est difficile de décider pour quelle valeur précise de la contrainte apparaît la non linéarité (la courbe et sa tangente étant quasiment confondues) et on procède en traçant la pente d'élasticité initiale et une droite de même pente mais décalée vers la droite de la valeur d'un *offset*. L'intersection de cette deuxième droite avec la courbe $(\Sigma(t), E(t))$ est franche et donne la valeur de la limite d'élasticité Σ_0 . On obtient ainsi le point $\Sigma_0 \hat{\underline{\underline{\sigma}}}$, limite élastique dans la direction $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$, qui est situé sur la surface seuil de plasticité. On ramène alors la contrainte à 0 et on recommence l'essai dans une autre direction $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$. La limite Σ_0 dépend de la valeur retenue pour l'offset. Pour un seul

²Il existe cependant dans le monde quelques machines réellement triaxiales (dont une au Laboratoire de Mécanique et Technologie de L'ENS Cachan), mais la complexité des éprouvettes les rend d'un usage délicat.

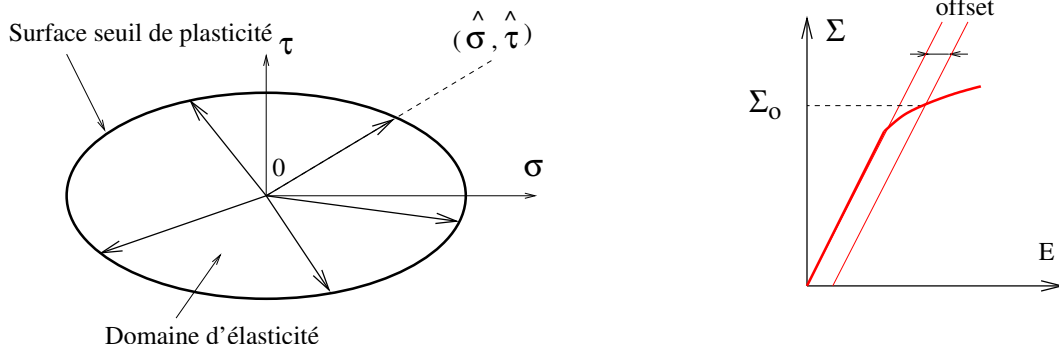


Fig. 5.3: Principe de l'essai permettant la détermination de la surface seuil.

essai de traction simple on le prend conventionnellement égal à $0.2\%³$, mais dans les essais multiaxiaux on s'efforce de ne pas trop dépasser la limite d'élasticité (car l'accumulation de ces dépassements dans les différentes directions de contrainte explorées conduirait à un écrouissage significatif du matériau).

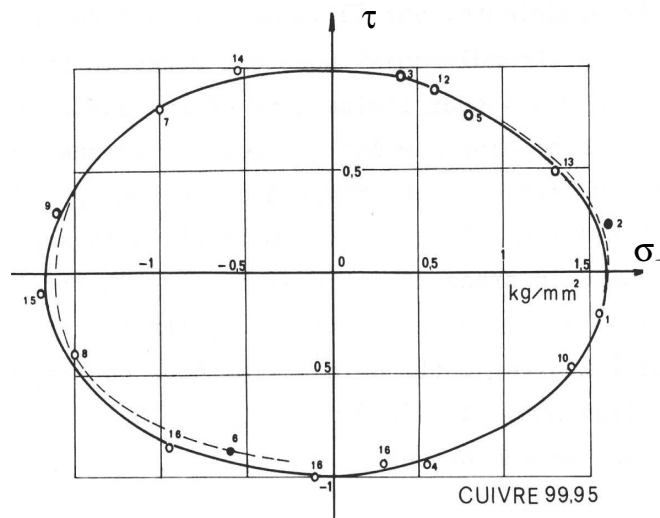


Fig. 5.4: Essai de traction-torsion sur cuivre. Surface seuil initiale. En trait plein la surface seuil prédite par le critère de von Mises. D'après Bui [23].

Les expériences de Bui [23] dont nous allons présenter les résultats, ont été effectuées avec un offset de 2×10^{-5} . Ces expériences de traction-torsion ont permis de tracer la surface seuil de plasticité d'un certain nombre de matériaux. La surface seuil du cuivre pur est représentée sur la figure 5.4. Deux remarques immédiates peuvent être faites :

- L'état naturel sans contrainte $\underline{\underline{\sigma}} = 0$, est à l'intérieur du domaine initial d'élasticité.
- Le domaine d'élasticité est convexe : si deux états de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$ sont dans le domaine d'élasticité, alors le segment joignant $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$ à $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$ est également dans le domaine d'élasticité (figure 5.14).

³La limite élastique en question est notée $R_{p0.2}$ dans les bases de données matériaux.

5.1.1.2 Modèles. Critères de Tresca et de von Mises

Dans le cas particulier du cuivre (figure 5.4) il semble que la surface seuil initiale ait la forme d'une ellipse dans le plan (σ, τ) . Nous allons examiner si cette forme est décrite par les critères courants de plasticité. Pour les métaux, sensibles au cisaillement, il a été vu à la fin du chapitre 1 que les critères de Tresca et de von Mises étaient susceptibles de rendre compte de la même courbe de traction uniaxiale. Les essais multiaxiaux évoqués ci-dessus permettent de juger de la pertinence de ces critères et de déterminer lequel d'entre eux est plus adapté à tel ou tel matériau. Examinons quelles sont leurs prédictions respectives dans le cas de l'essai de traction-torsion.

Critère de Tresca. Le critère de Tresca s'écrit

$$\sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_0.$$

Pour un champ de la forme (5.1) les contraintes principales sont, par ordre croissant,

$$\frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}, \quad 0, \quad \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}.$$

La plus grande différence entre contraintes principales est donc $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ de sorte que la surface seuil prédite par le critère de Tresca est une ellipse d'équation :

$$\sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_0^2. \quad (5.4)$$

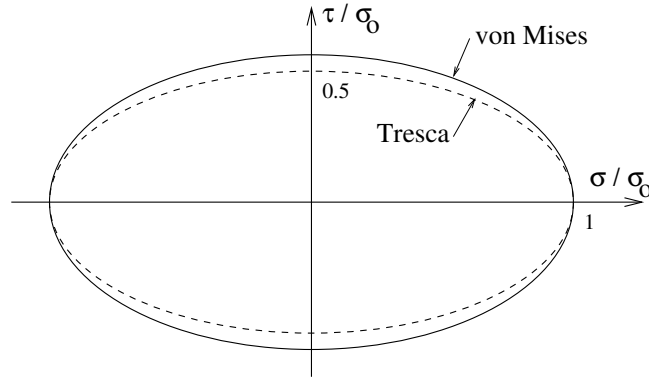


Fig. 5.5: Traction-torsion. Comparaison des surfaces seuil prédites par les critères de Tresca et de von Mises.

Critère de von Mises. En ce qui concerne le critère de von Mises, la contrainte moyenne, le déviateur des contraintes et la contrainte équivalente de l'état de contrainte (5.1) s'écrivent respectivement :

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{3}, \quad \underline{s} = -\frac{\sigma}{3} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) + \frac{2\sigma}{3} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \tau (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

$$\sigma_{\text{eq}} = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2}.$$

La surface seuil prédite par le critère de von Mises est une ellipse d'équation

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_0^2. \quad (5.5)$$

Comparaison essais/critères. Dans les deux cas les surfaces (5.4) et (5.5) sont des ellipses passant par le même point $\sigma = \sigma_0, \tau = 0$ en traction simple. Le rapport entre le grand axe et le petit axe de l'ellipse est 2 dans le cas de Tresca et $\sqrt{3}$ dans le cas de von Mises. Les essais de Bui [23] reproduits sur la figure 5.4 montrent un rapport proche de $\sqrt{3}$. Les résultats expérimentaux sont donc mieux reproduits par le critère de von Mises. D'autres essais (également de traction-torsion) effectués par Taylor et Quinney [28] sur différents métaux (Aluminium, cuivre et acier doux) vont dans le même sens.

Les essais de traction biaxiale mettent en évidence une différence de forme très nette entre les deux critères (voir exercice 1 de la section 5.3) : la surface seuil prédite par le critère de Tresca est une surface polygonale présentant des points anguleux, tandis que la surface prédite par le critère de von Mises est régulière.

Outre sa meilleure adéquation aux résultats expérimentaux pour les métaux courants⁴, le critère de von Mises est plus facile à mettre en oeuvre sur le plan numérique que le critère de Tresca. Sauf mention explicite du contraire, c'est celui que nous retiendrons dans la suite pour modéliser la surface seuil des métaux.

5.1.2 Surface seuil actuelle. Ecroûissage

5.1.2.1 Aspects expérimentaux

Lorsqu'on continue la charge au delà de la surface seuil initiale, le matériau se déforme plastiquement. Puis, si l'on décharge l'éprouvette, on revient en régime élastique. On peut alors déterminer la nouvelle surface seuil de plasticité en renouvelant l'expérience décrite au paragraphe précédent (exploration de différentes directions de contrainte et arrêt dès la plasticité atteinte). Si cette nouvelle surface seuil est identique à la surface seuil initiale, le matériau est élastique *parfaitement plastique*. En général cette nouvelle surface seuil, dite *surface seuil actuelle*, est différente de la surface initiale. Cette modification traduit *l'écrouissage* du matériau. Elle dépend bien entendu du trajet de déformation parcouru hors du domaine d'élasticité initial.

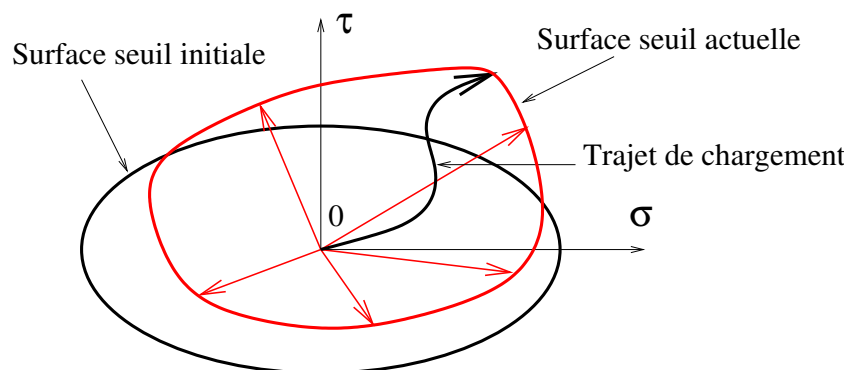


Fig. 5.6: Modification de la surface seuil après déformation hors du domaine d'élasticité initial.

La figure 5.7, également tirée des travaux de Bui, présente l'évolution de la surface seuil d'un acier doux, pour deux trajets de chargement différents. Le premier trajet est

⁴Le critère de Tresca a originalement été proposé pour le plomb.

5.1. SURFACE SEUIL

purement radial, comme ceux employés pour la détermination de la surface seuil initiale, mais le chargement a été poursuivi au delà de l'offset. Le second trajet n'est pas radial et consiste en une traction simple (suivant l'axe horizontal) suivi d'une torsion à force de traction constante (portion verticale). La surface seuil actuelle est différente dans les deux cas ce qui confirme le rôle essentiel du trajet de chargement. En particulier, si l'on

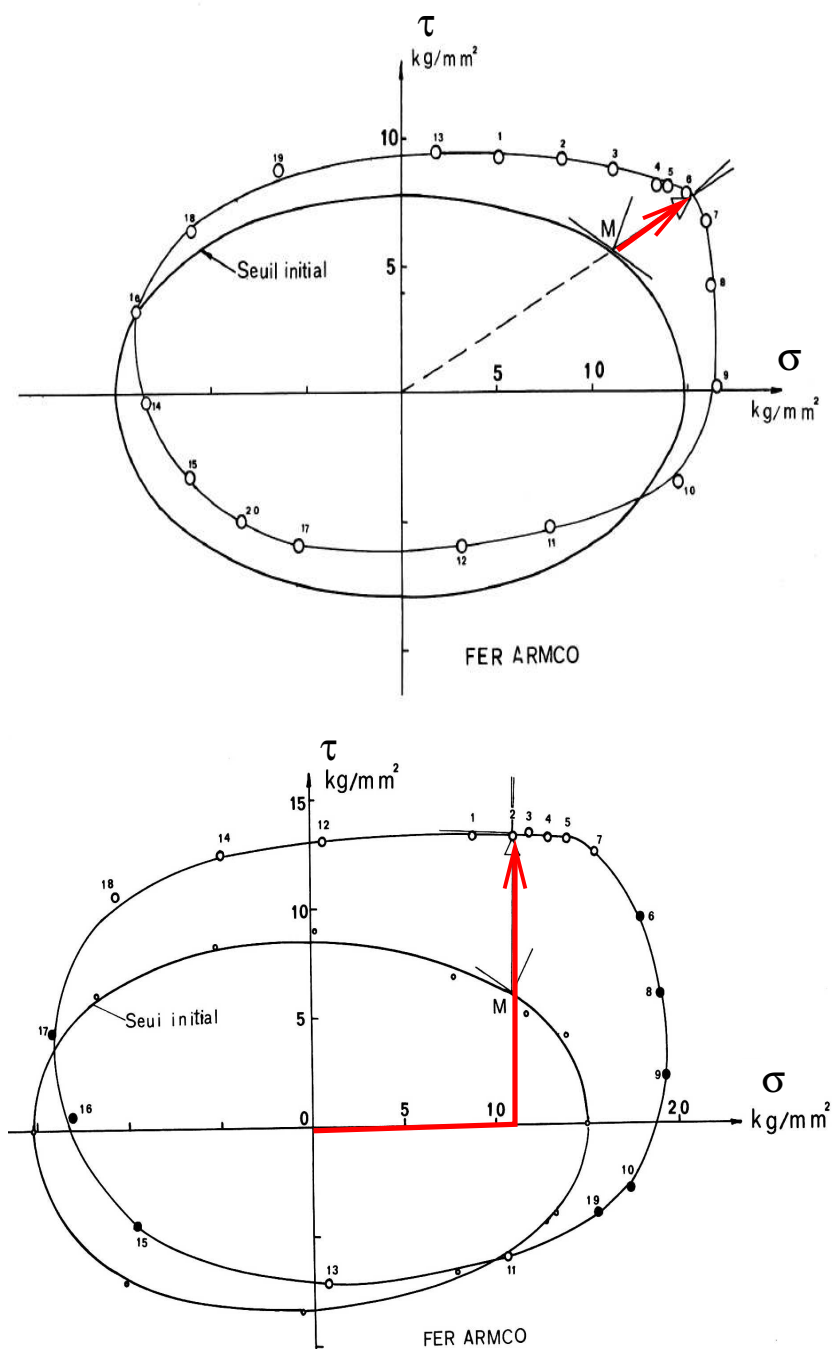


Fig. 5.7: Essai de traction-torsion sur acier doux (tiré de [23]). Evolution de la surface seuil pour deux histoires de chargement. a) Trajet de chargement purement radial. b) Le trajet de chargement consiste en une traction pure (inférieure à la limite élastique), suivie d'une torsion à force de traction constante.

aboutit au même état de contrainte par deux trajets de chargement différents, les surfaces seuil en cet état de contrainte seront différentes. Les modifications subies par la surface seuil peuvent être classées en trois catégories :

- Modification de taille : on observe un gonflement de la surface seuil.
- Translation : le centre du domaine d'élasticité se déplace. Ce déplacement est à l'origine de l'effet Bauschinger rencontré au chapitre 1 : par exemple la surface seuil actuelle de la figure 5.7b présente une limite d'élasticité en compression inférieure (en valeur absolue) à la limite d'élasticité initiale en compression.
- Distorsion ou changement de forme de la surface seuil. Initialement elliptique, la surface seuil présente un point plus ou moins anguleux dans la direction de chargement. Cet effet est encore plus net lorsque le trajet de chargement est unidirectionnel et sort beaucoup du domaine d'élasticité initial, comme l'illustre la figure 5.8 qui présente différentes surfaces seuil pour l'Aluminium en compression.

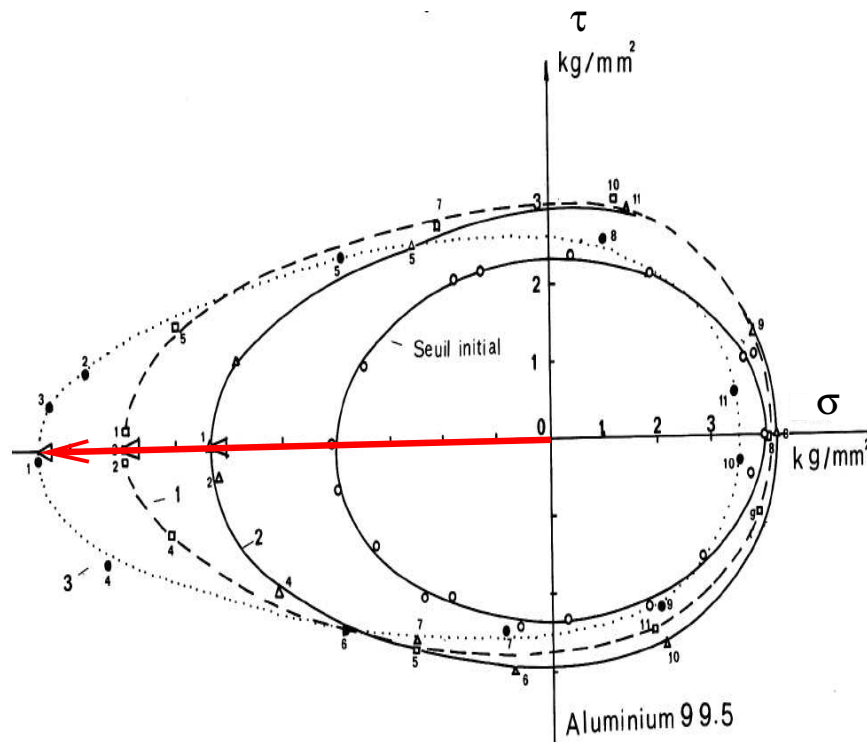


Fig. 5.8: Compression simple sur Aluminium (d'après Bui [23]).

5.1.2.2 Modélisation de l'écroutissage

Nous nous limiterons à la modélisation du changement de taille de la surface seuil (*écroutissage isotrope*) et du changement de centre (*écroutissage cinématique*)⁵. Le domaine initial de plasticité est décrit par une fonction des contraintes, notée f (critère de plasticité) :

$$\text{Domaine d'élasticité : } f(\underline{\sigma}) < 0, \quad \text{Seuil de plasticité : } f(\underline{\sigma}) = 0, \quad (5.6)$$

⁵La modélisation de la distorsion de la surface seuil est encore un domaine de recherche.

5.1. SURFACE SEUIL

Dans le cas des métaux dont la plasticité est bien décrite par le critère de von Mises, cette fonction f est définie à l'aide de la contrainte équivalente :

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_{\text{eq}} - \sigma_0. \quad (5.7)$$

Écrouissage isotrope. Le gonflement de la surface seuil, sans changement de forme ni de centre, qui caractérise l'écrouissage purement isotrope, se fait par une homothétie de centre $\underline{0}$. Une seule variable scalaire, qui sera notée R , est donc nécessaire pour la décrire. Elle mesure la taille de la surface seuil et est destinée à varier avec la déformation plastique. Si on suppose que la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$f(\underline{\sigma}) = \mathcal{F}(\underline{\sigma}) - \sigma_0, \quad (5.8)$$

le critère actuel de plasticité est défini par :

$$\mathcal{F}(\underline{\sigma}) - R \leq 0. \quad (5.9)$$

Dans l'état initial sans écrouissage on doit avoir $R|_{\text{initial}} = \sigma_0$.

L'hypothèse (5.8) est satisfaite dans le cas du critère de von Mises avec $\mathcal{F}(\underline{\sigma}) = \sigma_{\text{eq}}$. Le critère de plasticité d'un matériau à écrouissage isotrope s'écrit donc :

$$\sigma_{\text{eq}} \leq R. \quad (5.10)$$

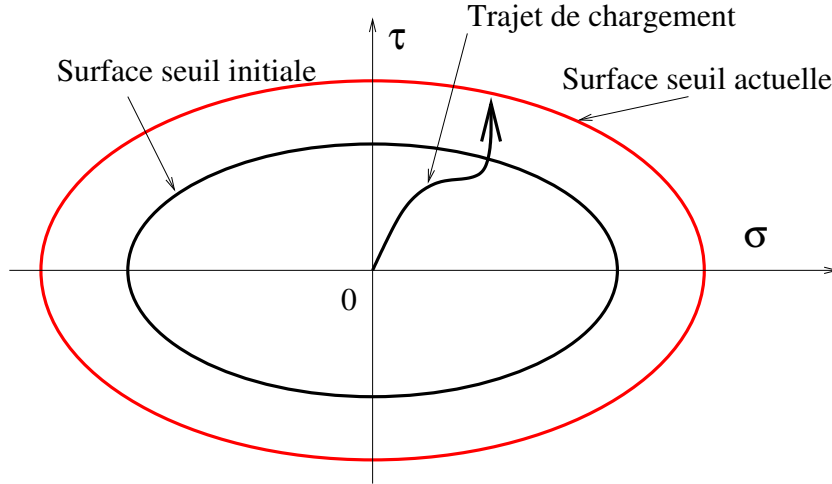


Fig. 5.9: Écrouissage isotrope.

L'hypothèse est également satisfaite dans le cas du critère de Tresca avec

$$\mathcal{F}(\underline{\sigma}) = \text{Sup}_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j|.$$

Un matériau obéissant au critère de Tresca et présentant un écrouissage isotrope aura donc une surface seuil décrite par le critère :

$$\text{Sup}_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \leq R. \quad (5.11)$$

La variable R n'évolue pas lorsque l'état est élastique, mais évolue dès que l'état de contrainte est sur le bord de la surface seuil. Son évolution est donc liée à celle de la déformation plastique. Nous en verrons l'expression plus loin.

Ecrouissage cinématique. L'écrouissage purement cinématique correspond à une translation de la surface seuil, sans changement de forme ni de taille. Cette surface, initialement centrée en $\underline{0}$, est centrée en \underline{X} dans sa position actuelle. Le critère actuel de plasticité actuel s'écrit donc :

$$f(\underline{\sigma} - \underline{X}) \leq 0. \quad (5.12)$$

Il s'agit du critère initial appliqué à $\underline{\sigma} - \underline{X}$. \underline{X} exprime l'existence à l'échelle microscopique d'un champ de contrainte dû aux différentes hétérogénéités qui sont autant d'obstacles au mouvement des dislocations (dislocations existantes, précipités, joints de grain). Pour cette raison \underline{X} est appelée *contrainte interne*⁶. En effet tout se passe comme si, sous l'application d'une contrainte macroscopique $\underline{\sigma}$, une partie \underline{X} de cette contrainte servait à équilibrer des contraintes à l'échelle microscopique, tandis que l'autre partie $\underline{\sigma} - \underline{X}$ servait à mettre en mouvement les dislocations (donc contribue à l'évolution de la déformation plastique). Donc à l'échelle de l'ingénieur, la loi de comportement plastique du matériau paraîtra s'appliquer à $\underline{\sigma} - \underline{X}$.

Dans le cas du critère de von Mises, ce critère s'écrit :

$$(\sigma - X)_{\text{eq}} \leq \sigma_0. \quad (5.13)$$

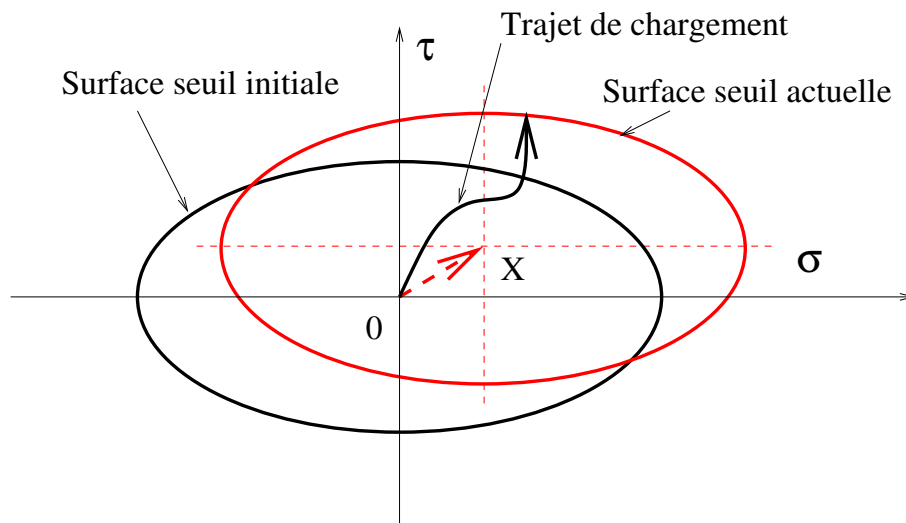


Fig. 5.10: Ecrouissage cinématique.

5.2 Déformation plastique

Nous nous limitons dans ce chapitre à des transformations infinitésimales (hypothèse des petites perturbations). Comme dans le cas uniaxial, la déformation totale $\underline{\underline{\varepsilon}}$ peut être décomposée en une *partie élastique* $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}}$, directement proportionnelle aux contraintes et donc récupérable par décharge (car nulle lorsque les contraintes sont nulles) et une *partie plastique* $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}$, qui subsiste après décharge :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}. \quad (5.14)$$

⁶L'exercice 2 de la section 5.3 illustre cette interprétation de la contrainte interne.

5.2. DÉFORMATION PLASTIQUE

$\underline{\underline{S}}$ est le tenseur de souplesse élastique. En l'absence d'endommagement (ce que nous supposons), la souplesse élastique (ou son inverse la raideur élastique) est la même quelle que soit la déformation plastique. $\underline{\underline{S}}$ est donc donné par l'élasticité initiale du matériau.

Il nous faut préciser la loi de comportement de la déformation plastique. Remarquons tout d'abord qu'il est vain d'espérer obtenir directement $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$ en fonction des contraintes, alors que c'est le cas pour la partie élastique de la déformation d'après (5.14). En effet, comme le montre la figure 5.11, au même niveau de contrainte peut correspondre une infinité de déformations plastiques. On ne peut espérer qu'obtenir des informations sur *l'évolution de la déformation plastique* : tant que le seuil de plasticité n'est pas atteint, les déformations plastiques sont figées (cf figure 5.11), et elles évoluent dès que le seuil est atteint. Et il faut de plus distinguer la charge de la décharge, ce qui indique une influence du signe de $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ sur la loi de comportement.

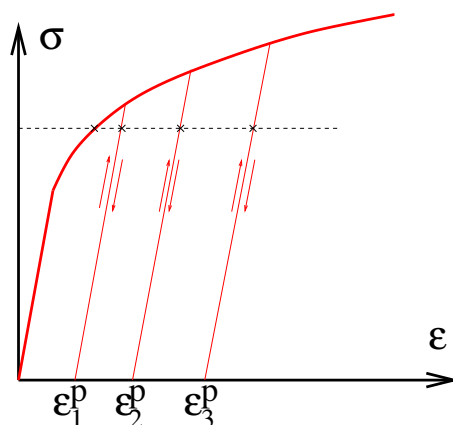


Fig. 5.11: Non unicité de la déformation plastique ε^P à contrainte σ donnée.

C'est donc une loi de comportement incrémentale, reliant $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P$, $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ (et éventuellement d'autres variables d'état), qui régit le comportement élastoplastique.

5.2.1 Aspects expérimentaux

5.2.1.1 Essais uniaxiaux

Reprenons l'essai uniaxial décrit au chapitre 1 et schématisé sur la figure 5.12. Plaçons nous à un niveau de contrainte donné et examinons l'effet d'un incrément de contrainte $d\sigma$.

- Tant que la contrainte reste inférieure au seuil de plasticité actuel (point C de la figure 5.12), la variation de déformation est purement élastique donc réversible

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} \quad \forall d\sigma.$$

- Lorsque la contrainte est égale à la limite d'élasticité actuelle, deux cas doivent à nouveau être distingués :
 - Si $d\sigma < 0$, la contrainte diminue⁷(trajet 1 à partir de B sur la figure 5.11), il y

⁷La discussion est faite dans le cas $\sigma > 0$.

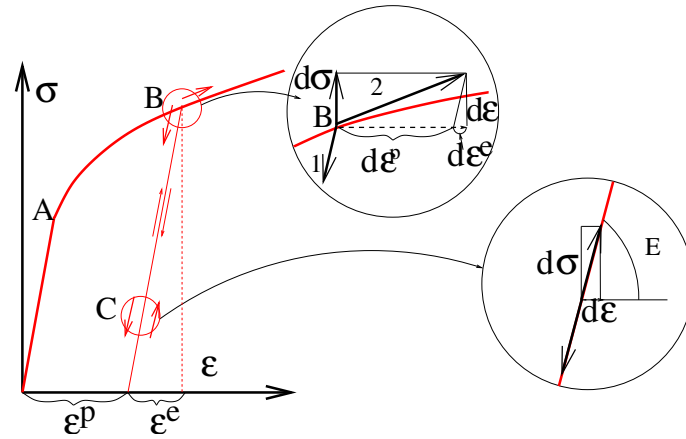


Fig. 5.12: Décomposition de l'incrément de déformation en partie élastique et partie plastique.

a *décharge* élastique et la variation de déformation est purement élastique :

$$\sigma = \sigma_0, \quad d\sigma < 0 \Rightarrow d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E}.$$

- Si $d\sigma \geq 0$, la contrainte se maintient sur le seuil (trajet 2 à partir de B sur la figure 5.11), il y a *charge* plastique et la variation de déformation contient une partie élastique et une partie plastique :

$$\sigma = \sigma_0, \quad d\sigma \geq 0 \Rightarrow d\varepsilon = d\varepsilon^{\text{el}} + d\varepsilon^{\text{P}}, \quad d\varepsilon^{\text{el}} = \frac{d\sigma}{E}, \quad d\varepsilon^{\text{P}} \geq 0.$$

5.2.1.2 Essais multiaxiaux

Au cours des essais multiaxiaux décrits dans la section précédente, il est possible de mesurer les incréments de déformation provoqués par un incrément de contrainte le long du trajet de chargement appliqué. Dans le cas de la traction-torsion, les mesures de la déformation sont respectivement l'allongement le long de \underline{e}_z et l'angle de torsion. Les valeurs résiduelles après décharge de ces quantités permettent le calcul des composantes $\varepsilon_{zz}^{\text{P}}$ et $\varepsilon_{\theta z}^{\text{P}}$ de la déformation plastique. Ceci est fait sur la figure 5.13 et conduit aux observations suivantes :

- Les incréments de déformation plastique sont nuls tant que l'état de contrainte est à l'intérieur du domaine élastique actuel.
- Lorsque l'état de contrainte est sur la surface seuil, *et que l'on continue à charger*, les incréments de déformation plastique tracés à partir de l'état de contrainte sont sensiblement orthogonaux à la surface seuil en ce point, comme on peut le voir sur les figures 5.13a et b.
- Lorsque l'état de contrainte est sur la surface seuil, *mais que l'on décharge l'éprouvette* en diminuant les contraintes, l'incrément de déformation plastique est nul et la décharge se fait de façon élastique.

En résumé, dans les deux types d'essais, uniaxiaux et multiaxiaux, on peut observer que :

5.2. DÉFORMATION PLASTIQUE

Charge-décharge : la déformation plastique n'évolue que si le critère est atteint et, lorsque c'est le cas, n'évolue que lorsqu'il y a charge. Dans les cas contraires, régime élastique ou décharge, les déformations plastiques sont figées.

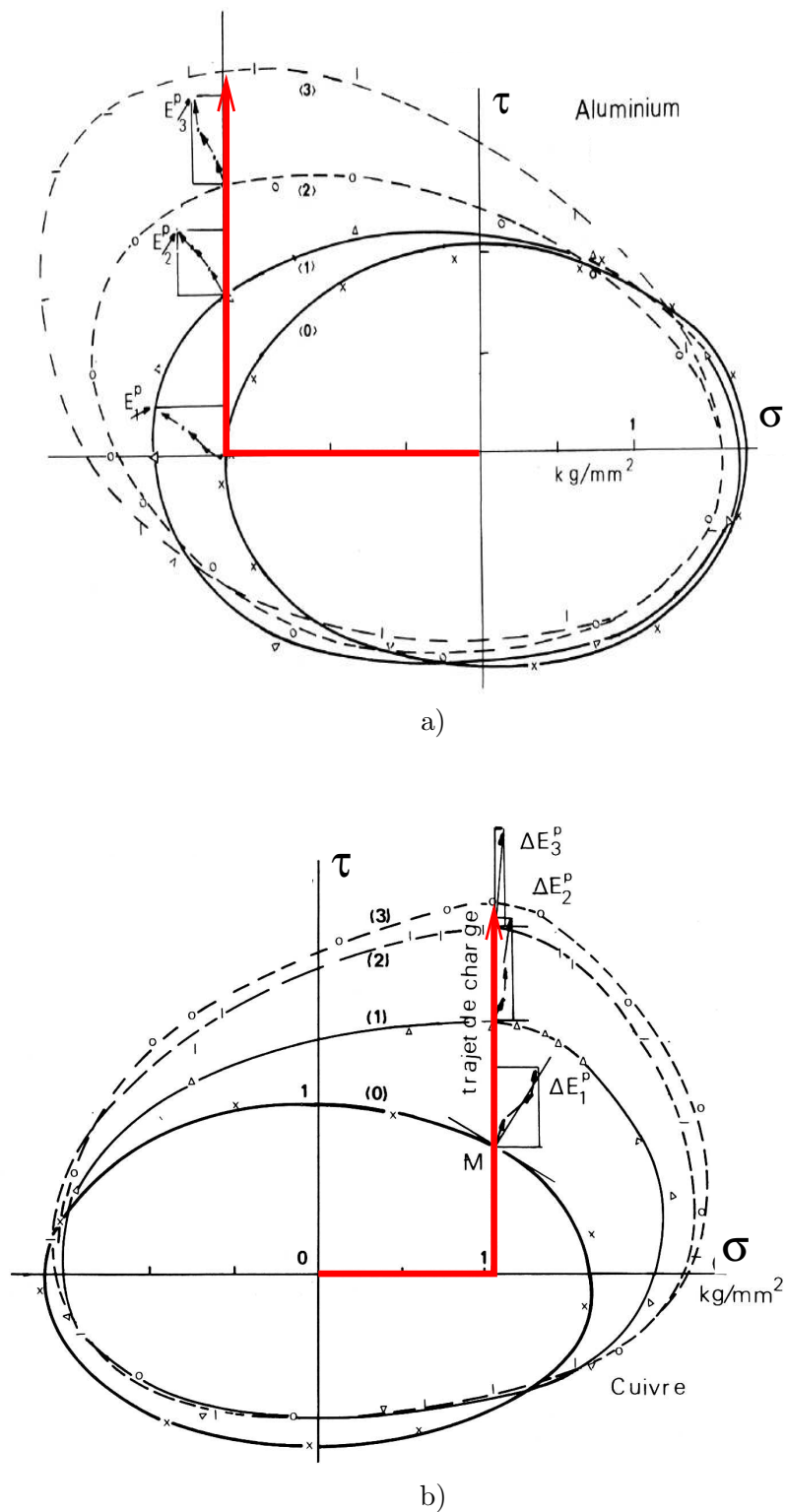


Fig. 5.13: Vitesses de déformation plastique en différents points d'un trajet de chargement. D'après Bui [23].

Les essais multiaxiaux montrent de plus que :

Règle de normalité : dans les métaux, la vitesse de déformation plastique est normale extérieure à la surface seuil de plasticité.

Commentaire : Les matériaux pour lesquels la règle de normalité est satisfaite sont dits *standards*. C'est le cas de la plupart des métaux. En revanche, cette règle n'est pas (ou mal) satisfaite dans les matériaux granulaires, les bétons, les sols (et tous les matériaux où le mécanisme de déformation fait intervenir le frottement). Ces matériaux sont *non standards*.

5.2.2 Modélisation. Règle de normalité en Plasticité parfaite

5.2.2.1 Normalité

Nous nous plaçons pour commencer dans le cas du matériau élastique *parfaitement plastique* (sans écrouissage). Le matériau considéré possède un domaine de plasticité défini par une fonction seuil (ou critère) f dans l'espace des contraintes :

$$\mathbb{P} = \{ \underline{\sigma}, \quad f(\underline{\sigma}) \leq 0 \} \quad (5.15)$$

En nous basant sur les observations expérimentales nous supposons que :

H1 : *Le domaine de plasticité est convexe, ce qui est assuré lorsque le critère f est une fonction convexe de $\underline{\sigma}$:*

$$f(\underline{\sigma}^{(1)}) \leq 0, \quad f(\underline{\sigma}^{(2)}) \leq 0 \Rightarrow f(t\underline{\sigma}^{(1)} + (1-t)\underline{\sigma}^{(2)}) \leq 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Il est également naturel de supposer que l'état sans contrainte $\underline{\sigma} = \underline{0}$ appartient au domaine de plasticité \mathbb{P} .

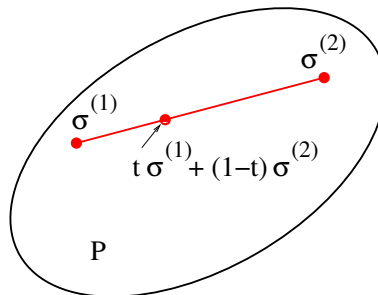


Fig. 5.14: Convexité du domaine de plasticité

L'évolution des déformations plastiques dans les matériaux standards est régie par la règle de normalité :

H2 : *La vitesse de déformation plastique est nulle lorsque les contraintes sont dans le domaine d'élasticité. Lorsqu'elles sont sur le seuil de plasticité, la vitesse de déformation plastique est normale extérieure au domaine de plasticité.*

5.2. DÉFORMATION PLASTIQUE

Critère régulier. Lorsque la fonction f est dérivable au moins au point $\underline{\sigma}$ considéré, la normale extérieure au domaine de plasticité est, sur la surface seuil de plasticité, colinéaire au gradient de la fonction f^8 :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}), \quad (5.16)$$

où le *multiplicateur plastique* $\dot{\lambda}$ est un scalaire positif. En tenant compte du fait que la vitesse de déformation plastique est nulle si l'état de contrainte est à l'intérieur de \mathbb{P} , on peut adopter une écriture de la règle de normalité en écrivant dans tous les cas :

$$f(\underline{\sigma}) \leq 0, \quad \underline{\dot{\varepsilon}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}), \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} = 0 \quad \text{si} \quad f(\underline{\sigma}) < 0. \quad (5.17)$$

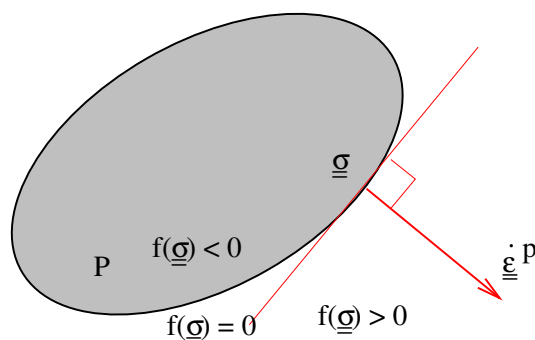


Fig. 5.15: Règle de normalité. Surface seuil régulière.

Indétermination du multiplicateur plastique. Le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ est une nouvelle inconnue introduite par la loi de comportement. La règle de normalité précise son signe (positif) mais ne précise pas sa valeur. Il n'y a pas pour autant de contradiction, la présence de cette nouvelle inconnue étant compensée par l'équation supplémentaire exprimant que $\dot{\lambda}$ n'est non nul que lorsque le seuil est atteint, *i.e.* $f(\underline{\sigma}) = 0$.

En pratique, l'indétermination de $\dot{\lambda}$ pose des problèmes analytiques et numériques assez sérieux, même si le bilan équations-inconnues est équilibré. Nous verrons que l'indétermination du multiplicateur plastique est levée dès que le matériau présente un écroutissage positif (qu'il soit cinématique ou isotrope).

Critère non régulier. Multi-critère. Pour certains matériaux la fonction f définissant le critère n'est pas régulière. Le domaine de plasticité peut présenter des points anguleux (la fonction f n'est pas dérivable en ces points). Mais dans tous les cas d'intérêt pratique la fonction f est définie par plusieurs fonctions f_i qui sont dérivables (c'est la notion de *multi-critère*) :

$$f(\underline{\sigma}) = \text{Sup}_{i=1, \dots, N} f_i(\underline{\sigma}). \quad (5.18)$$

⁸En effet, le gradient de f est orthogonal aux isovaleurs de f , donc à la surface seuil qui est l'isovaleur $f = 0$. Il est orienté des valeurs les plus basses de f ($f < 0$ correspond au domaine d'élasticité) vers les valeurs les plus hautes $f > 0$ correspond à l'extérieur du domaine de plasticité). $\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma})$ est donc normale extérieure à \mathbb{P} en $\underline{\sigma}$.

En d'autres termes le domaine de plasticité est défini par :

$$\mathbb{P} = \{ \underline{\underline{\sigma}}, \quad f_i(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \}.$$

C'est en particulier le cas du critère de Tresca défini par trois fonctions f_i :

$$f_1(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_3 - \sigma_2, \quad f_2(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_3 - \sigma_1, \quad f_3(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_2 - \sigma_1, \quad (5.19)$$

où les contraintes principales ont été ordonnées : $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$. Un point $\underline{\underline{\sigma}}$ est sur la surface seuil si l'un au moins des critères f_i est atteint. La surface seuil se compose alors de deux types de points (figure 5.16). Pour la première catégorie de points, un seul critère est atteint. Ces points sont réguliers, la normale extérieure à \mathbb{P} y est bien définie et donnée par le gradient de la seule fonction f_i qui s'annule en ce point. Pour la seconde catégorie de points plusieurs fonctions f_i s'annulent en même temps. Ces points sont singuliers et la notion de « normale extérieure » doit être remplacée par celle de « cône des normales extérieures ». Ce cône est engendré par les combinaisons à coefficients positifs des gradients $\partial f_i / \partial \underline{\underline{\sigma}}$ des fonctions f_i qui s'annulent au point considéré.

La règle de normalité est alors généralisée au sens suivant (figure 5.16) : *la vitesse de déformation plastique en un point singulier de la surface seuil de plasticité appartient au cône des normales extérieures à \mathbb{P} en ce point.*

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i = 0 \text{ si } f_i(\underline{\underline{\sigma}}) < 0. \quad (5.20)$$

La dernière condition de (5.20) signifie que si le critère numéro i n'est pas atteint, le « mécanisme » correspondant $\partial f_i / \partial \underline{\underline{\sigma}}$ n'est pas actif, *i.e.* λ_i est nul. Il y a donc autant d'équations $f_i(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ que de multiplicateurs λ_i supplémentaires et le bilan inconnues-équations est à nouveau équilibré. Toutefois, ni la direction de $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P$ ni la valeur des multiplicateurs ne sont donnés explicitement par la loi de comportement, ce qui rend les multi-critères délicats à utiliser sur les plans analytique et numérique.

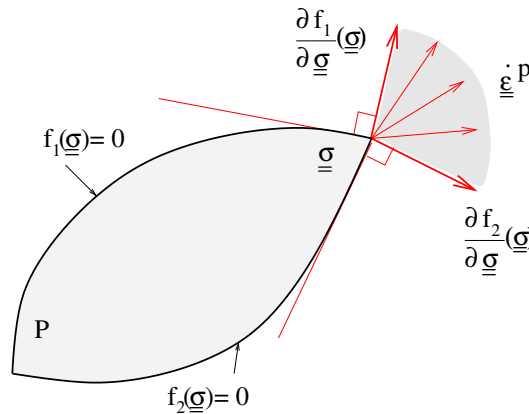


Fig. 5.16: Règle de normalité. Point singulier de la surface seuil.

5.2. DÉFORMATION PLASTIQUE

5.2.2.2 Charge-décharge

Jusqu'à présent nous avons considéré que la déformation plastique est susceptible d'évoluer dès que le seuil de plasticité est atteint. L'analyse des essais uniaxiaux et multiaxiaux a montré que cette évolution ne se produit effectivement que dans le cas de la *charge*. Cette notion de charge, qui reste à préciser en termes mathématiques, doit traduire le fait que le critère est atteint non seulement à l'instant t mais également aux instants immédiatement suivants, *i.e.* :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0 \text{ et } f(\underline{\underline{\sigma}}(t + dt)) = 0 \quad \forall dt > 0, dt \ll 1.$$

La condition de charge à l'instant t se traduit donc par la double égalité

$$f(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0, \quad (5.21)$$

tandis que la décharge depuis la surface seuil correspond aux conditions :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}(t)) < 0.$$

Dans le cas où la fonction f est dérivable, le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ n'est non nul qu'en charge et nous pouvons préciser la relation (5.17) en

$$\dot{\lambda}(t) \geq 0, \quad \dot{\lambda}(t) \neq 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0. \quad (5.22)$$

Dans tous les cas, charge et décharge, on a donc :

$$\dot{\lambda}(t) \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0, \quad \text{i.e.} \quad \dot{\lambda}(t) \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = 0,$$

qui devient grâce à la règle de normalité :

$$\underline{\underline{\dot{\lambda}}}^P(t) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}(t) = 0. \quad (5.23)$$

Il vient d'être démontré que :

En plasticité parfaite, à tout instant, la vitesse de déformation plastique $\underline{\underline{\dot{\lambda}}}^P$ est orthogonale à l'incrément de contrainte $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$.

Commentaires :

1. La relation (5.23) mérite une petite précision mathématique. Il est en effet improbable que la fonction $t \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(t)$ soit en général une fonction dérivable. Si l'on suit la trajectoire des contraintes en partant de l'état naturel (par exemple), on voit que $\underline{\underline{\sigma}}$ va heurter le seuil de plasticité et continuer sa trajectoire soit en restant sur le seuil de plasticité, soit en rebroussant chemin. Il est probable que les instants de contact ou de perte de contact de $\underline{\underline{\sigma}}$ avec la surface seuil sont des instants où la dérivabilité en temps est perdue (figure 5.17).

Si l'on analyse la condition de charge dont se déduit (5.23), on s'aperçoit que l'on manipule exclusivement des *dérivées à droite* (c'est à dire vers le futur) définies par :

$$\frac{d^+}{dt} \underline{\underline{\sigma}}(t) = \lim_{dt > 0 \rightarrow 0} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(t + dt) - \underline{\underline{\sigma}}(t)}{dt}.$$

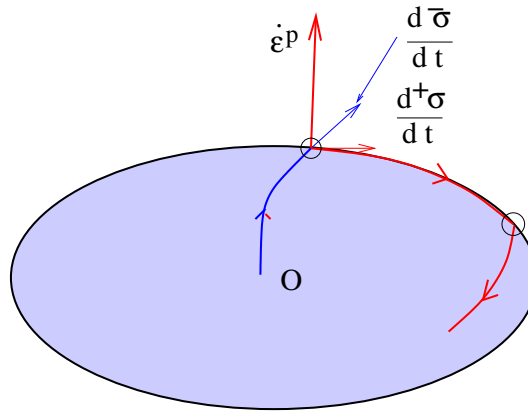


Fig. 5.17: Trajectoire des contraintes et perte de dérivabilité en temps aux instants de contact de la surface seuil.

La dérivée à gauche $\frac{d^-}{dt}\underline{\sigma}(t)$ (vers le passé) est définie de façon analogue avec $dt < 0$. Une analyse mathématique plus poussée montre alors que la relation (5.23) est rigoureuse à condition d'y comprendre la dérivée en temps de $\underline{\sigma}$ comme une dérivée à droite au sens ci-dessus.

2. La démonstration faite ici pour une fonction f dérivable se généralise au cas d'une fonction f multi-critère. La relation (5.23) reste inchangée.

3. Dans les matériaux non standards, la règle d'écoulement plastique peut souvent être écrite à l'aide d'un *potentiel d'écoulement* g , différent du critère f , sous la forme :

$$f(\underline{\sigma}) \leq 0, \quad \underline{\dot{\epsilon}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}), \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} = 0 \quad \text{si} \quad f(\underline{\sigma}) < 0. \quad (5.24)$$

Cette règle d'écoulement est dite *non associée*.

5.2.2.3 Principe de la dissipation plastique maximale.

La règle de normalité peut être énoncée sous une forme légèrement plus générale que les hypothèses (H1) et (H2) adoptées précédemment, en faisant apparaître la notion de puissance dissipée plastiquement (Hill, 1950) définie par⁹ :

$$\mathcal{D}^P = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^P.$$

Considérons un autre état de contrainte $\underline{\sigma}^*$ physiquement admissible, c'est à dire appartenant au domaine de plasticité \mathbb{P} défini en (5.15) et comparons la puissance dissipée dans l'état de contrainte réel $\underline{\sigma}$ à celle qui serait dissipée dans l'état $\underline{\sigma}^*$:

$$\mathcal{D}^{P^*} = \underline{\sigma}^* : \underline{\dot{\epsilon}}^P.$$

\mathbb{P} est un domaine convexe et, comme tel, jouit d'une propriété géométrique simple : *tout*

⁹Pour l'instant il ne s'agit que d'une définition, qui est cependant raisonnable si l'on considère que la puissance mécanique totale $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}$ se décompose en une partie réversible $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^{\text{el}}$ et une partie dissipée $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^P$. Nous approfondirons ces notions au chapitre 7.

5.2. DÉFORMATION PLASTIQUE

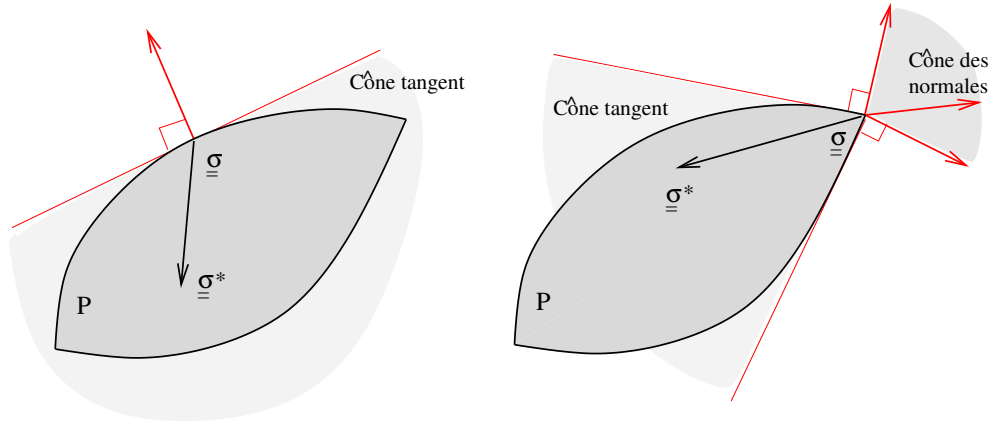


Fig. 5.18: Un convexe est entièrement contenu dans son cône tangent. A gauche, point régulier : le cône tangent est un 1/2 espace. A droite, point singulier : définition du cône tangent.

domaine convexe est, en tout point de son bord, situé d'un seul côté de son plan tangent. Si le bord du convexe n'est pas assez régulier pour que son plan tangent puisse être défini, cette propriété se généralise par le fait que le convexe est entièrement contenu dans le cône tangent (défini comme le cône des vecteurs faisant un angle négatif avec tout vecteur appartenant au cône des normales) en tout point de son bord (figure 5.18). Il résulte de cette propriété que le produit scalaire du vecteur $\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}$ avec n'importe quel vecteur du cône des normales extérieures en $\underline{\underline{\sigma}}$ est négatif :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{P}, \quad (\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P \leq 0 \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{P} \quad (5.25)$$

En revenant à l'expression de la puissance dissipée plastiquement, on a donc établi :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{P} : \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P \geq \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P,$$

et donc :

$$\mathcal{D}^P = \underset{\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{P}}{\text{Max}} \quad \mathcal{D}^{P*}. \quad (5.26)$$

La dissipation plastique dans l'état de contrainte réel est maximale parmi tous les états de contrainte physiquement admissibles.

Remarquons que la règle de normalité assure la positivité de la dissipation plastique réelle \mathcal{D}^P . En effet, par hypothèse $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{0}}$ est dans le domaine de plasticité, et la dissipation virtuelle \mathcal{D}^{P*} , inférieure à la dissipation plastique réelle, est nulle.

Il est possible de construire les lois d'écoulement plastique en prenant pour point de départ la relation (5.25). C'est le « principe » de la dissipation plastique maximale (et non plus, comme ici, une conséquence de la règle de normalité). Nous ne démontrerons pas cette réciproque. L'avantage de la formulation par la dissipation plastique maximale est qu'elle ne fait pas appel à la régularité de la surface seuil (différentiabilité de f ou des f_i). En pratique les deux approches sont équivalentes.

Incompressibilité plastique. Nous avons noté au chapitre 1 que les déformations plastiques dans les matériaux cristallins se produisant par glissement ne s'accompagnent

d'aucune variation de volume. Cette observation est elle bien modélisée par la règle de normalité ?

Nous avons remarqué que les critères de Tresca et de von Mises retenus pour les métaux ne dépendent pas de la contrainte moyenne. Le résultat général est le suivant :

Lorsque le critère de plasticité ne dépend pas de la contrainte moyenne, les déformations plastiques déduites de la règle de normalité sont incompressibles :

$$\text{tr} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}} = 0. \quad (5.27)$$

Pour démontrer ce résultat, partons de la propriété de la dissipation plastique maximale (5.25). Puisque le critère ne dépend pas de la contrainte moyenne, il est invariant par adition d'une pression arbitraire :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = f(\underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{i}}) \quad \forall p.$$

En particulier si $\underline{\underline{\sigma}}$ est dans \mathbb{P} (c'est à dire si $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$) alors $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{i}}$ est également dans \mathbb{P} (puisque $f(\underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{i}}) = f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$). L'inégalité (5.25) donne :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}} = p\underline{\underline{i}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}} \leq 0 \quad \forall p.$$

p (et notamment son signe) est arbitraire et on déduit donc que

$$\text{tr} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \underline{\underline{i}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}} = 0.$$

Par intégration en temps il en résulte que $\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}} = 0$, ce qui exprime l'incompressibilité des déformations plastiques.

5.2.2.4 Application de la règle de normalité au critère de von Mises

Le critère de Von Mises s'exprime à l'aide de la contrainte équivalente par :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{\text{eq}} - \sigma_0 = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2} - \sigma_0.$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{s}}}(\underline{\underline{\sigma}}) : \frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{\text{eq}}} : \frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}.$$

En vertu de l'égalité $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\sigma}}$, où $\underline{\underline{K}}$ est le projecteur sur les déviateurs, on obtient :

$$\frac{\partial \underline{\underline{s}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{K}}, \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{\text{eq}}}, \quad \text{puisque} \quad \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{s}}.$$

La loi d'écoulement plastique déduite de la règle de normalité s'écrit alors

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{\text{eq}}}, \quad (5.28)$$

soit, en détaillant les composantes

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{P}} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{s_{ij}}{\sigma_{\text{eq}}}.$$

Pour un matériau régi par le critère de von Mises, la vitesse de déformation plastique est colinéaire au déviateur des contraintes.

On vérifie, si besoin est, l'incompressibilité des déformations plastiques, car le déviateur des contraintes est à trace nulle.

5.2. DÉFORMATION PLASTIQUE

Déformation plastique cumulée. Calculons la norme de la vitesse de déformation plastique définie par :

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^P \dot{\varepsilon}_{ij}^P \right)^{1/2}. \quad (5.29)$$

Un calcul facile montre que $\dot{\lambda} = \dot{p}$. La quantité p , définie par

$$p(t) = \int_0^t \dot{p}(s) ds,$$

appelée *déformation plastique cumulée*, mesure la longueur du chemin parcouru dans l'espace des déformations plastiques, toutes directions confondues. Elle coïncide avec ε^P lors d'un essai de traction simple monotone (c'est la raison d'être du facteur $2/3$ dans son expression). En effet lors un essai de traction simple dans la direction \underline{e}_z , la vitesse de déformation plastique, axisymétrique et incompressible, s'écrit :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^P = \dot{\varepsilon}^P \left(-\frac{1}{2} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \frac{1}{2} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right).$$

Il est immédiat de vérifier qu'avec la définition prise en (5.29) on a bien $\dot{p} = \dot{\varepsilon}^P$.

\dot{p} est aussi appelée *vitesse de déformation plastique équivalente* et parfois notée $\dot{\varepsilon}_{\text{eq}}^P$. On prendra garde au fait que la contrainte équivalente est définie avec un facteur $3/2$ tandis que la vitesse de déformation équivalente est définie avec un facteur $2/3$ (ceci pour rester cohérent avec la contrainte et la déformation dans le cas uniaxial) et conserver l'équivalence énergétique entre l'écriture multiaxiale et l'écriture uniaxiale :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P = \sigma_{\text{eq}} \dot{p}.$$

5.2.2.5 Critère de Tresca

Le critère de Tresca est, comme le critère de von Mises, un critère de matériau isotrope. La fonction f est donc une fonction isotrope de $\underline{\underline{\sigma}}$; Pour une telle fonction les directions principales du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ et de $\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$ (et donc de $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P$) coïncident. La règle de normalité peut être exprimée sans perte de généralité dans la base principale commune à ces deux tenseurs. L'examen du cisaillement maximal (ou des 3 cercles de Mohr), montre que les 3 critères ne peuvent être atteints simultanément. Si les 3 contraintes principales sont différentes, un seul critère peut être atteint,

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_0.$$

Si deux contraintes principales sont égales $\sigma_1 = \sigma_2$ par exemple, deux critères sont simultanément atteints

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_3 - \sigma_2 = \sigma_0.$$

Enfin si les 3 contraintes principales sont égales, l'état de contrainte est purement hydrostatique et le critère ne peut pas être atteint. Il n'y a pas lieu de se préoccuper des multiplicateurs dans ce dernier cas.

La règle de normalité (5.26) s'exprime à l'aide d'un ou deux multiplicateurs selon les cas :

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Point régulier : } \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_0, \\
 \qquad \qquad \qquad \dot{\varepsilon}_1^P = -\dot{\lambda}, \quad \dot{\varepsilon}_2^P = 0, \quad \dot{\varepsilon}_3^P = \dot{\lambda} \\
 \text{Point singulier : } \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_3 - \sigma_2 = \sigma_0, \\
 \qquad \qquad \qquad \dot{\varepsilon}_1^P = -\dot{\lambda}, \quad \dot{\varepsilon}_2^P = -\dot{\mu}, \quad \dot{\varepsilon}_3^P = \dot{\lambda} + \dot{\mu}. \\
 \text{Point singulier : } \sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_0, \\
 \qquad \qquad \qquad \dot{\varepsilon}_1^P = -\dot{\lambda} - \dot{\mu}, \quad \dot{\varepsilon}_2^P = \dot{\mu}, \quad \dot{\varepsilon}_3^P = \dot{\lambda}.
 \end{array} \right\} \quad (5.30)$$

Les $\dot{\varepsilon}_i^P$ sont les vitesses de déformation plastique principales, $\dot{\lambda}$ et $\dot{\mu}$ sont les *multiplicateurs plastiques*. On vérifie (si un doute subsistait) l'incompressibilité des déformations plastiques.

5.2.3 Matériaux écrouissables

5.2.3.1 Règle de normalité

La règle de normalité s'applique sans grande modification au cas des matériaux écrouissables. La différence essentielle tient au fait que pour ces matériaux, le critère de plasticité dépend d'autres variables que la seule contrainte $\underline{\sigma}$. Ces variables d'écrouissage sont une variable scalaire R dans le cas de l'écrouissage isotrope, une variable tensorielle \underline{X} dans le cas de l'écrouissage cinématique et des deux variables lorsque l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique sont tous deux présents.

$$f = f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = \mathcal{F}(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R.$$

Dans le cas du critère de von Mises cette relation s'écrit :

$$f = (\sigma - X)_{\text{eq}} - R$$

A un instant donné, les variables $\underline{\sigma}$, \underline{X} , R sont connues et on cherche l'évolution du système aux instants immédiatement suivants. La vitesse de déformation plastique est donnée par la règle de normalité. En nous limitant pour simplifier au cas où la fonction f est dérivable, cette règle s'exprime donc par :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}, \underline{X}, R), \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} = 0 \text{ si } f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) < 0. \quad (5.31)$$

Le *multiplicateur plastique* $\dot{\lambda}$ est, comme en plasticité parfaite, laissé indéterminé par la règle de normalité.

Pour définir complètement la loi de comportement il reste à préciser comment évolue la surface seuil avec la déformation plastique. En d'autres termes il nous faut préciser les lois d'évolution de \underline{X} et p . Ces variables d'écrouissage n'évoluent que lorsqu'il y a

5.2. DÉFORMATION PLASTIQUE

évolution des déformations plastiques. Le modèle le plus simple consiste donc à les relier à des grandeurs de même ordre (sur le plan tensoriel) et qui n'évoluent que lorsqu'il y a plasticité : la déformation plastique et la déformation plastique cumulée :

$$\underline{\underline{\dot{X}}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^P}, \quad \dot{R} = h(p)\dot{p}. \quad (5.32)$$

$\underline{\underline{H}}$ est le module d'écroissage cinématique du matériau¹⁰. h est son module d'écroissage isotrope. C'est une fonction de la déformation plastique cumulée p . Ces relations s'intègrent en :

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}_0 + \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^P, \quad R = R(p). \quad (5.33)$$

Les relations (5.31) et (5.32) définissent complètement l'évolution de la déformation plastique et de la surface seuil en plasticité avec écroissage.

5.2.3.2 Multiplicateur plastique

Lorsque l'écroissage isotrope ou cinématique, est *positif* (notion qui sera précisée en cours de route), l'indétermination qui pèse en plasticité parfaite sur le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ peut être levée. On exploite pour cela la condition de charge (dite aussi condition de *cohérence*).

Le multiplicateur n'est non nul qu'en charge, lorsque l'état de contrainte est sur le seuil à l'instant t et y demeure aux instants immédiatement suivants. En d'autres termes le calcul de $\dot{\lambda}$ n'a d'intérêt que lorsque $\dot{f} = 0$. Ce critère de charge s'écrit :

$$\dot{f} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) : \underline{\underline{\dot{X}}} - \frac{\partial R}{\partial p}(p)\dot{p} = 0.$$

Avec le choix d'évolution des variables d'écroissage effectué en (5.32), cette relation devient :

$$\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \dot{\lambda} \left(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + \frac{\partial R}{\partial p}(p) \right) = 0, \quad \text{où on a noté } \underline{\underline{N}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}).$$

Un matériau sera dit à écroissage positif si le module d'écroissage isotrope $h = \frac{R}{p}(p)$ et le module d'écroissage cinématique $\underline{\underline{H}}$ sont positifs (au sens des formes quadratiques pour le module $\underline{\underline{H}}$), l'un d'entre eux étant strictement positif. Pour un tel matériau, la relation précédente permet d'exprimer le multiplicateur plastique sous la forme :

$$\dot{\lambda} = \frac{(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}})^+}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h}. \quad (5.34)$$

On remarque qu'en utilisant la positivité du multiplicateur plastique nous avons introduit dans cette expression la « partie positive » du numérateur. Le symbole $(x)^+$ vaut 0 si $x \leq 0$ et vaut x si $x > 0$. Rappelons que dans l'expression précédente $\underline{\underline{N}}$ dépend de $\underline{\underline{\sigma}}$ et

¹⁰Cet écroissage cinématique est linéaire si $\underline{\underline{H}}$ est constant, ce que nous supposons ici. Il existe des modèles d'écroissage cinématique non linéaire plus complexes.

$\underline{\underline{X}}$ tandis que h dépend de p . Cette expression permet donc la détermination de la vitesse de déformation plastique associée à tout incrément de contrainte $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$.

Elle permet également de mettre en évidence le tenseur de complaisance *tangent* associé à l'écouissage. En régime élastique ou en décharge on a simplement :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}.$$

En charge on a

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P) = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \lambda \underline{\underline{N}}) = \underline{\underline{C}} : \left(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \frac{(\underline{\underline{N}} \otimes \underline{\underline{N}}) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h} \right),$$

et donc

$$\left(\underline{\underline{I}} + \frac{\underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{N}} \otimes \underline{\underline{N}})}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h} \right) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}},$$

et après des calculs élémentaires :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{S}}^{ep} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}, \quad \text{où on a posé } \underline{\underline{S}}^{ep} = \underline{\underline{S}} + \frac{\underline{\underline{N}} \otimes \underline{\underline{N}}}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h}. \quad (5.35)$$

Le tenseur $\underline{\underline{S}}^{ep}$ est le tenseur des modules tangents (à utiliser en charge seulement) reliant incrément de contrainte et incrément de déformation. C'est un tenseur *anisotrope* à cause du terme $\underline{\underline{N}} \otimes \underline{\underline{N}}$.

Commentaires.

1. On notera l'analogie mathématique entre la relation (5.35) et une loi de comportement élastique. Cette analogie n'est toutefois pas complète car les modules sont différents dans les zones de charge où le module tangent est $\underline{\underline{S}}^{ep}$ et les zones élastiques ou en décharge, où le module tangent est $\underline{\underline{S}}$, la position de ces zones n'étant pas connue à l'avance. Il faut également noter que le tenseur des modules tangents $\underline{\underline{S}}^{ep}$ dépend de la variable d'espace \underline{x} et du temps t par l'intermédiaire de $\underline{\underline{N}}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t), \underline{\underline{X}}(\underline{x}, t))$.

2. Pour les essais uniaxiaux, l'écouissage positif du matériau se traduit par une courbe (σ, ε^P) croissante, ou plus mathématiquement par l'inégalité $\dot{\sigma} \varepsilon^P \geq 0$. Cette inégalité se généralise au cas triaxial. En effet, il résulte de (5.34) que

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P = \lambda \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{N}} = \frac{(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}})^2}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h}.$$

Cette dernière quantité est positive dès lors que $\underline{\underline{H}}$ et h sont positifs. En résumé, l'évolution des contraintes et des déformations plastiques dans un matériau à écouissage positif vérifie :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P \geq 0. \quad (5.36)$$

Rappelons que cette quantité est nulle dans le cas parfaitement plastique (cf (5.23)).

Formules et résultats essentiels

- **Critère de plasticité**

▷ Surface seuil initiale définie par un critère f , fonction convexe, telle que $f(\underline{\underline{0}}) < 0$:

$$\text{Domaine d'élasticité : } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0, \quad \text{Seuil de plasticité : } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.$$

▷ Ecrouissage isotrope (gonflement de la surface seuil) :

$$\text{domaine initial : } f(\underline{\underline{\sigma}}) = \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}}) - \sigma_0 \leq 0, \quad \text{domaine actuel : } \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}}) - R \leq 0.$$

▷ Ecrouissage cinématique (translation de la surface seuil) :

$$f(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) \leq 0.$$

▷ Critère de Tresca :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \text{Sup}_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_0.$$

▷ Critère de von Mises :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{\text{eq}} - \sigma_0, \quad \sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}, \quad \underline{\underline{s}} \text{ déviateur des contraintes.}$$

- **Evolution de la déformation plastique**

▷ Décomposition de la déformation totale en partie élastique et partie plastique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}.$$

▷ Règle de normalité pour un critère dérivable :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} = 0 \quad \text{si} \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0.$$

▷ Règle de normalité pour un multi-critère :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \sum_{i=1}^N \dot{\lambda}_i \frac{\partial f_i}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\lambda}_i \geq 0, \quad \dot{\lambda}_i = 0 \quad \text{si} \quad f_i(\underline{\underline{\sigma}}) < 0.$$

▷ Critère de von Mises :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{\text{eq}}}.$$

▷ Déformation plastique cumulée :

$$p(t) = \int_0^t \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{P}}(s) \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{P}}(s) \right)^{1/2} ds.$$

• **Dissipation plastique maximale**

▷ Etat de contrainte plastiquement admissible :

$$\mathbb{P} = \{ \underline{\underline{\sigma}}, f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0. \}.$$

▷ « Principe » de la dissipation plastique maximale :

$$\mathcal{D}^P = \underset{\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{P}}{\text{Max}} \mathcal{D}^{P*}.$$

▷ Incompressibilité plastique : si le critère de plasticité ne dépend pas de la contrainte moyenne σ_m :

$$\text{tr} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = 0.$$

• **Matériaux écrouissables**

▷ Critère de von Mises pour un matériau écrouissable :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R) = (\sigma - X)_{\text{eq}} - R.$$

▷ Règle de normalité :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R), \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} = 0 \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R) < 0.$$

▷ Evolution des variables définissant l'écrouissage :

$$\underline{\underline{\dot{X}}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P, \quad \dot{R} = h(p)\dot{p}.$$

$\underline{\underline{H}}$ module d'écrouissage cinématique, h module d'écrouissage isotrope.

• **Détermination du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$**

▷ Plasticité parfaite, équation implicite :

$$\dot{\lambda}(t) \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = 0.$$

▷ Matériaux à écrouissage positif :

$$\dot{\lambda} = \frac{(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}})^+}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}} + h}, \quad \underline{\underline{N}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R).$$

5.3 Exercices

Exercice 1. Comparaison des critères de Tresca et de von Mises en traction biaxiale. Analyser pour l'essai de traction biaxiale décrit sur la figure 5.1b la forme des surfaces seuils prédites par le critère de Tresca et de von Mises.

Eléments de réponse.

Les contraintes principales pour un état de contrainte de la forme (5.2) sont $(0, \sigma_1, \sigma_2)$. Le critère de Tresca qui porte sur la plus grande différence entre contraintes principales s'écrit donc

$$\sup(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|) \leq \sigma_0.$$

Il est facile de voir que le domaine défini par ce critère est un hexagone délimité par les droites $\sigma_1 = \pm\sigma_0$, $\sigma_2 = \pm\sigma_0$, $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_0$.

En ce qui concerne le critère de von Mises, la contrainte moyenne, le déviateur des contraintes et la contrainte équivalente pour un état de contrainte de la forme (5.2) s'écrivent :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3}, \quad \underline{s} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{3} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3,$$

$$\sigma_{\text{eq}} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2}.$$

Le critère de von Mises prévoit donc une surface seuil elliptique d'équation :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_0^2.$$

L'écart maximal entre les deux surfaces seuils est de l'ordre de 11 %.

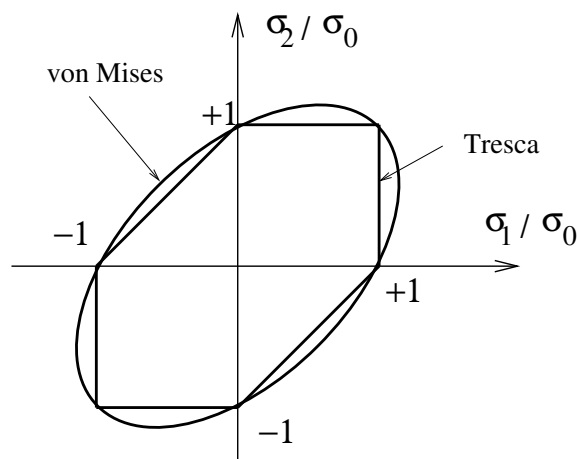


Fig. 5.19: Traction biaxiale. comparaison des critères de Tresca et de von Mises.

Exercice 2. Modèle rhéologique de l'érouissage cinématique. Les modèles rhéologiques sont des assemblages en série ou en parallèle de modèles élémentaires dont le comportement est décrit à la section 7.2.1.1. On considère le modèle rhéologique ci-dessous (figure 5.20). On note ε^P le déplacement du frotteur, ε^{el} l'allongement du ressort E et ε le déplacement du point où est appliquée la contrainte σ .

1⁰) On charge le système au delà de σ_0 . Décrire sa réponse. Puis on diminue la contrainte appliquée jusqu'à des valeurs négatives de la contrainte. Décrire l'évolution du

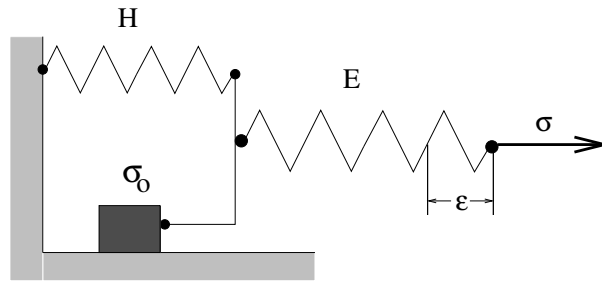


Fig. 5.20: Modèle rhéologique de l'écrouissage cinématique.

ystème. Pour quelle valeur de la contrainte observera-t-on une plastification en compression ?

2⁰) Comment est utilisée l'énergie fournie au système pendant la première charge analysée à la question précédente ?

Éléments de réponse.

1⁰) En notant σ_1 la contrainte agissant sur le ressort H et σ_2 la contrainte agissant sur le frotteur, les équations régissant le système sont :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon^{\text{el}} + \varepsilon^{\text{P}}, & \varepsilon^{\text{el}} &= \frac{\sigma}{E}, & \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2, \\ \dot{\varepsilon}^{\text{P}} &= 0 \text{ si } |\sigma_2| < \sigma_0 \text{ ou } |\sigma_2| = \sigma_0 \text{ et } \dot{\sigma}_2 \text{ de signe opposé à } \sigma_2 \\ \dot{\varepsilon}^{\text{P}} &= \frac{\dot{\sigma}_1}{H} = \frac{\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_2}{H}. \end{aligned} \right\}$$

Lorsqu'on augmente la contrainte σ à partir de 0, la contrainte dans le frotteur n'est pas suffisante pour permettre la déformation de l'ensemble en parallèle. Jusqu'au seuil σ_0 le ressort E est le seul à se déformer et :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E}.$$

Au delà du seuil σ_0 , la contrainte σ_2 dans le frotteur se fige à la valeur σ_0 (par suite $\dot{\sigma}_2 = 0$), le frotteur se déplace et le ressort H se déforme :

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H} \right) \dot{\sigma}.$$

Cette relation s'intègre entre les instants où la contrainte atteint σ_0 et l'instant actuel en :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + (\sigma - \sigma_0) \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H} \right)$$

La contrainte tangentielle dans le frotteur est σ_0 et la contrainte dans le ressort H vaut :

$$\sigma_1 = \sigma - \sigma_0.$$

En décharge le frotteur reste bloqué et le ressort H conserve une tension résiduelle $X = \sigma_B - \sigma_0$. La contrainte dans le frotteur est $\sigma_2 = \sigma - X$ et le patin reste bloqué tant que :

$$|\sigma_2| < \sigma_0 \quad \text{i.e.} \quad X - \sigma_0 < \sigma < X + \sigma_0.$$

Cette inégalité définit le domaine élastique actuel qui diffère du domaine élastique initial $-\sigma_0 < \sigma < \sigma_0$. Les deux limites se sont élevées de X ce qui explique le durcissement en traction et l'effet Bauschinger en compression dus aux contraintes internes.

2⁰) Pour parvenir au point B (figure 5.21) le travail de la contrainte extérieure est :

$$W_{ext} = \int_0^B \sigma d\varepsilon.$$

C'est l'aire hachurée sur la figure 5.21. Cette énergie est utilisée de 3 facons :

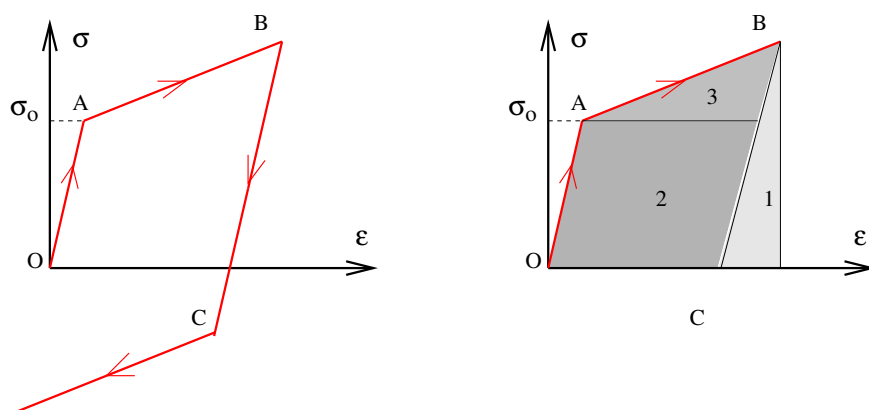


Fig. 5.21: *Modèle rhéologique de l'écroutissage cinématique linéaire*

- Une partie est de l'énergie élastique immédiatement récupérable par décharge : c'est l'énergie élastique du ressort E (notée 1 sur la figure 5.21) :

$$W^{el} = \frac{1}{2}E(\varepsilon^{el})^2 = \frac{1}{2}E(\varepsilon - \varepsilon^P)^2.$$

- Une partie de l'énergie est dissipée dans le mouvement du frotteur (notée 2 sur la figure 5.21) :

$$W^P = \sigma_0|\varepsilon^P|.$$

- Le reste de l'énergie est stockée dans le système et non immédiatement accessible : c'est l'énergie de déformation du ressort H qui reste tendu après décharge :

$$W^{st} = \frac{1}{2}H(\varepsilon^P)^2.$$

Cette énergie est notée 3 sur la figure 5.21.

Les contraintes internes qui provoquent l'écroutissage mettent en jeu une énergie stockée dans le système qui se modifie lors de l'écroutissage.

5.4 Annexe : Lien entre principe de la dissipation maximale et convexité du domaine de plasticité

Supposons que les informations dont nous disposons sur la loi de comportement plastique se réduisent à deux choses : un domaine fermé de plasticité \mathbb{P} dont on ne sait pas s'il est convexe mais dans lequel le tenseur des contraintes est astreint à demeurer et le principe de la dissipation plastique maximale, sous la forme (5.26). Alors, si \mathbb{P} est d'intérieur non vide et qu'il est égal à l'adhérence de son intérieur, il est convexe.

Ce résultat peut être obtenu comme une conséquence du résultat suivant d'analyse convexe¹¹ appliqué à $\mathcal{O} = \text{intérieur de } \mathbb{P}$.

¹¹dû à P. Ballard.

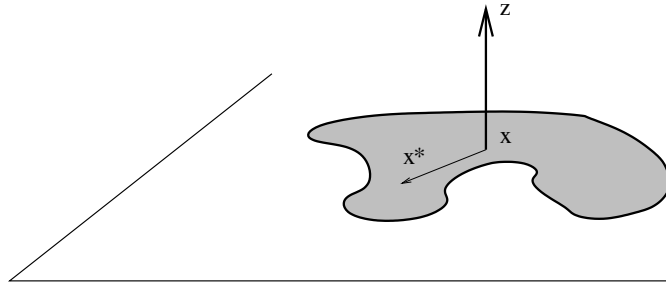


Fig. 5.22: Mise en défaut du résultat si \mathbb{P} est d'intérieur vide.

Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^N tel que :

$$\forall \underline{x} \in \partial\mathcal{O}, \quad \exists \underline{z} \neq 0 \quad \text{tel que} \quad \forall \underline{x}^* \in \mathcal{O} \quad (\underline{x}^* - \underline{x}) \cdot \underline{z} \leq 0. \quad (5.37)$$

Alors \mathcal{O} est convexe.

Avant de donner la preuve de ce résultat, notons que l'hypothèse de non vacuité de \mathcal{O} est nécessaire. Il suffit pour s'en convaincre de considérer un domaine de forme quelconque (en particulier non convexe) contenu dans un plan de l'espace des contraintes (cf figure 5.22). Il est donc d'intérieur vide. Tout vecteur \underline{z} normal à ce plan satisfera en tout point \underline{x} l'inégalité (5.37) (avec égalité) sans que le domaine soit convexe.

Démontrons maintenant le résultat annoncé. Soient $\underline{x}^{(1)}$ et $\underline{x}^{(2)}$ deux éléments quelconques de \mathcal{O} . Il faut montrer que le segment $[\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}]$ est contenu dans \mathcal{O} . En raisonnant par l'absurde, supposons que ce segment ne soit pas tout entier contenu dans \mathcal{O} . Il existe alors $t \in]0, 1[$ tel que $\underline{x}_t = t\underline{x}^{(1)} + (1-t)\underline{x}^{(2)}$ soit sur le bord de \mathcal{O} (cf figure 5.23). D'après l'inégalité (5.37) appliqué à $\underline{x}^{(1)}$ et $\underline{x}^{(2)}$ il existe \underline{z} non nul tel que

$$(\underline{x}_t - \underline{x}^{(1)}) \cdot \underline{z} \leq 0, \quad (\underline{x}_t - \underline{x}^{(2)}) \cdot \underline{z} \leq 0.$$

Compte tenu de la forme de \underline{x}_t , il vient

$$(\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)}) \cdot \underline{z} = 0.$$

Soit \underline{u} un vecteur unitaire de direction quelconque et $\underline{x}_\varepsilon = \underline{x}^{(1)} + \varepsilon\underline{u}$. Puisque $\underline{x}^{(1)}$ est dans l'ouvert \mathcal{O} , $\underline{x}_\varepsilon$ est également dans \mathcal{O} pour ε assez petit. En appliquant à nouveau l'inégalité (5.37) à $\underline{x}^* = \underline{x}_\varepsilon$ et $\underline{x} = \underline{x}_t$, on obtient :

$$(1-t)(\underline{x}_t - \underline{x}^{(2)}) \cdot \underline{z} + \varepsilon(\underline{u} \cdot \underline{z}) \leq 0.$$

Le premier terme est nul. Le produit scalaire de \underline{z} avec tout vecteur unitaire \underline{u} doit être négatif. Le vecteur \underline{z} est donc nul, ce qui contredit l'hypothèse (5.37).

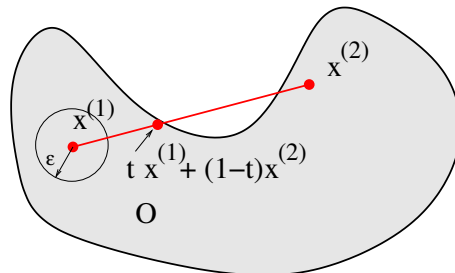


Fig. 5.23: Lien entre principe de la dissipation plastique maximale et convexité du domaine de plasticité.

Chapitre 6

Problèmes d'évolution pour les structures élasto-plastiques standards

Introduction et cadre de travail...

La détermination de l'état d'équilibre (contraintes et déformations) d'une structure élastique sous un chargement donné suppose la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles, exprimant la compatibilité du champ de déformation, les équations d'équilibre, la loi de comportement et les conditions aux limites. Si le chargement est variable en temps, les champs solutions à l'instant t sont fonctions de la seule valeur du chargement à l'instant t . Il en va tout autrement pour une structure élasto-plastique. Non seulement il est nécessaire de connaître la *valeur* à l'instant t du chargement sous lequel on cherche à déterminer l'état d'équilibre de la structure, mais il est aussi indispensable de préciser la façon dont le chargement a été appliqué et le chemin suivi, en d'autres termes *l'histoire de ce chargement*. *La détermination de l'équilibre d'une structure élasto-plastique est un problème d'évolution, en général non linéaire.*

A côté de cet aspect temporel, nouveau par rapport à l'élasticité et lié à la loi de comportement, demeurent les conditions d'équilibre, les conditions de compatibilité et les conditions aux limites, qui font que les champs mécaniques en un point de la structure dépendent de façon cruciale non seulement de ce qui se passe en ce point, mais également aux points voisins. En d'autres termes, certaines des équations à résoudre (équilibre, compatibilité) sont des *équations aux dérivées partielles*.

La question de *l'évolution de structures élasto-plastiques* soumises à un chargement dépendant du temps est délicate sur le plan mathématique. Ce chapitre expose quelques résultats dans ce domaine, sous les hypothèses de travail suivantes :

- ▷ *Les déformations sont suffisamment petites pour que l'hypothèse des petites perturbations soit légitime.*
- ▷ *Les matériaux étudiés ont un comportement élasto-plastique standard parfaitement plastique ou à écrouissage positif.*
- ▷ *Les transformations sont suffisamment lentes pour pouvoir se placer dans l'ap-*

proximation d'une évolution quasi-statique et isotherme (les effets d'inertie et les variations de température sont négligés).

6.1 Formulation du problème

Une *structure* est un corps fini occupant un domaine Ω de frontière régulière. Ce corps est constitué d'un matériau élasto-plastique standard, présentant soit un écrouissage nul (plasticité parfaite), soit un écrouissage positif, isotrope ou cinématique.

Etat initial. Dans l'état initial du corps il règne un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x})$ en équilibre avec les forces de volume et les forces de surface. Des déformations plastiques $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}0}(\underline{x})$ peuvent également être présentes dans cet état initial à la suite de sollicitations qu'a pu subir le corps au cours du passé. L'état de contrainte initial $\underline{\underline{\sigma}}^0$ et le champ de déformations plastiques initiales $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}0}$ doivent être compatibles entre eux. Il existe un champ de déplacement $\underline{\underline{\xi}}^0$, cinématiquement admissible avec les données initiales en déplacement, vérifiant

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}^0) = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}0}. \quad (6.1)$$

Evolution du système. A partir de cet état initial et sur un intervalle de temps $[0, T]$, ce corps est soumis à une *histoire de chargement* $(\underline{F}(t), \underline{T}^d(t), \underline{\xi}^d(t))$ (forces de volume, densité de forces imposées sur $S_{\underline{T}}$, déplacement imposés sur la partie complémentaire du bord $S_{\underline{\xi}}$). Pour simplifier nous supposons $S_{\underline{T}}$ et $S_{\underline{\xi}}$ indépendants du temps.

On cherche à déterminer s'il existe, à tout instant $t \in [0, T]$, un champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{x}, t)$ et un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ vérifiant la loi de comportement élasto-plastique, les équations d'équilibre, les conditions aux limites en déplacement et en force et les conditions initiales $\underline{\underline{\sigma}}(t=0) = \underline{\underline{\sigma}}^0$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}(t=0) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}0}$.

Les équations à satisfaire sont donc, dans le cadre des hypothèses précisées en introduction (HPP et processus quasi-statique) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Compatibilité} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\xi} + {}^T \nabla \underline{\xi}) \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{Equilibre} : \text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{F} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{Comportement} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}, \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \\ \dot{\lambda} \geq 0, \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0, \\ \text{Conditions aux limites} : \underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \quad \text{sur } S_{\underline{T}}, \quad \underline{\xi} = \underline{\xi}^d \quad \text{sur } S_{\underline{\xi}}, \\ \text{Conditions initiales} : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, 0) = \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x}), \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}(\underline{x}, 0) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}0}(\underline{x}). \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

Commentaires.

1. Pour simplifier l'écriture nous avons choisi le cas d'un matériau parfaitement plastique dont le critère est défini par un seul potentiel régulier f . Dans le cas d'un matériau standard avec multi-critère ou avec écrouissage, l'équation de comportement donnant $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}}$ doit être modifiée en conséquence.

2. Il est à noter que la seule véritable inconnue cinématique est le champ de vitesse $\underline{\dot{\xi}}$ (le déplacement $\underline{\xi}$ s'en déduit par intégration en temps). En effet la loi de comportement peut être écrite sous forme *incrémentale*, en ne faisant intervenir que des vitesses (ou taux) de déformation :

$$\underline{\dot{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\nabla \underline{\dot{\xi}} + {}^T \nabla \underline{\dot{\xi}} \right) = \underline{\dot{\varepsilon}}^{\text{el}} + \underline{\dot{\varepsilon}}^{\text{P}}, \quad \underline{\dot{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\dot{\varepsilon}}, \quad \underline{\dot{\varepsilon}}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}). \quad (6.3)$$

En revanche le champ de contrainte $\underline{\sigma}$ et sa vitesse $\underline{\dot{\sigma}}$ interviennent tous deux dans la loi de comportement.

Lorsque le matériau est écrouissable, outre le champ de vitesse et le champ de contrainte, les variables d'écrouissage qui sont le champ de déformation plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}(\underline{x}, t)$ et le champ de déformation plastique cumulée $p(\underline{x}, t)$ doivent également être déterminées à tout instant pour écrire la loi de comportement.

3. Pour bien comprendre la nature du problème d'évolution en contrainte, il est instructif de se placer en un point \underline{x} de la structure et d'imaginer pendant un instant que la vitesse de déformation $\underline{\dot{\varepsilon}}$ est connue en fonction du temps. Pour simplifier les notations supposons de plus que $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{I}}$. La loi de comportement prend alors la forme suivante :

$$\underline{\dot{\sigma}}(t) + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) = \underline{\dot{\varepsilon}}, \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad f(\underline{\sigma}) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} f(\underline{\sigma}) = 0. \quad (6.4)$$

Le second membre $\underline{\dot{\varepsilon}}$ de (6.4) étant connu, il s'agit d'une *équation différentielle ordinaire non linéaire* par rapport à $\underline{\sigma}$. Or, les équations différentielles non linéaires n'admettent pas toujours de solution. En particulier le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas ici, le multiplicateur $\dot{\lambda}$ étant une fonction implicite et inconnue de $\underline{\sigma}$ dont on ne sait pas si elle vérifie la condition de Lipschitz. On comprend donc que, même dans cette situation simplifiée, un résultat d'existence et/ou d'unicité de la solution en contraintes ne résultera pas d'arguments classiques¹.

Les questions posées dans le cas général sont donc :

- Existe-t-il un champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{x}, t)$ et un champ de contrainte $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ vérifiant le système d'équation (6.2) ?
- La réponse à cette question dépend elle de la nature de l'écrouissage du matériau ?
- Comment calculer cette solution lorsqu'elle existe ?

6.2 Etude d'un cas particulier : Torsion d'un arbre cylindrique élasto-plastique

Afin d'introduire les résultats généraux sur l'évolution des structures élasto-plastiques, il est instructif de traiter un exemple où les calculs analytiques peuvent être menés en détail.

L'exemple traité est celui de la torsion d'un arbre cylindrique constitué d'un matériau élasto-plastique obéissant au critère de von Mises, avec ou sans écrouissage cinématique. Les notations ont été précisées à l'annexe A, paragraphe A.4.1 : l'arbre est un cylindre de

¹Il a d'ailleurs fallu attendre le début des années 1970 pour voir les premiers résultats dans ce domaine

section circulaire (rayon R) soumis à une torsion d'angle α . Les forces volumiques sont nulles, les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} \text{Faces supérieures et inférieures} : \quad z = 0 : \quad & \xi_r = \xi_\theta = 0, \quad T_z = 0, \\ & z = h : \quad \xi_r = 0, \quad \xi_\theta = \alpha r, \quad T_z = 0. \\ \text{Bord du cylindre} : \quad r = R : \quad & 0 < z < h, \quad \underline{T} = \underline{0}. \end{aligned}$$

La puissance des efforts extérieurs est (on notera pour ce calcul que $\dot{\underline{\xi}} = \dot{\alpha} \underline{e}_z \wedge r \underline{e}_r$ sur la face supérieure) :

$$\mathcal{P}_e = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \dot{\underline{\xi}} \, da = \int_{z=h} \underline{T} \cdot \dot{\alpha} \underline{e}_z \wedge r \underline{e}_r \, da = \dot{\alpha} \cdot \left(\int_{z=h} r \underline{e}_r \wedge \underline{T} \, da \right) \cdot \underline{e}_z = M \dot{\alpha},$$

où le couple de torsion M est la composante le long de \underline{e}_z du moment résultant \underline{M} des efforts appliqués à la section supérieure de l'arbre :

$$\underline{M} = \int_{z=h} \underline{OM} \wedge \underline{T} \, da = M \underline{e}_z, \quad M = 2\pi \int_0^R \sigma_{\theta z} r^2 dr. \quad (6.5)$$

Pour cet essai de torsion, M est un *paramètre de chargement généralisé*, tandis que l'angle de torsion α est la *variable cinématique associée*.

6.2.1 Solution élastique

Rappelons que la solution élastique du problème s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\xi} = \xi_\theta \underline{e}_\theta, \quad \xi_\theta = \frac{\alpha r z}{h}, \\ \underline{\underline{\sigma}} = \tau(r) (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z), \quad \tau(r) = \frac{\mu \alpha r}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Dans cette phase élastique, la relation entre le moment et l'angle de torsion s'écrit :

$$M = \frac{\mu I}{h} \alpha, \quad I = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (6.7)$$

6.2.2 Matériau élastique parfaitement plastique

Première plastification. Le matériau constituant l'arbre est élasto-plastique parfait et obéit au critère de Von Mises avec une limite d'élasticité σ_0 . La contrainte équivalente en régime élastique s'écrit :

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{3} \tau \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\mu \alpha r}{h}$$

La première plastification se produit donc en $r = R$, point où le cisaillement τ et donc la contrainte équivalente est maximal, pour une valeur (α_0, M_0) de l'angle et du couple de torsion :

$$\alpha_0 = \frac{k h}{\mu R}, \quad M_0 = \frac{\pi k R^3}{2}, \quad k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}.$$

k est la limite élastique en cisaillement du matériau de von Mises.

Régime élasto-plastique. Lorsqu'on poursuit le chargement au-delà de (α_0, M_0) , il est naturel d'imaginer que la zone plastique qui se forme initialement au bord du cylindre va progresser vers l'intérieur de l'arbre en respectant la symétrie de révolution du problème, sous forme d'une couronne circulaire. Nous allons vérifier qu'une solution complète du problème peut être construite à partir de cette intuition. Considérons en effet que la zone plastique occupe la couronne $a \leq r \leq R$ où a est le rayon du coeur élastique, pour l'instant inconnu et qui sera déterminé par l'analyse qui va suivre.

On cherche (arbitrairement pour l'instant, mais ce choix sera justifié à la fin du calcul) un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ sous forme d'un cisaillement simple dans le plan $(\underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau(r) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta). \quad (6.8)$$

Ce champ de contrainte vérifie les équations d'équilibre $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0$, qui se réduisent ici à :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} = 0 \text{ (sur } \underline{e}_\theta), \quad \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = 0 \text{ (sur } \underline{e}_z).$$

Il vérifie également les conditions aux limites en $z = 0, z = h$ ($\sigma_{zz} = 0$) et sur le bord latéral du cylindre ($\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r = \underline{0}$).

En ce qui concerne la loi de comportement (plasticité parfaite), le critère de plasticité impose

$$\tau(r) < k \text{ pour } r \leq a, \quad \text{et} \quad \tau(r) = k \text{ pour } a \leq r \leq R, \quad \text{où} \quad k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}.$$

Le profil de contrainte est donc complètement déterminé dans la zone plastique par la condition de plasticité, mais reste à déterminer en zone élastique. A cet effet on remarque que, dans la zone élastique, le problème posé est *exactement* celui de la torsion d'un arbre *élastique* de rayon a . En effet les équations dans cette zone (équilibre, comportement, conditions aux limites) sont identiques à celles du paragraphe 6.2.1, à l'exception éventuelle des conditions aux limites en $r = a$ qu'il reste à préciser. Compte tenu de la forme (6.8) du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ retenu, le vecteur contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r$ est nul sur tous les cercles de centre O, en particulier en $r = a$. La continuité du vecteur contrainte entraîne donc que la force exercée par la zone plastique sur la zone élastique est nulle. On est donc ramené exactement aux équations du régime élastique et la solution dans cette zone est la solution élastique, tant pour le champ de vitesse que pour celui des contraintes. En particulier

$$\tau(r) = \frac{\mu \alpha r}{h} \quad \text{pour} \quad 0 \leq r \leq a. \quad (6.9)$$

En $r = a$, à la frontière entre zone élastique et zone plastique, nous imposons au cisaillement d'être continu, non pour des raisons d'équilibre, mais en raison de la condition de plasticité atteinte en $r = a$, frontière commune entre la zone élastique et la zone plastique. Le rayon a est alors déterminé par

$$\tau(a) = k \quad \text{i.e.} \quad a = \frac{kh}{\alpha \mu} = \frac{\alpha_0}{\alpha} R. \quad (6.10)$$

En conclusion :

$$\tau(r) = k \frac{r}{a} \quad \text{pour} \quad 0 \leq r \leq a, \quad \tau(r) = k \quad \text{pour} \quad a \leq r \leq R.$$

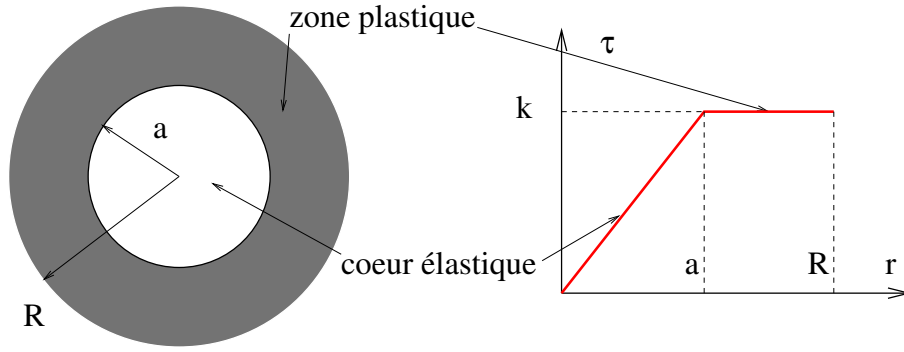


Fig. 6.1: Torsion d'un arbre élasto-plastique.

Il reste à vérifier qu'il est possible de contruire un champ de vitesse $\underline{\dot{\xi}}$ associé au champ de contrainte (6.8), (6.9), (6.10) et vérifiant les conditions aux limites en déplacement. Ce champ est complètement déterminé en zone élastique :

$$\underline{\dot{\xi}} = \frac{\dot{\alpha} r z}{h} \underline{e}_\theta. \quad (6.11)$$

Pourquoi ne pas essayer le même champ de déplacement comme solution du problème élasto-plastique ?

Ce champ vérifie les conditions aux limites en déplacement. Montrons qu'il vérifie également la loi de comportement :

$$\underline{\dot{\underline{\xi}}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\dot{\underline{\sigma}}} + \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{S}}}{\sigma_0},$$

où $\underline{\dot{\underline{\xi}}} = \underline{\underline{\dot{\xi}}}$. La seule inconnue dans cette équation est le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}(\underline{x}, t)$, nul en zone élastique, positif en zone plastique, dont il faut montrer l'existence. Le tenseur vitesse de déformation associé au champ (6.6) s'écrit :

$$\underline{\underline{\dot{\xi}}} = \frac{\dot{\alpha} r}{2h} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta). \quad (6.12)$$

Le tenseur de contrainte (6.8) est un déviateur pur (donc $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}}$) et la vitesse du tenseur des contraintes (6.8), (6.9) est donnée par :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \dot{\tau}(r) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \text{où} \quad \dot{\tau}(r) = \begin{cases} \mu \dot{\alpha} r / h & 0 \leq r < a \\ 0 & a \leq r \leq R. \end{cases} \quad (6.13)$$

Le tenseur vitesse de déformation élastique $\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{\text{el}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \frac{1}{2\mu} \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ ($\underline{\underline{\sigma}}$ est un déviateur pur) est porté par $(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta)$. Il en est donc de même du tenseur de vitesse de déformation plastique $\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{\text{P}} = \underline{\underline{\dot{\xi}}} - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{\text{el}}$. En résumé :

$$\underline{\underline{s}} = \tau(r) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{\text{P}} = \dot{\varepsilon}^{\text{P}} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

avec

$$\dot{\varepsilon}^{\text{P}} = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq a \\ \dot{\alpha} r / 2h, & a \leq r \leq R \end{cases}, \quad \tau = \begin{cases} \mu \alpha r / h, & 0 \leq r \leq a \\ k, & a \leq r \leq R. \end{cases}$$

6.2. ETUDE D'UN CAS PARTICULIER : TORSION D'UN ARBRE CYLINDRIQUE ÉLASTO-PLASTIQUE

Le tenseur $\underline{\dot{\varepsilon}}^P$ est bien colinéaire au tenseur \underline{s} , avec une constante de proportionnalité telle que :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^P = \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_0} \underline{s}, \quad \dot{\lambda} = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq a \\ \dot{\alpha}r/\sqrt{3}h & a \leq r \leq R. \end{cases}$$

Le multiplicateur $\dot{\lambda}$ est donc positif tant que $\dot{\alpha}$ est positif ce qui correspond à la *charge*. Une solution complète $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$ du problème élasto-plastique a donc été construite. Rien, pour l'instant, ne nous assure de son unicité. Nous verrons plus loin que le champ de contrainte solution est unique, ce qui justifie a priori les hypothèses, apparemment arbitraires, faites lors de la construction du champ de contrainte.

Relation moment-angle de torsion. Le couple appliqué à l'arbre est

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_0^R \tau(r) r^2 dr = 2\pi \left(\int_0^a \frac{\mu\alpha r^3}{h} dr + \int_a^R k r^2 dr \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{\mu\alpha}{h} \frac{a^4}{4} + \frac{k}{3} (R^3 - a^3) \right) = 2\pi \left(\frac{kR^3}{3} - \frac{k^4 h^3}{12(\alpha\mu)^3} \right) \\ &= M_0 \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^3 \right). \end{aligned}$$

La courbe (α, M) est représentée sur la figure 6.2. Cette courbe qui traduit la réponse de la structure en variables de chargement généralisées a l'allure d'une courbe d'érouissage, alors que le matériau constituant l'arbre est parfaitement plastique. Le caractère croissant de la courbe tient à la croissance de la zone plastique : le supplément de puissance fourni par l'extérieur pour passer de (α, M) à $(\alpha + d\alpha, M + dM)$ est consommé dans l'avancée de la zone plastique vers l'intérieur du cylindre.

La valeur limite du couple quand α tend vers $+\infty$ est

$$M^u = \frac{2\pi k R^3}{3} = \frac{4}{3} M_0.$$

Cette valeur du couple de torsion correspond au cas où la zone plastique envahit l'arbre tout entier ($a = 0$). Nous avons établi que le long de ce trajet de chargement particulier (charge monotone) :

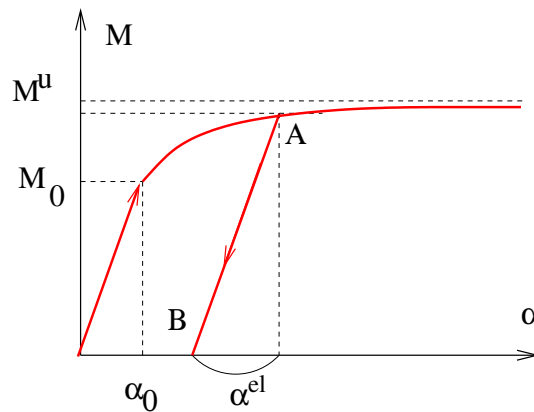


Fig. 6.2: Relation moment-angle de torsion pour un arbre constitué d'un matériau élastique parfaitement plastique.

Lorsque le matériau constituant l'arbre est élastique parfaitement plastique, le problème admet une solution lorsque le couple de torsion appliqué à l'arbre est inférieur à M^u . Il n'en admet pas au-delà de M^u .

Nous verrons plus loin que cette conclusion est valable *quel que soit le trajet de chargement*.

Décharge. A partir d'un état A où l'angle et le couple de torsion sont respectivement α et M , on décharge l'arbre en ramenant le couple M à 0. Nous allons montrer que *cette décharge est élastique en chaque point de l'arbre*. Pour cela notons $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}}$ le champ de contrainte purement élastique correspondant au couple M :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}} = \tau^{\text{el}} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \tau^{\text{el}} = \frac{\mu \alpha^{\text{el}} r}{h},$$

où α^{el} est l'angle de torsion élastique associé au couple M par (6.7) :

$$\alpha^{\text{el}} = \frac{Mh}{\mu I}, \quad I = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Pour justifier l'hypothèse d'une décharge purement élastique en tout point de l'arbre, il suffit de vérifier que le champ de contrainte qui en résulte, $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}}$ est *statiquement et plastiquement admissible* :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{res}} = \tau^{\text{res}} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \tau^{\text{res}} = \begin{cases} \frac{\mu \alpha r}{h} - \frac{Mr}{I}, & 0 \leq r \leq a, \\ k - \frac{Mr}{I}, & a \leq r \leq R. \end{cases}$$

Le champ de contrainte résiduelle est bilinéaire, comme indiqué sur la figure 6.3. On vérifie qu'il est en équilibre avec un couple de torsion nul (par construction, puisque $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{el}}$ sont en équilibre avec le même couple M), ce qui se traduit d'après (6.5) par :

$$\int_0^R \tau^{\text{res}}(r) r^2 dr = 0.$$

Ce champ est dans le domaine élastique du matériau en tout point r . En effet ses extremas sont atteints en $r = a$, (il s'agit alors d'un maximum positif) et en $r = R$ (minimum

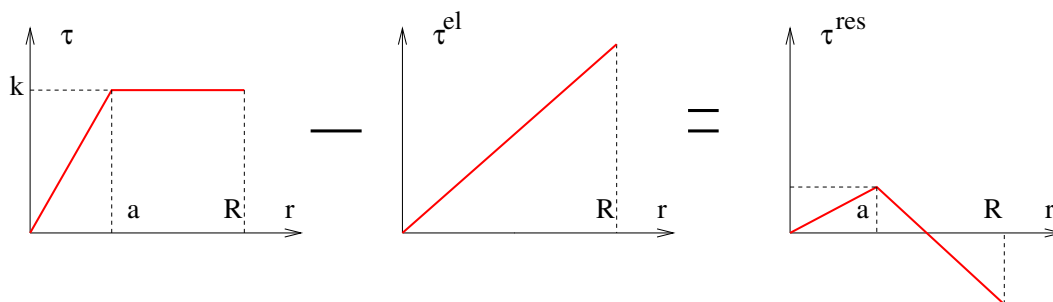


Fig. 6.3: contrainte résiduelle après décharge totale.

négatif) et ces extremas sont inférieurs à k (car $M > M_0$) et supérieurs à $-k$ (car $M < M^u$). La décharge en variable généralisée (couple de torsion variant de M à 0) se traduit donc, dans le cas présent, par une décharge élastique en tout point de l'arbre. Les champs de déplacement, de contrainte et de déformation plastique après décharge sont donc :

$$\underline{\xi}^{\text{res}} = \underline{\xi} - \underline{\xi}^{\text{el}}, \quad \underline{\sigma}^{\text{res}} = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}^{\text{el}}, \quad (\underline{\varepsilon}^{\text{P}})^{\text{res}} = \underline{\varepsilon}^{\text{P}},$$

où les champs $\underline{\xi}$, $\underline{\sigma}$ et $\underline{\varepsilon}^{\text{P}}$ sont les champs solution en A . Il était prévisible qu'il subsisterait après décharge un champ résiduel de déformations plastiques. En revanche, la présence d'un champ de contrainte résiduelle est un élément nouveau. Ces contraintes résiduelles, qui subsistent après décharge, doivent être prises en compte comme un état de contrainte initial dans le calcul de la suite de la vie de la structure.

6.2.3 Matériau à écrouissage cinématique

Régime élasto-plastique en charge. Nous reprenons le problème à partir du couple M_0 de première plastification, en considérant maintenant le cas d'un matériau à écrouissage cinématique linéaire, caractérisé par un module d'écrouissage $\underline{\underline{H}}$ dépendant d'un seul sca-

laire H sous la forme² $\underline{\underline{H}} = \frac{2}{3} \underline{\underline{H}} \underline{\underline{K}}$:

$$(\sigma - X)_{\text{eq}} \leq \sigma_0, \quad \underline{\underline{X}} = \frac{2}{3} \underline{\underline{H}} \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}. \quad (6.14)$$

Pour construire une solution au problème en régime élasto-plastique nous considérons comme précédemment qu'il existe un coeur élastique de rayon a entouré d'une zone plastique en forme de couronne. La forme (6.8) conduit à des champs de contrainte statiquement admissibles avec les données du problème et constitue un bon point de départ pour construire une solution au problème. Dans la zone élastique, on est ramené à résoudre le problème purement élastique de torsion (à nouveau la zone plastique n'exerce pas d'efforts sur la zone élastique en $r = a$). Les champs de vitesse et de contrainte sont donc totalement déterminés en zone élastique et donnés par (6.6). Le rayon a de la zone plastique s'obtient en écrivant que le critère de plasticité est atteint par la solution élastique à la frontière entre zone élastique et zone plastique. La déformation plastique est nulle en ces points et il s'agit donc de la même condition que dans le cas parfaitement plastique qui donne le même résultat pour a qu'en (6.10).

En zone plastique l'application du critère de plasticité ne donne pas immédiatement la solution en contrainte, contrairement au cas parfaitement plastique, puisque le critère (6.14) suppose connue la déformation plastique. Mais en nous inspirant du cas parfaitement plastique nous allons construire une solution en faisant l'hypothèse que le champ de déplacement est donné par (6.11) et que le champ de déformation plastique est de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}} = \varepsilon^{\text{P}}(r) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta). \quad (6.15)$$

²Une fois de plus le facteur $2/3$ est là pour qu'en traction simple le critère de plasticité s'écrive $|\sigma - H\varepsilon^{\text{P}}| \leq \sigma_0$

Par définition de la déformation plastique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^P = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{el}, \quad i.e. \quad \varepsilon^P(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\alpha r}{2h} - \frac{\tau(r)}{2\mu}, & a \leq r \leq R \end{cases}. \quad (6.16)$$

Les équations à satisfaire en zone plastique $a \leq r \leq R$ sont le critère de plasticité (6.14) et la règle de normalité. Compte tenu de la forme de $\underline{\underline{\sigma}}$ et de $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$, le critère de plasticité (6.14) s'écrit :

$$\left| \tau(r) - \frac{2}{3} H \varepsilon^P(r) \right| = k, \quad i.e. \quad \tau(r) - \frac{2}{3} H \left(\frac{\alpha r}{2h} - \frac{\tau(r)}{2\mu} \right) = \pm k.$$

On en déduit la distribution du cisaillement en zone plastique :

$$\tau(r) = \frac{\mu}{H + 3\mu} \left(\pm k + \frac{2}{3} H \frac{\alpha r}{2h} \right). \quad (6.17)$$

Il reste à montrer que l'on peut trouver un multiplicateur positif $\dot{\lambda}$ tel que la règle de normalité soit satisfaite. En notant que $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$ est un déviateur pur, cette règle s'écrit en général :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P = \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_0} \left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{2}{3} H \underline{\underline{\varepsilon}}^P \right).$$

Elle se réduit dans le cas présent à une égalité *scalaire* et non plus tensorielle :

$$\dot{\varepsilon}^P = \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_0} \left(\tau(r) - \frac{2}{3} H \varepsilon^P \right),$$

ou encore, compte tenu de (6.16) et (6.17) :

$$\frac{\dot{\alpha} r}{2h} = \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_0} \left(\tau(r) - \frac{2}{3} H \varepsilon^P \right) = \pm \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_0} k, \quad a \leq r \leq R. \quad (6.18)$$

Le multiplicateur $\dot{\lambda}$ défini par (6.18) est positif en charge, à condition de choisir $+k$ pour le signe laissé indéterminé, lorsque $\dot{\alpha}$ est positif. Nous avons donc construit une solution complète au problème d'évolution élasto-plastique donnée par (6.11) pour le champ de vitesse, (6.8) (6.17) pour le champ de contrainte et (6.15) (6.16) pour le champ de déformation plastique.

Relation moment-angle de torsion. Comme précédemment, le couple appliqué à l'arbre est

$$M = 2\pi \int_0^R \tau(r) r^2 dr,$$

et après un calcul algébrique sans difficulté, on obtient :

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu H}{H + 3\mu} \frac{\pi R^4}{2} \frac{\alpha}{h} + \frac{3\mu k}{2(H + 3\mu)} \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{\pi k^4 h^3}{2(H + 3\mu)\mu^2} \frac{1}{\alpha^3} \\ &= \frac{M_0}{1 + \chi} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^3 + \chi \frac{\alpha}{\alpha_0} \right), \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{H}{3\mu}. \end{aligned}$$

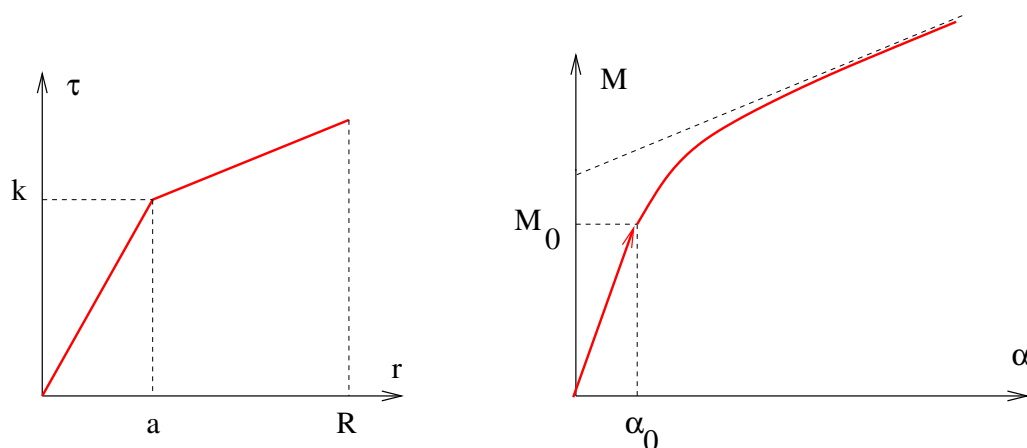


Fig. 6.4: Matériau à écrouissage cinématique linéaire. A gauche : répartition de la contrainte de cisaillement. A droite : courbe angle-moment de torsion.

La courbe angle de torsion-moment de torsion est représentée sur la figure 6.4. Après la première phase d'élasticité linéaire, cette courbe est non linéaire et devient asymptotiquement linéaire. On remarque en particulier que :

Lorsque le matériau constituant l'arbre est à écrouissage positif, le problème d'évolution élasto-plastique admet une solution quel que soit le couple de torsion M appliqué à l'arbre.

6.2.4 Premiers enseignements à tirer de l'étude de ce cas particulier.

Voici quelques enseignements généraux que nous pouvons tirer de l'étude du cas particulier de la torsion élasto-plastique. Commençons par le matériau élastique parfaitement plastique.

- Deux surfaces jouent un rôle privilégié dans l'espace des paramètres de chargement généralisés. La première surface est la *surface limite d'élasticité* qui correspond aux chargements pour lesquels se produit la première plastification. Tous les trajets de chargement à l'intérieur de cette surface conduisent à une réponse incrémentale élastique de la structure. Dans le cas de la torsion le domaine d'élasticité est l'intervalle $] - M_0, M_0[$. La seconde surface est la surface *extrémale* au delà de laquelle le problème n'admet plus de solution. Le long des trajets de chargement situé à l'intérieur de cette surface, il existe une solution au problème d'évolution élasto-plastique. Dans le cas particulier de la torsion le domaine en question est l'intervalle $] - M_\infty, M_\infty[$.
- Entre ces deux surfaces la réponse du système est du type *écrouissable*, c'est à dire non linéaire en général, même lorsque le matériau constitutif de la structure est parfaitement plastique. Dans le cas d'un chargement à un paramètre (comme la torsion) et en charge monotone, la réponse (M, α) est croissante.
- Lorsqu'on décharge la structure (M est ramené à 0 après un chargement ayant plastifié localement la structure) il subsiste non seulement des *déformations résiduelles*, comme le laissaient supposer les essais uniaxiaux homogènes, mais également des *contraintes résiduelles* (phénomène nouveau par rapport aux essais uniaxiaux).

Dans le cas du matériau à écoulement positif, les conclusions sont assez semblables sauf en ce qui concerne le premier point : quelle que soit l'intensité du chargement appliqué, le problème d'évolution admet une solution. La notion de surface extrême ne se justifie plus.

Ces conclusions ne sont en fait qu'indicatives et nécessitent d'être confirmées par des résultats plus précis.

6.3 Résultats généraux sur l'évolution des systèmes élasto-plastiques

H1 : Nous supposons que le problème *élastique linéaire* posé avec les mêmes données que le problème d'évolution élastoplastique qui nous intéresse admet une solution $(\underline{\xi}^{\text{el}}, \underline{\sigma}^{\text{el}})$, unique à un éventuel mouvement rigidifiant près pour le déplacement et fonction régulière du temps. Sans cette hypothèse, il est vain d'espérer résoudre un problème élastoplastique, dont le régime élastique est un cas particulier.

Cette hypothèse est satisfaite par exemple lorsque les données (forces de volume, conditions aux limites) sont des fonctions régulières du temps et lorsque le tenseur de raideur élastique $\underline{\underline{C}}$ et son inverse, le tenseur de souplesse $\underline{\underline{S}}$, sont définis positifs (voir les cours de P. le Tallec [1] ou J. Salençon [2]) :

Il existe des constantes α et β , strictement positives telles que

$$\forall \underline{\underline{e}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{e}} \geq \alpha \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}, \quad \forall \underline{\underline{\tau}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \quad \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\tau}} \geq \beta \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\tau}}. \quad (6.19)$$

$\mathbb{R}_s^{3 \times 3}$ désigne l'espace vectoriel des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur \mathbb{R}^3 .

6.3.1 Structure élasto-plastique à écoulement strictement positif

Le corps considéré est constitué d'un matériau élasto-plastique écoulement positif. On suppose de plus que

H2 : *l'écoulement est strictement positif.*

En d'autres termes $\underline{\underline{H}}$ est défini positif dans le cas de l'écoulement cinématique linéaire, et h est strictement positif dans le cas de l'écoulement isotrope³ :

$$\text{Écoulement cinématique} \quad : \quad \exists \gamma > 0 \quad \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{e}} \geq \gamma \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}} \quad \forall \underline{\underline{e}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3},$$

$$\text{Écoulement isotrope} \quad : \quad \exists \gamma > 0 \quad h(p) = \frac{dR}{dp}(p) \geq \gamma > 0 \quad \forall p \geq 0.$$

Alors :

Sous les hypothèses précédentes (H1 et H2) et en supposant les conditions initiales compatibles au sens de (6.1), le problème d'évolution quasi-statique d'une structure élastoplastique à écoulement positif admet une solution $(\underline{\xi}(\underline{x}, t), \underline{\sigma}(\underline{x}, t))$, $0 \leq t \leq T$. Le champ des contraintes est unique, le champ de déplacement l'est à un déplacement rigidifiant près compatible avec les données aux limites en déplacement.

³Dans le cas d'une structure hétérogène ces conditions doivent être satisfaites *uniformément* sur le corps.

6.3.2 Plasticité parfaite

6.3.2.1 Condition de charge sûre.

Comme nous l'avons vu dans le cas de la torsion, le problème d'évolution pour une structure élastique parfaitement plastique n'admet pas toujours une solution. Pour préciser les conditions d'existence de cette solution, rappelons la notion de *champ de contrainte statiquement admissible* :

$$\mathcal{S}(F, S_T, T^d) = \{ \underline{\underline{\sigma}}^*, \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^* + F = \underline{0} \text{ dans } \Omega, \quad \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = T^d \text{ sur } S_T. \} \quad (6.20)$$

Dans le problème d'évolution considéré le chargement dépend du temps, de sorte que l'espace des champs de contrainte statiquement admissibles dépend également du temps. Pour alléger les notations, nous le noterons simplement $\mathcal{S}(t)$, le chargement étant supposé connu.

La notion de *champ de contrainte plastiquement admissible* doit également être introduite. Un champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est plastiquement admissible si en tout point \underline{x} de la structure $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ est dans le domaine de plasticité $\mathbb{P}(\underline{x})$ en ce point :

$$\mathcal{P} = \{ \underline{\underline{\sigma}}^*, \text{ tel que } \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) \in \mathbb{P}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega. \} \quad (6.21)$$

La solution en contrainte du problème d'évolution élasto-plastique, si elle existe, est nécessairement statiquement et plastiquement admissible :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \in \mathcal{S}(t) \cap \mathcal{P}.$$

Une condition nécessaire d'existence d'une solution en contrainte est donc que l'ensemble $\mathcal{S}(t) \cap \mathcal{P}$ soit non vide. Une condition un peu plus forte assure l'existence de cette solution.

H3 : Il existe un champ de contrainte $\underline{\underline{\chi}}(\underline{x}, t)$ vérifiant :

$$\left. \begin{array}{l} \text{H3.1 : } \underline{\underline{\chi}}(\underline{x}, t) \in \mathcal{S}(t) \cap \mathcal{P}, \\ \text{H3.2 : } \text{Il existe un réel } \rho \text{ strictement positif, tel que la boule de centre } \underline{\underline{\chi}} \\ \text{et de rayon } \rho \text{ soit contenue dans } \mathcal{P} : \\ \exists \rho > 0, \text{ tel que } \underline{\underline{\chi}}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{\tau}} \in \mathcal{P} \quad \forall \underline{\underline{\tau}} \in \mathbb{R}_s^{3 \times 3}, \quad \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\tau}} \leq \rho^2, \\ \text{H3.3 : } \underline{\underline{\chi}}(\underline{x}, 0) = \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x}). \end{array} \right\} \quad (6.22)$$

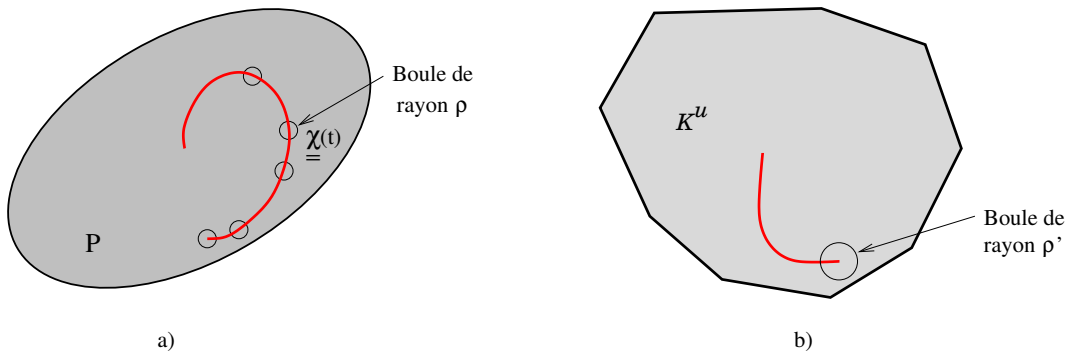


Fig. 6.5: Condition de charge sûre. a) Dans l'espace des contraintes. b) Dans l'espace des paramètres de chargement généralisés.

L'hypothèse H3.2 est souvent appelée condition de « charge sûre ».

Sous les hypothèses H1 et H3 et en supposant les conditions initiales compatibles au sens de (6.1), le problème d'évolution quasi-statique d'une structure élastique parfaitement plastique admet une unique solution en contrainte $\underline{\underline{\sigma}}(x, t), 0 \leq t \leq T$.

Commentaires.

1. Cet énoncé ne dit rien sur l'existence d'un champ de vitesse qui est un problème mathématique encore plus difficile que celui du champ de contrainte. On montre qu'il existe une, ou éventuellement plusieurs, solutions en vitesse $\underline{\underline{\xi}}$ associées au champ de contrainte par la loi de comportement, mais en un sens faible. Ces solutions peuvent de plus être *discontinues*, ce qui rend délicate l'écriture du tenseur vitesse de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}})$. Ce champ peut comporter des masses de Dirac sur certaines surfaces (c'est une mesure). Pour le critère de von Mises, ces discontinuités ne peuvent être que tangentielles (pas de discontinuité de la composante normale de la vitesse). Ce résultat mathématique est cohérent avec l'observation de lignes de glissement, assimilables à des lignes de discontinuité de vitesse ou de déplacement. Il ne s'agit donc pas d'une simple facétie du modèle mathématique. Observons toutefois que si le tenseur vitesse de déformation est une mesure, il prend une valeur infinie en certains points, ce qui est difficilement conciliable avec l'hypothèse HPP. On touche ici une première limite du modèle de la plasticité parfaite.

2. Comme le laisse penser le commentaire précédent, les solutions en vitesse du problème de plasticité parfaite ne sont pas uniques. Il arrive même que l'on puisse construire une infinité de solutions à certains problèmes bien spécifiques. C'est une différence supplémentaire entre le cas du matériau à écrouissage positif, qui se comporte bien sur le plan mathématique (existence et unicité de la solution quel que soit le chargement), et le matériau élastique parfaitement plastique (existence d'une solution sous condition sur le chargement et non unicité de la solution en vitesse). La prise en compte des termes d'accélération (évolution dynamique et non plus quasi-statique) assure l'unicité de la solution en vitesse. On touche ici une autre limite des approximations faites en plasticité parfaite, celle d'une évolution quasi-statique.

3. Dans l'exemple de la torsion élasto-plastique, on peut prendre comme champ $\underline{\underline{\chi}}$ un cisaillement pur constant :

$$\underline{\underline{\chi}} = \chi (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

qui est en équilibre avec le couple de torsion M à condition que $\chi = 3M/(2\pi R^3)$, comme on le déduit facilement de la relation (6.5). La condition de charge sûre est satisfaite dès que

$$\chi + \rho \leq k,$$

où ρ , strictement positif, peut être choisi arbitrairement petit (mais non nul). Il existe donc une unique solution en contrainte, *quel que soit le trajet parcouru par le chargement appliqué* tant que M reste strictement inférieur à M^u .

6.3.2.2 Paramètres généralisés de chargement.

Dans beaucoup de problèmes le chargement dépend d'un nombre fini de paramètres, dits *paramètres généralisés de chargement* $\underline{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$. A ces paramètres sont as-

6.3. RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR L'ÉVOLUTION DES SYSTÈMES ÉLASTO-PLASTIQUES

sociés des déplacements généralisés $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ (ou paramètres cinématiques généralisés) qui sont tels que la puissance des efforts extérieurs s'écrit :

$$\mathcal{P}_e = \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}.$$

Dans l'exemple de la torsion, le moment de torsion M joue le rôle de Q , la variable cinématique q associée étant l'angle de torsion α . Le contexte de chaque exemple permet d'identifier sans ambiguïté les paramètres \underline{Q} et les variables cinématiques \underline{q} associées.

La formalisation de cette notion peut se faire ainsi (J. Salençon [2]). Soit $\mathcal{S}(\underline{F}, S_{\underline{T}}, \underline{T}^d)$ l'espace des champs de contrainte statiquement admissibles et $\mathbb{C}(S_{\underline{\xi}}, \dot{\underline{\xi}}^d)$ l'espace des champs de vitesse cinématiquement admissibles.

Un chargement est défini par un nombre fini de paramètres de chargement s'il existe deux applications linéaires :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* \rightarrow \underline{Q}(\underline{\underline{\sigma}}^*) \in \mathbb{R}^N, \quad \underline{v}^* \rightarrow \dot{\underline{q}}(\underline{v}^*) \in \mathbb{R}^N,$$

telles que :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*) \, d\Omega = \underline{Q}(\underline{\underline{\sigma}}^*) \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}^*), \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{S}(\underline{F}, S_{\underline{T}}, \underline{T}^d), \quad \forall \underline{v}^* \in \mathbb{C}(S_{\underline{\xi}}, \dot{\underline{\xi}}^d) \quad (6.23)$$

Il arrive dans certaines applications que des champs de vitesse seulement différentiables par morceaux et *discontinus* sur une surface S soient de bons champs virtuels de vitesse. Pour de tels champs, la relation (6.23) prend alors la forme :

$$\int_{\Omega-S} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*) \, d\Omega + \int_S \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} \cdot \llbracket \underline{v}^* \rrbracket \, da = \underline{Q}(\underline{\underline{\sigma}}^*) \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}^*). \quad (6.24)$$

Condition de charge sûre dans l'espace des paramètres généralisés de chargement. La condition de charge sûre peut s'exprimer dans l'espace des chargements généralisés. Introduisons l'ensemble des chargements \underline{Q} *potentiellement supportables* :

$$\mathcal{K} = \{ \underline{Q}, \text{ tel que } \mathcal{S}(\underline{Q}) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset \} \quad (6.25)$$

Le calcul de \mathcal{K} fera l'objet du chapitre 8. La condition de charge sûre est satisfaite dès lors que le trajet de chargement $\{ \underline{Q}(t) \}$ reste strictement à l'intérieur de \mathcal{K} (figure 6.5b) :

$$\exists \rho' > 0, \text{ tel que } \underline{Q}(t) + \underline{Q}^* \in \mathcal{K} \quad \forall \underline{Q}^*, \quad \| \underline{Q}^* \| \leq \rho'.$$

6.3.2.3 Démonstration de l'unicité du champ de contrainte.

Commençons par un résultat préliminaire.

Soient $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$ deux champs statiquement admissibles avec le même chargement, $\dot{\underline{\xi}}^{(1)}$ et $\dot{\underline{\xi}}^{(2)}$ deux champs de vitesse cinématiquement admissibles avec les mêmes données en déplacement au bord :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}, \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}) \in \mathcal{S}(\underline{F}, S_{\underline{T}}, \underline{T}^d), \quad (\dot{\underline{\xi}}^{(1)}, \dot{\underline{\xi}}^{(2)}) \in \mathbb{C}(S_{\underline{\xi}}, \dot{\underline{\xi}}^d).$$

On a alors :

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}) : (\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(1)} - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(2)}) \, d\Omega = 0 \quad \text{où} \quad \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(i)} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(i)}). \quad (6.26)$$

Ce résultat se démontre en appliquant le théorème des puissances virtuelles (ou la formule de Green si l'on préfère) :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}) : (\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(1)} - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(2)}) \, d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot (\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(1)} - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(2)}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{T}}^{(1)} - \underline{\underline{T}}^{(2)}) \cdot (\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(1)} - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(2)}) \, da. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Le premier terme du second membre de cette égalité est nul car $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$ sont en équilibre avec les mêmes forces de volume, le second terme est également nul car les vitesses sont égales sur la partie du bord où elles sont prescrites tandis que les vecteurs contrainte sont égaux sur la partie complémentaire du bord.

Revenons à la preuve de l'unicité du champ de contrainte, lorsqu'il existe, pour les systèmes élastiques parfaitement plastiques. Supposons qu'il existe deux champs de contrainte différents $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(\underline{x}, t)$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}(\underline{x}, t)$ solutions du problème posé (même chargement, mêmes conditions initiales), associés à deux champs de vitesse $\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(1)}(\underline{x}, t)$ et $\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(2)}(\underline{x}, t)$ et deux champs de déformation plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}(1)}(\underline{x}, t)$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}(2)}(\underline{x}, t)$. Le principe de la dissipation plastique maximale donne, en chaque point \underline{x} et à chaque instant t :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}(1)} : (\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(1)}) \leq 0, \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}(2)} : (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}) \leq 0,$$

et par suite :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(1)}) : \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(1)} = (\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(1)}) : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(1)} + (\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(1)}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}(1)} \leq (\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(1)}) : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(1)},$$

de même, en échangeant les indices 1 et 2 :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}) : \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(2)} \leq (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}) : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(2)}.$$

Par addition des deux inégalités ainsi obtenues il vient :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}) : (\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(2)} - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(1)}) \leq (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(2)} - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(1)}).$$

Intégrons cette inégalité sur Ω . En vertu du résultat préliminaire, le premier membre de l'inégalité obtenue est nul et l'on obtient ainsi, à tout instant t :

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(1)} - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(2)}) \, d\Omega \leq 0,$$

inégalité que l'on peut intégrer entre 0 et τ , où τ est un instant quelconque dans $[0, T]$:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_0^\tau \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(1)} - \underline{\underline{\dot{\xi}}}^{(2)}) \, d\Omega \, dt \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(\tau) - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}(\tau)) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(\tau) - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}(\tau)) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(0) - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}(0)) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(0) - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}(0)) \, d\Omega. \end{aligned}$$

Les conditions initiales sont identiques : $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(0) = \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}(0)$. L'inégalité précédente se réduit donc à :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(\tau) - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}(\tau)) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(\tau) - \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}(\tau)) \, d\Omega \leq 0.$$

Par hypothèse le tenseur $\underline{\underline{S}}$ est défini positif en tout point et cette inégalité entraîne l'égalité des champs $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}(\tau)$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}(\tau)$ pour tout $\tau \in [0, T]$ et donc l'unicité du champ de contrainte solution.

6.4 Incompatibilité de la déformation plastique et contraintes résiduelles

6.4.1 Compatibilité géométrique

Les terminologies « déformation élastique » et « déformation plastique » pour désigner la partie élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}}$ et la partie plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}$ de la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont universellement adoptées (et nous avons donc suivi l'usage), mais trompeuses. Elles donnent en effet l'impression (fausse) que $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}$ sont de véritables *déformations* associées à des champs de déplacement cinématiquement admissibles. Il n'en est rien, puisque ni la définition de $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}$, ni celle de $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{el}}$ ne font intervenir de champ de déplacement.

En général la partie élastique et la partie plastique de la déformation ne dérivent pas d'un champ de déplacement.

Un champ $\underline{\underline{e}}$ de tenseurs du second ordre symétrique est *compatible* s'il vérifie deux conditions :

- Ce champ doit dériver d'un champ de déplacement : il s'agit de la condition de *compatibilité géométrique*.
- Le champ dont dérive le champ doit vérifier les conditions aux limites en déplacement du problème. Il s'agit d'une *compatibilité cinématique*.

Les conditions nécessaires (et suffisantes pour un domaine Ω simplement connexe) pour qu'un champ $\underline{\underline{e}}$ soit géométriquement compatible sont connues sous le nom de conditions de Riemann-Christoffel et s'écrivent (Salençon [2], P. le Tallec [1]) :

$$\frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_k \partial x_\ell} + \frac{\partial^2 e_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j \partial x_\ell} + \frac{\partial^2 e_{j\ell}}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (6.28)$$

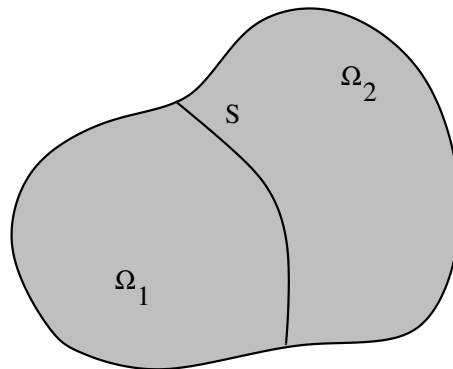


Fig. 6.6: Champ de déformation discontinu.

Ces conditions supposent le champ $\underline{\underline{e}}$ suffisamment différentiable pour que les termes écrits aient un sens. Dans le cas d'un champ $\underline{\underline{e}}$ régulier par morceaux (par exemple C^2 dans Ω_1 et Ω_2 (figure 6.6) mais discontinu à la traversée de la surface S qui sépare Ω_1 et Ω_2 , $\underline{\underline{e}}$ doit satisfaire la condition (6.28) dans Ω_1 et Ω_2 séparément, ce qui assure l'existence de champs de déplacement $\underline{\underline{\xi}}^{(1)}$ et $\underline{\underline{\xi}}^{(2)}$ dont dérive $\underline{\underline{e}}$ dans Ω_1 et Ω_2 , et une condition de compatibilité supplémentaire à la traversée de S qui exprime l'égalité de $\underline{\underline{\xi}}^{(1)}$ et $\underline{\underline{\xi}}^{(2)}$ sur S . Cette condition supplémentaire s'écrit :

$$\text{Il existe un champ } \underline{\underline{a}}(\underline{\underline{x}}) \text{ tel que } \llbracket \underline{\underline{e}} \rrbracket(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{a}}(\underline{\underline{x}}) \otimes_s \underline{\underline{n}}(\underline{\underline{x}}), \quad (6.29)$$

où la notation $\underline{\underline{a}} \otimes_s \underline{\underline{n}}$ désigne le produit tensoriel symétrique de $\underline{\underline{a}}$ et $\underline{\underline{n}}$:

$$\underline{\underline{a}} \otimes_s \underline{\underline{n}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{n}} + \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{a}}) \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\underline{\underline{a}} \otimes_s \underline{\underline{n}})_{ij} = \frac{1}{2} (a_i n_j + a_j n_i).$$

6.4.2 Contraintes résiduelles

Cette *incompatibilité* du champ de déformation plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$ est en tous points analogue à *l'incompatibilité des déformations thermiques* en thermoélasticité, à l'incompatibilité des déformations de transformation lorsqu'il y a transformation de phase dans le matériau, des déformations hygrométriques lorsqu'il y a gonflement par l'eau etc.....

L'incompatibilité est à l'origine des *contraintes résiduelles* dans les structures. En effet il faut ajouter à ce champ incompatible un autre champ (également incompatible) $\underline{\underline{\varepsilon}}^{el}$ qui rend compatible la somme des deux termes qui ne le sont pas, à la fois géométriquement et cinématiquement. Mais ce complément de déformation nécessaire pour atteindre la compatibilité géométrique et les conditions aux limites génère des contraintes $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{el}$.

Considérons par exemple un corps Ω soumis à un chargement nul mais où règne un champ de déformations plastiques $\underline{\underline{\varepsilon}}^P(\underline{\underline{x}})$. Les équations qui régissent les champs de contrainte et de déplacement dans Ω sont

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}} + {}^T \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}}) = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^P \text{ dans } \Omega, \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \text{ dans } \Omega, \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}} \text{ sur } \partial\Omega. \quad (6.30)$$

Si $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$ ne vérifie pas les équations de compatibilité, le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ ne peut être identiquement nul. Il est solution d'un problème d'élasticité linéaire où $\underline{\underline{\varepsilon}}^P(\underline{\underline{x}})$ joue le rôle d'un champ de déformation initiale (analogue à un champ de déformation thermique). On l'appelle *champ de contrainte résiduelle* et on le note $\underline{\underline{\sigma}}^{res}$. Les contraintes résiduelles sont associées à *l'élasticité* du matériau : si l'on néglige les déformations élastiques, les déformations plastiques deviennent compatibles et les contraintes résiduelles sont indéterminées.

6.5 Ecrouissage apparent en variables généralisées

Lorsque le chargement est prescrit au travers de variables de chargement généralisées $(\underline{\underline{q}}, \underline{\underline{Q}})$ il a été observé sur l'exemple de la torsion que la réponse en variables généralisées était croissante, c'est à dire vérifiait l'inégalité :

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\dot{q}}} \geq 0. \quad (6.31)$$

Il s'agit en fait d'un résultat général pour les structures élastoplastiques constituées d'un matériau élastique parfaitement plastique ou à écrouissage positif.

Afin d'établir ce résultat, remarquons tout d'abord que :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(t) \, d\Omega = \underline{Q}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t), \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(t + dt) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(t) \, d\Omega = \underline{Q}(t + dt) \cdot \underline{\dot{q}}(t),$$

et par différence :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}}(t) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(t) \, d\Omega = \underline{\dot{Q}}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t).$$

Par suite (en sous-entendant le temps t)

$$\underline{\dot{Q}}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P \, d\Omega. \quad (6.32)$$

Les deux derniers termes de cette égalité sont séparément positifs, l'un en raison de la positivité de $\underline{\underline{S}}$, l'autre en vertu des résultats (5.23) et (5.36) établis au chapitre précédent.

On a donc :

$$\underline{\dot{Q}}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t) \geq 0. \quad (6.33)$$

La relation (6.32) explique les différentes origines de *l'écrouissage de structure* qui est positif en vertu de (6.33).

1. Une première contribution est celle de l'écrouissage propre du matériau contenu dans le dernier terme de (6.32). Lorsque l'écrouissage du matériau est strictement positif, le terme $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P$ est strictement positif et (dans le cas d'un chargement à un paramètre) la courbe $Q(q)$ est strictement croissante avec une dérivée minorée par une quantité strictement positive. Elle n'a donc pas d'asymptote horizontale.
2. La seconde contribution à l'écrouissage de structure provient du terme $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ qui est toujours positif. Il est strictement positif tant qu'il y a évolution des contraintes. Cette évolution peut avoir deux origines.
 - La présence d'une zone élastique permet sous certaines conditions aux contraintes qui sont en dessous du seuil dans cette zone, d'augmenter. Cette forme d'écrouissage de structure s'accompagne d'une *extension de la zone plastique* (car inévitablement, les contraintes, en augmentant, se rapprochent du seuil).
 - Une autre forme d'évolution des contraintes est *la rotation des contraintes sur le seuil de plasticité*. Lorsque le problème n'est pas statiquement déterminé (c'est à dire lorsque les équations d'équilibre ne déterminent pas complètement l'état de contrainte) il reste au tenseur de contrainte la possibilité de se déplacer sur la surface seuil. Un exemple d'écrouissage de structure dû à la rotation des contraintes est donné dans l'exercice 2 ci-dessous.

6.6 Intégration numérique

Les exemples où la solution du problème d'évolution d'une structure élasto-plastique peut être déterminée analytiquement restent exceptionnels. Le recours aux méthodes numériques s'impose dans la grande majorité des cas. Il n'est pas de notre propos de faire un cours de Mécanique numérique (parmi de nombreuses références, on pourra se

reporter au cours [6] et aux ouvrages de Simo et Hughes [33] ou de Besson et coll. [32]) mais il peut être utile de décrire quels sont les arguments essentiels utilisés pour suivre numériquement cette évolution. Nous nous limiterons au cas du comportement élastique parfaitement plastique.

Un chargement est imposé à la structure sur un intervalle de temps $[0, T]$ à partir de conditions initiales connues en $t = 0$. Cet intervalle de temps est discrétisé en une suite de $N + 1$ temps discrets $t_0 = 0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = T$ qui sont les temps où une approximation des champs solutions va être déterminée selon un algorithme d'Euler implicite. L'intégration en temps de l'évolution de la structure élasto-plastique se fait pas à pas : supposant connus les champs solutions en $t = t_n$ on détermine (numériquement) ces champs en $t = t_{n+1}$. Pour alléger l'exposé les notations seront simplifiées : tous les champs en $t = t_n$ sont notés avec un exposant (n) , ainsi $\underline{\underline{\sigma}}^{(n)}$ et $\underline{\underline{\xi}}^{(n)}$ désignent les champs solutions en $t = t_n$, tandis que les champs en t_{n+1} ne sont pas affectés d'exposants, $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\xi}}$ désignant donc les champs inconnus en $t = t_{n+1}$.

Les champs $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\xi}}$ doivent être respectivement statiquement et cinématiquement admissibles avec les données à l'instant t_{n+1} :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(F(t_{n+1}), S_T, T^d(t_{n+1})), \quad \underline{\underline{\xi}} \in \mathbb{C} = \mathbb{C}(S_\xi, \xi^d(t_{n+1})).$$

Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ doit, de plus, être plastiquement admissible. En résumé il doit appartenir à l'ensemble des champs qui sont à la fois statiquement et plastiquement admissibles :

$$\mathcal{SP} = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}.$$

On note $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ et, pour une fonction f quelconque on pose $\Delta f = f(t_{n+1}) - f(t_n)$. La dérivée en temps de f dans l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ est approchée par le quotient :

$$\dot{f}(t) \simeq \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{t_{n+1} - t_n}.$$

En suivant cette discrétisation en temps, les équations de comportement s'écrivent après multiplication par Δt :

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} : \Delta \underline{\underline{\sigma}} + \Delta \lambda \underline{\underline{N}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \underline{\underline{N}}(\underline{\underline{\sigma}}) : (\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in P, \quad \Delta \lambda \geq 0. \quad (6.34)$$

Nous ignorons si le passage de t_n à t_{n+1} se fait en régime élastique ou en régime plastique. Il est donc naturel de calculer ce que serait la réponse purement élastique de la structure entre t_n à t_{n+1} , en partant de $\underline{\underline{\sigma}}^{(n)}$ et de tester le statut de cette réponse par rapport à la plasticité : si le champ de contrainte obtenu (nécessairement statiquement admissible car il est solution d'un problème d'élasticité) est plastiquement admissible, c'est la solution du problème et il est inutile de chercher plus loin. Si la réponse élastique entre t_n à t_{n+1} ne conduit pas à un champ plastiquement admissible une modification de ce champ doit être effectuée. Le champ de contrainte correspondant à une réponse élastique de la structure entre t_n et t_{n+1} est noté $\underline{\underline{\sigma}}_T$ (T pour champ test). Il est défini par les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_T &= \underline{\underline{\sigma}}^{(n)} + \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\sigma}}, & \underline{\underline{\xi}}_T &= \underline{\underline{\xi}}^{(n)} + \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\xi}}, \\ \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{C}} : \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\varepsilon}}, & \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\underline{\varepsilon}} (\Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\xi}}), \\ \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\sigma}} &\in \mathcal{S}(\Delta F, S_T, \Delta T^d), & \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\xi}} &\in \mathbb{C}(S_\xi, \Delta \xi^d). \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

On vérifie sans difficulté que $\underline{\underline{\sigma}}_T \in \mathcal{S}$ et $\underline{\underline{\xi}}_T \in \mathbb{C}$. Le résultat principal de cette section, sur lequel s'appuie l'intégration numérique de l'évolution des champs solution dans une structure élastoplastique, est le suivant :

Propriété : *Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ solution du problème élasto-plastique est la projection du champ test élastique $\underline{\underline{\sigma}}_T$ sur l'ensemble \mathcal{SP} des champs de contrainte statiquement et plastiquement admissibles, au sens du produit scalaire défini par le tenseur d'élasticité $\underline{\underline{S}}$.*

Cet énoncé appelle quelques explications.

- Tout d'abord l'espace vectoriel des champs de contrainte sur le corps Ω peut être muni du produit scalaire défini par le tenseur d'élasticité $\underline{\underline{S}}$ en posant :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{S}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) \, d\Omega. \quad (6.36)$$

Les propriétés de symétrie et de positivité de $\underline{\underline{S}}$ font que la forme bilinéaire ci-dessus définit une norme sur l'espace vectoriel des champs de contrainte (équivalente à la norme $L^2(\Omega)$ de ces champs).

- Les champs de contrainte plastiquement admissibles forment un ensemble convexe \mathcal{P} . Cet ensemble est fermé (dans l'espace des champs de contrainte dont toutes les composantes sont L^2) pour la topologie définie par le produit scalaire (6.36). Les champs statiquement admissibles forment un espace affine, donc convexe, \mathcal{S} . On montre également que \mathcal{S} est fermé dans l'espace des champs de contrainte dont les composantes sont L^2 (la démonstration fait appel à la théorie des distributions). L'ensemble \mathcal{SP} est donc un sous-ensemble convexe fermé de l'espace vectoriel des champs de contrainte sur Ω dont les composantes sont L^2 , car intersection de deux sous ensembles convexes fermés de cet espace.
- Considérons un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. Soit K un ensemble convexe et fermé dans cet espace vectoriel. On peut définir sans ambiguïté la projection Πx de tout point $x \in V$ sur K comme l'unique point de K minimisant la distance de x à K

$$\text{dist}(x, K) = \inf_{x^* \in K} \|x - x^*\|.$$

On montre sans difficulté que Πx a la propriété *caractéristique* suivante illustrée sur la figure (6.7) :

$$\langle x - \Pi x, x^* - \Pi x \rangle \leq 0 \quad \forall x^* \in K. \quad (6.37)$$

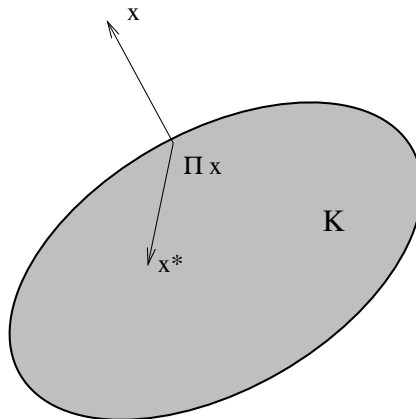


Fig. 6.7: Projection sur un ensemble convexe.

La propriété énoncée plus haut doit donc être comprise en prenant pour V l'espace des champs de contrainte de carré intégrable sur Ω , pour convexe K le convexe \mathcal{SP} , pour produit scalaire la forme bilinéaire (6.36) et pour point x le champ test $\underline{\underline{\sigma}}_T$. La propriété se traduit donc par l'inégalité :

$$\int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}}_T - \underline{\underline{\sigma}} \right) : \underline{\underline{S}} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}} \right) d\Omega \leq 0 \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{SP}. \quad (6.38)$$

Avant de donner la preuve de cette inégalité, remarquons que la propriété en question donne un algorithme de détermination de $\underline{\underline{\sigma}}$. Partant de l'état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(n)}$, qui est statiquement admissible avec le chargement à l'instant t_n et plastiquement admissible, et connaissant l'incrément de chargement entre les instant t_n et t_{n+1} , on calcule tout d'abord l'incrément de contrainte purement élastique $\Delta^{\text{el}}\underline{\underline{\sigma}}$, qui s'obtient par résolution du problème d'élasticité linéaire (6.35). Puis on ajoute cet incrément élastique au champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(n)}$ existant à l'instant t_n pour obtenir un champ test $\underline{\underline{\sigma}}_T$. Enfin on projette⁴ ce champ test sur les champs statiquement et plastiquement admissibles à l'instant t_{n+1} . On voit ainsi que bien que les équations de la plasticité soient nettement différentes de celles de l'élasticité, la solution du problème élastique (6.35) est une étape essentielle dans la construction de la solution élasto-plastique. On observe également que la projection prend soin automatiquement du critère de charge et décharge (dès que la solution élastique pointe vers l'intérieur de P la projection est égale au résultat de cette prédiction élastique).

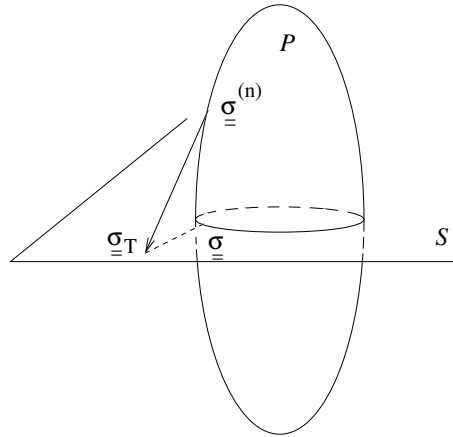


Fig. 6.8: La solution en contrainte est la projection sur les champs statiquement et plastiquement admissibles du champ test $\underline{\underline{\sigma}}_T$.

Preuve de (6.38). Soit $\underline{\underline{\sigma}}^*$ un champ dans \mathcal{SP} . Puisque ce champ est plastiquement admissible on a, d'après la forme discrétisée (6.34) de la loi de comportement :

$$\int_{\Omega} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}} \right) d\Omega \leq \int_{\Omega} \Delta \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}} \right) d\Omega \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{P}. \quad (6.39)$$

Par ailleurs puisque les champs $\underline{\underline{\sigma}}^*$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ sont tous deux dans \mathcal{S} la formule de Green donne :

$$\int_{\Omega} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}} \right) d\Omega = \int_{S_{\xi}} \Delta \underline{\underline{\xi}}^d \cdot \left(\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}} \right) \cdot \underline{\underline{n}} da \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{S}, \quad (6.40)$$

⁴Cette projection ne s'obtient pas analytiquement, mais par itérations successives en projetant alternativement sur \mathcal{S} et sur \mathcal{P} jusqu'à convergence.

6.7. CONCLUSION

et donc

$$\int_{S_\xi} \Delta \underline{\xi}^d \cdot (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n} \, da \leq \int_{\Omega} \left(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^{(n)} \right) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) \, d\Omega \quad \forall \underline{\sigma}^* \in \mathcal{S}. \quad (6.41)$$

Par ailleurs, puisque les champs $\underline{\sigma}^*$ et $\underline{\sigma}$ sont tous deux dans \mathcal{S} , la formule de Green donne :

$$\int_{\Omega} \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\varepsilon}} : (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) \, d\Omega = \int_{S_\xi} \Delta \underline{\xi}^d \cdot (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n} \, da \quad \forall \underline{\sigma}^* \in \mathcal{S}, \quad (6.42)$$

mais, en vertu de la définition de $\underline{\sigma}_T$:

$$\int_{\Omega} \Delta^{\text{el}} \underline{\underline{\varepsilon}} : (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\underline{\sigma}_T - \underline{\sigma}^{(n)} \right) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) \, d\Omega. \quad (6.43)$$

Il résulte alors de (6.41), (6.42) et (6.43) que :

$$\int_{\Omega} \left(\underline{\sigma}_T - \underline{\sigma}^{(n)} \right) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) \, d\Omega \leq \int_{\Omega} \left(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^{(n)} \right) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) \, d\Omega \quad \forall \underline{\sigma}^* \in \mathcal{SP}. \quad (6.44)$$

L'inégalité (6.38) s'en déduit immédiatement.

6.7 Conclusion

Nous avons considéré dans ce chapitre les problèmes d'évolution de structures élasto-plastiques standards. Les résultats d'existence de solution sont différents dans le cas de la plasticité parfaite et dans celui de la plasticité avec écrouissage. En plasticité parfaite, il existe une condition de *charge sûre* qui doit être respectée pour que le problème admette une solution. Lorsque c'est le cas, la solution en contrainte est unique. Lorsque le matériau présente un écrouissage strictement positif il existe une solution unique en contrainte et déplacement (éventuellement à un déplacement de corps rigide près).

La réponse en variables généralisées $(\underline{q}, \underline{Q})$ d'une structure élasto-plastique standard est de type écrouissable. L'origine de cet écrouissage de structure s'explique par l'écrouissage propre du matériau, par l'extension de la zone plastique et par la rotation des contraintes sur la surface de plasticité.

Sur le plan physique, une notion nouvelle par rapport à l'élasticité, celle de *champ de contrainte résiduelle*, s'introduit naturellement dans les structures élasto-plastiques. Elle est associée à l'*incompatibilité* du champ de déformation plastique. C'est une notion essentielle pour comprendre la durée de vie d'une structure.

Formules et résultats essentiels

- **Problème d'évolution d'une structure élasto-plastique**

- ▷ On suppose que le problème élastique est bien posé.
- ▷ En plasticité parfaite : *sous une condition de charge sûre* existence et unicité d'un champ de contrainte, existence d'un champ de vitesse (éventuellement discontinu).
- ▷ Pour un matériau à écrouissage strictement positif : existence et unicité d'un champ de contrainte et d'un champ de déplacement (éventuellement à un champ rigidifiant près).

- **Incompatibilité de la partie plastique de la déformation**

- ▷ Un champ \underline{e} est compatible si :
 - il existe un champ de déplacement $\underline{\xi}$ tel que $\underline{e} = \underline{\varepsilon}(\underline{\xi})$,
 - ce champ $\underline{\xi}$ est cinématiquement admissible avec les données du problème.
- ▷ Le champ de déformation plastique n'est pas compatible en général. Ceci crée des *contraintes résiduelles*.

- **Variables généralisées de chargement**

- ▷ Définies par deux applications linéaires :

$$\underline{\sigma}^* \rightarrow \underline{Q}(\underline{\sigma}^*) \in \mathbb{R}^N, \quad \underline{v}^* \rightarrow \underline{\dot{q}}(\underline{v}^*) \in \mathbb{R}^N,$$

telles que :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}(\underline{v}^*) \, d\Omega = \underline{Q}(\underline{\sigma}^*) \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}^*), \quad \forall \underline{\sigma}^* \in \mathcal{S}(\underline{F}, \underline{S}_T, \underline{T}^d), \quad \forall \underline{v}^* \in \mathbb{C}(\underline{S}_{\xi}, \underline{\xi}^d)$$

- ▷ La réponse $(\underline{Q}, \underline{q})$ d'une structure élasto-plastique (avec écrouissage positif ou nul) est de type écrouissable :

$$\underline{\dot{Q}}(t) \cdot \underline{\dot{q}}(t) \geq 0.$$

6.8 Exercices

Exercice 1. Système de trois barres. On considère le système de trois barres représenté sur la figure 6.9. Les barres ont même section S et sont composées du même matériau élastique parfaitement plastique de module d'Young E et de limite élastique σ_0 (les barres seront traitées comme des structures unidimensionnelles). La barre centrale a pour longueur ℓ . Un déplacement vertical $q\mathbf{e}_z$ est imposé au point A et on note $Q\mathbf{e}_z$ la résultante des efforts appliqués en ce point. Le déplacement q est augmenté de façon monotone à partir de 0. L'état initial du système est l'état naturel sans contrainte ni déformation plastique initiale.

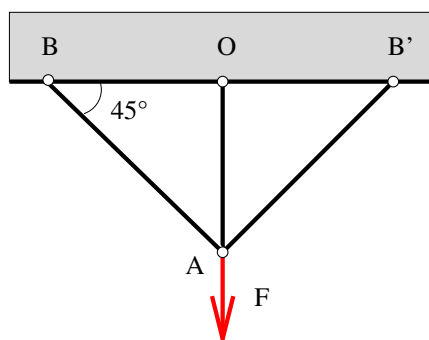


Fig. 6.9: Système de 3 barres

1^o) Exprimer la déformation des barres AB , AB' , AO en fonction de q et ℓ . Puis déterminer la réponse élastique du système de 3 barres ainsi que la charge de première plastification.

2^o) Déterminer la réponse élasto-plastique du système dans un diagramme (q, Q) et la charge maximale Q^u supportable par la structure.

Exercice 2. Etirement d'une tôle élasto-plastique en déformation plane. L'étiement en déformations planes est une situation que l'on peut rencontrer par exemple lors du laminage. La tôle occupe un parallélépipède

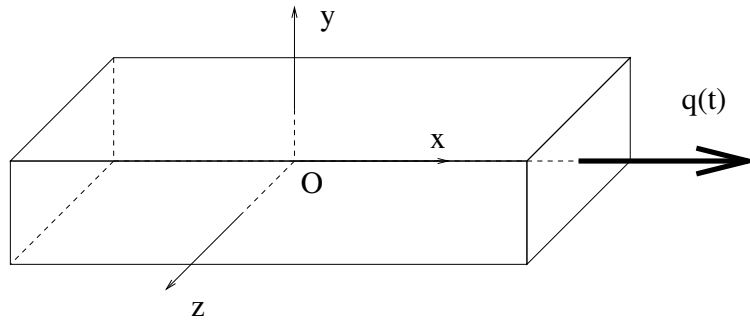
$$\Omega = \{-\ell \leq x \leq +\ell, -h \leq y \leq +h, -L \leq z \leq +L\}.$$

Les conditions aux limites qui lui sont appliquées sont :

$$\left. \begin{array}{lll} x = -\ell : & \xi_x = 0, & T_y = 0, \quad T_z = 0, \\ x = +\ell : & \xi_x = q(t), & T_y = 0, \quad T_z = 0, \\ y = \pm h : & T_x = 0, & T_y = 0, \quad T_z = 0, \\ z = \pm L : & T_x = 0, & T_y = 0, \quad \xi_z = 0. \end{array} \right\} \quad (6.45)$$

La tôle est constituée d'un matériau homogène et isotrope. Les forces de volume et les variations de température sont nulles, l'état initial de la tôle est l'état naturel sans contrainte. Le trajet de chargement considéré consiste à augmenter le déplacement $q(t)$ de façon monotone à partir de 0. Les états de contrainte et de déformation sont homogènes dans le corps et les déformations sont planes :

$$\xi_x = \xi_x(x, y, t), \quad \xi_y = \xi_y(x, y, t), \quad \xi_z(x, y, z, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$



On pose :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{q}{2\ell}.$$

Les seuls champs de contrainte homogènes statiquement admissibles avec les données sont de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z, t) = \sigma_{xx}(t)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_{zz}(t)\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z, \quad (6.46)$$

Le matériau constituant la tôle est élastique parfaitement plastique standard. On note E , ν son module d'Young et son coefficient de Poisson. Deux cas seront envisagés selon que le comportement plastique du matériau est régi par le critère de Tresca ou par le critère de Von Mises.

1⁰) **Régime élastique et première plastification.** Montrer qu'en régime élastique, σ_{xx} et σ_{zz} s'expriment en fonction de ε_{xx} par

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{zz} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2} \varepsilon_{xx}.$$

Préciser, pour les critères de Tresca et de Von Mises, la valeur de σ_{xx} à la première plastification. On notera σ_{xx}^e et ε_{xx}^e la valeur de cette contrainte et de la déformation correspondante, pour chaque critère.

2⁰) **Régime élastoplastique.** On ne considère ici que le matériau de Von Mises. Etablir à l'aide de la condition de déformation plane et de la loi de comportement, et plus particulièrement de la condition de charge, l'égalité :

$$\dot{\varepsilon}_{xx}\dot{\sigma}_{xx} = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_{xx}^2 + \dot{\sigma}_{zz}^2 - 2\nu\dot{\sigma}_{xx}\dot{\sigma}_{zz}). \quad (6.47)$$

En déduire que $\dot{\varepsilon}_{xx}$ et $\dot{\sigma}_{xx}$ sont toujours de même signe. Pour le chargement considéré où $\dot{\varepsilon}_{xx} > 0$, montrer que σ_{xx} admet une limite lorsque ε_{xx} tend vers $+\infty$.

Pour déterminer l'état de contrainte (σ_{xx} , σ_{zz}) le long du trajet de chargement on effectue le changement de variables :

$$\sigma_{xx} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right), \quad \sigma_{zz} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right). \quad (6.48)$$

Vérifier à l'aide des « relations utiles » et du critère de Von Mises, la pertinence de ce changement de variables. Déduire de l'égalité (6.47) et des « relations utiles », une relation entre ε_{xx} et θ valable tout au long du trajet de charge plastique. Décrire la démarche qui permettrait de déterminer (σ_{xx} , σ_{zz}) le long du trajet de chargement considéré pour toute

6.8. EXERCICES

valeur positive de ε_{xx} . Commenter l'allure de la courbe σ_{xx} en fonction de ε_{xx} . Commenter le cas du critère de Tresca.

Relations utiles :

$$\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}, \quad (6.49)$$

$$\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}, \quad (6.50)$$

$$\int \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx = \text{Log}\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right|. \quad (6.51)$$

Éléments de réponse.

Régime élastique et première plastification. a) Compte tenu de la forme simple du champ de contrainte solution, la loi de comportement s'écrit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx}. \quad (6.52)$$

La condition de déformation plane, $\varepsilon_{zz} = 0$, entraîne $\sigma_{zz} = \nu\sigma_{xx}$. Les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont alors

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2}\varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{zz} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}\varepsilon_{xx}. \quad (6.53)$$

Critère de Tresca. Les contraintes principales sont (en ordre croissant) :

$$\sigma_1 = \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_{zz} = \nu\sigma_{xx}, \quad \sigma_3 = \sigma_{xx},$$

et le critère de Tresca s'écrit $|\sigma_{xx}| \leq \sigma_0$. La première plastification a donc lieu lorsque $\sigma_{xx} = \sigma_0$. On a donc, pour le critère de Tresca :

$$\sigma_{xx}^e = \sigma_0, \quad \varepsilon_{xx}^e = \frac{(1 - \nu^2)}{E}\sigma_{xx}^e.$$

Critère de Von Mises. Le déviateur des contraintes associé à un champ de contrainte dont les seules composantes non nulles sont σ_{xx} et σ_{zz} s'écrit :

$$\underline{\underline{s}} = \left(\frac{2\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{3}\right)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{3}\right)\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \left(\frac{2\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{3}\right)\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z,$$

et

$$\sigma_{\text{eq}} = (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{zz})^{1/2}.$$

La surface seuil décrite par le critère de von Mises $\sigma_{\text{eq}} = \sigma_0$ est, dans les axes σ_{xx}, σ_{zz} , une ellipse d'équation :

$$\sigma_{xx}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{zz} = \sigma_0^2. \quad (6.54)$$

En régime élastique $\sigma_{zz} = \nu\sigma_{xx}$, et $\sigma_{\text{eq}} = (1 - \nu + \nu^2)^{1/2}\sigma_{xx}$. La première plastification de la tôle constituée d'un matériau de Von Mises se produit lorsque $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^e$ avec

$$\sigma_{xx}^e = \frac{\sigma_0}{(1 - \nu + \nu^2)^{1/2}}.$$

Cette valeur est supérieure à σ_0 car $(1 - \nu + \nu^2) \leq 1$. De plus $\varepsilon_{xx}^e = \frac{(1 - \nu^2)}{E}\sigma_{xx}^e$.

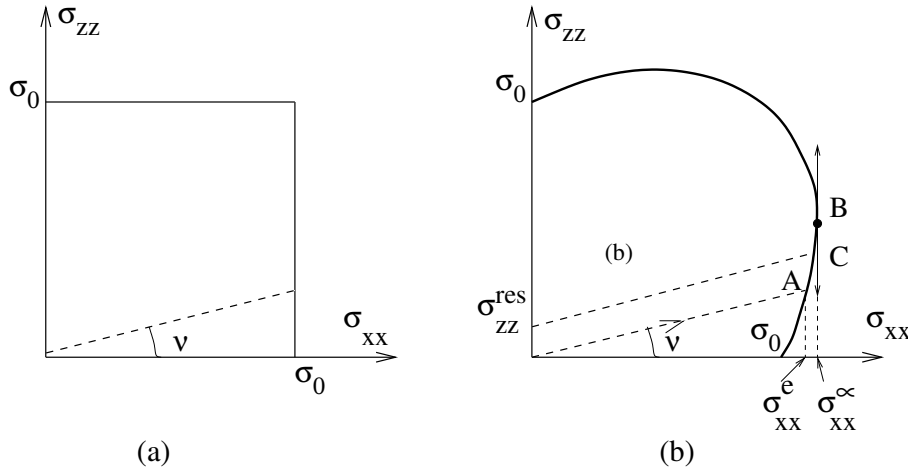


Fig. 6.10: Surface de plasticité. (a) : critère de Tresca. (b) critère de von Mises. Trajet de chargement élastique de O à A , puis élasto-plastique de A à B . Décharge élastique à partir du point C et apparition de contraintes résiduelles selon z .

Régime élasto-plastique. En régime élasto-plastique, il a été remarqué en 5.23) que :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P(t) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}(t) = 0.$$

Par conséquent

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}(t) = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{el}(t) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}(t). \quad (6.55)$$

Pour un état de contrainte de la forme (6.46) et un état de déformation plane dans la direction z , le membre de gauche de (6.55) se réduit à $\dot{\varepsilon}_{xx}\dot{\sigma}_{xx}$. Quant au membre de droite, la partie élastique de la déformation est donnée par

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{el} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}, \quad i.e. \quad \dot{\varepsilon}_{xx}^{el} = \frac{1}{E}\dot{\sigma}_{xx} - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{zz}, \quad \dot{\varepsilon}_{zz}^{el} = -\frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{xx} + \frac{1}{E}\dot{\sigma}_{zz}.$$

On remarque au passage que $\dot{\varepsilon}_{zz}^{el}$ est non nulle alors que $\dot{\varepsilon}_{zz}$ est nulle (la partie élastique de la déformation n'est pas un état de déformation plane). Il vient alors :

$$\dot{\varepsilon}_{xx}\dot{\sigma}_{xx} = \frac{1}{E}(\dot{\sigma}_{xx}^2 + \dot{\sigma}_{zz}^2 - 2\nu\dot{\sigma}_{xx}\dot{\sigma}_{zz}) = \frac{1}{E}\left[(\dot{\sigma}_{xx} - \nu\dot{\sigma}_{zz})^2 + (1 - \nu^2)\dot{\sigma}_{zz}^2\right] \geq 0. \quad (6.56)$$

$\dot{\sigma}_{xx}$ et $\dot{\varepsilon}_{xx}$ sont donc de même signe. Lorsque $\dot{\varepsilon}_{xx} \geq 0$, σ_{xx} est donc une fonction croissante du temps. Le comportement élastique parfaitement plastique étant indépendant de l'échelle de temps adoptée, on peut prendre, lorsque $\dot{\varepsilon}_{xx} \geq 0$, ε_{xx} comme échelle de temps, et comprendre $\dot{\sigma}_{xx}$ comme $\frac{d\sigma_{xx}}{d\varepsilon_{xx}}$. σ_{xx} est donc une fonction croissante de ε_{xx} . Cette fonction croissante est majorée (car le point $(\sigma_{xx}, \sigma_{zz})$ reste sur une ellipse) et admet donc une limite σ_{xx}^∞ lorsque ε_{xx} tend vers $+\infty$. Puisque σ_{xx} admet une limite lorsque ε_{xx} tend vers $+\infty$, il en est de même pour σ_{zz} d'après le critère de von Mises $f(\sigma_{xx}, \sigma_{zz}) = 0$. Par ailleurs, puisque σ_{xx} admet une limite, sa dérivée $\dot{\sigma}_{xx}$, qui est positive, tend nécessairement vers 0. Il en est de même pour $\dot{\sigma}_{zz}$ comme on peut le voir sur la première égalité de (6.56). Par conséquent la vitesse de déformation élastique tend vers 0 et la vitesse de déformation totale se réduit, asymptotiquement à la vitesse de déformation plastique. La condition de déformation plane $\dot{\varepsilon}_{zz} = 0$ se traduit alors par $\dot{\varepsilon}_{zz}^P = 0$ et donc $s_{zz} = 0$. On a alors $\sigma_{xx}^\infty = 2\sigma_{zz}^\infty$ et d'après le critère $\sigma_{xx}^\infty = 2\sigma_0/\sqrt{3}$. Le point représentatif de l'état de contrainte sur l'ellipse (6.54) est le point B.

6.8. EXERCICES

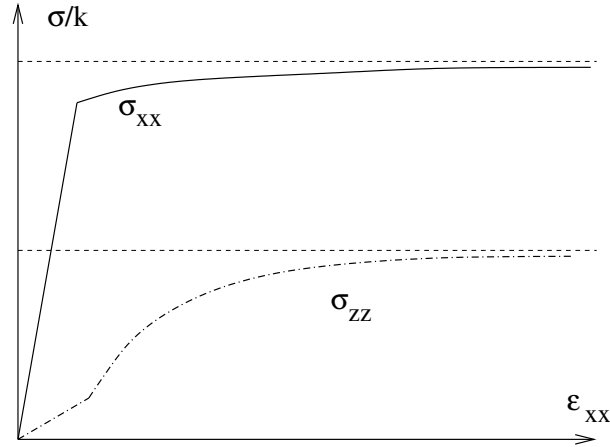


Fig. 6.11: Contraintes σ_{xx} et σ_{zz} en fonction d'allongement de la tôle.

Le changement de variables (6.48) proposé par l'énoncé est une paramétrisation de l'ellipse de Von-Mises d'équation (6.54), comme on le vérifie aisément à l'aide de la première des « relations utiles ».

Avec ce changement de variables, l'égalité (6.56) devient :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} \dot{\theta} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sigma_0 \dot{\theta}^2 \sqrt{3}E \left[\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 2\nu \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \right]. \quad (6.57)$$

Compte tenu de la seconde des « relations utiles », (6.57) devient :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}E} \dot{\theta} \left[\frac{3}{4\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)} + (1 - 2\nu) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \right]. \quad (6.58)$$

(6.58) s'intègre, grâce à la dernière des « relations utiles », en

$$F(\varepsilon_{xx}, \theta) = \text{constante}, \quad (6.59)$$

où

$$F(\varepsilon_{xx}, \theta) = \varepsilon_{xx} - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}E} \left[\frac{3}{4} \text{Log} \left| \text{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right| + (1 - 2\nu) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \right]. \quad (6.60)$$

La constante peut être déterminée au tout début du régime élasto-plastique. On a alors $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^e$ et θ est trouvé en résolvant l'équation :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^e, \quad \text{i.e.} \quad \theta = \theta^e = \text{Arcsin} \left(\frac{\sqrt{3}}{2(1 - \nu + \nu^2)^{1/2}} \right) - \frac{\pi}{6}.$$

La démarche permettant de calculer l'état de contrainte (σ_{xx} , σ_{zz}) le long du trajet de chargement est la suivante :

- i) calcul de σ_{xx}^e et ε_{xx}^e ,
- ii) si $\varepsilon_{xx} \leq \varepsilon_{xx}^e$, la solution est (6.53), si $\varepsilon_{xx} \geq \varepsilon_{xx}^e$, on calcule la constante intervenant dans (6.59) :

$$\text{constante} = F(\varepsilon_{xx}^e, \theta^e).$$

- iii) θ est déterminé en fonction de ε_{xx} à l'aide de (6.59) et (6.60). (σ_{xx} , σ_{zz}) s'en déduisent par (6.48).

La courbe $(\sigma_{xx}, \varepsilon_{xx})$ présente un écrouissage apparent dû à la différence entre la contrainte de première plastification σ_{xx}^e et la contrainte d'écoulement σ_{xx}^∞ . Cet écrouissage est assez paradoxal à première vue puisqu'on étudie un matériau élastique parfaitement plastique dans lequel il n'y a pas coexistence d'une zone élastique et d'une zone plastique, le champ de contrainte y étant homogène. Lorsque la contrainte σ_{xx} est augmentée au delà de σ_{xx}^e la tôle est entièrement plastifiée mais conserve la possibilité d'augmenter l'énergie élastique qui y est stockée. L'écrouissage est ainsi dû, non pas à la « consommation » d'une zone élastique (réserve d'élasticité), comme c'est le cas en « écrouissage de structure » (cf les exemples de la torsion et de la flexion d'une barre), mais à un réarrangement des contraintes conduisant à une augmentation de l'énergie élastique stockée. Au delà de σ_{xx}^e , le point représentatif de l'état de contrainte dans le plan $(\sigma_{xx}, \sigma_{zz})$ n'effectue plus un trajet radial, mais demeure sur l'ellipse de Von Mises en parcourant l'arc d'ellipse AB. L'écrouissage apparent est ici une conséquence de la condition de déformation plane.

Compléments. D'autres remarques de même nature peuvent être faites. Par exemple, si la tôle est déchargée à partir d'un point C situé sur l'arc d'ellipse AB, la décharge signifiant ici que la déformation est diminuée, jusqu'à annuler la contrainte σ_{xx} , cette décharge est purement élastique et il subsiste une contrainte résiduelle σ_{zz} après décharge. Cette contrainte résiduelle n'est, là encore, pas due à l'existence d'une zone élastique au point de chargement C, puisque toute la tôle est alors plastifiée. Elle est due à l'incompatibilité des déformations plastiques avec les conditions cinématiques du problème. Les déformations plastiques étant constantes dans la tôle sont en effet géométriquement compatibles. Mais, du fait de la condition d'incompressibilité, elles ne respectent pas la condition cinématique imposée $\varepsilon_{zz} = 0$. Des déformations élastiques, génératrices de contraintes résiduelles, sont nécessaires pour que la déformation totale vérifie cette condition.

Chapitre 7

Thermodynamique des Processus Irréversibles

Introduction et cadre de travail...

La déformation d'un milieu continu est une transformation thermodynamique particulière qui doit s'opérer en accord avec les deux principes de la Thermodynamique. Cette déformation peut s'accompagner de phénomènes irréversibles, comme la plasticité ou l'endommagement. L'évolution de ces phénomènes irréversibles se fait dans le cadre général de la *Thermodynamique des Processus Irréversibles (TPI)* qui fixe des limites aux échanges de chaleur et d'énergie mécanique des systèmes physiques.

Ce chapitre présente les deux principes de la Thermodynamique pour les milieux déformables, avec une attention particulière portée aux *phénomènes irréversibles*. Ces principes permettent de dégager les deux volets d'une loi de comportement mécanique :

1. Les *lois d'état* définissent les forces thermodynamiques disponibles pour faire avancer les phénomènes irréversibles.
2. Les *lois complémentaires* décrivent l'avancement de ces phénomènes irréversibles en fonction des forces thermodynamiques correspondantes.

Pour les *matériaux standards généralisés* chacune de ces lois dérive d'un potentiel. Les lois d'état dérivent de *l'énergie libre* du matériau, tandis que les lois complémentaires dérivent de son *potentiel de dissipation*.

Un autre aspect du comportement d'un milieu déformable est son comportement thermique. La loi de Fourier s'applique assez largement dans les matériaux courants. Le couplage entre champ de température et champs mécaniques est analysé. La dissipation d'origine mécanique apparaît comme une source de chaleur qui affecte, parfois significativement, le champ de température dans un corps déformable.

7.1 Les principes de la Thermodynamique

Commençons par quelques notations et définitions classiques de Thermodynamique.

- ▷ *Les systèmes thermodynamiques* qui nous intéressent ici sont des ensembles de particules qui échangent de la masse, de la chaleur et du travail mécanique avec

l'extérieur.

- ▷ Un système est dit *fermé* s'il n'échange pas de masse avec l'extérieur, *mécaniquement isolé* s'il n'échange pas de travail avec l'extérieur, et *thermiquement isolé* s'il n'échange pas de chaleur avec l'extérieur. Nous ne considérerons que des systèmes fermés.
- ▷ Un système est *en équilibre* si son état ne dépend pas du temps t .
- ▷ Les systèmes thermodynamiques pour lesquels se pose un problème d'évolution présentent plusieurs états d'équilibre, voire une infinité. Un *processus thermodynamique* est la transition d'un état \mathcal{E}_1 du système à un autre état \mathcal{E}_2 sous l'action des échanges de chaleur et de travail avec l'extérieur. Il se caractérise par un trajet dans l'espace des états.
- ▷ Un processus est *réversible* si, lorsqu'on renverse le temps, le chemin parcouru dans l'espace des états est inverse de celui parcouru dans le processus initial. Sinon il est dit *irréversible*.
- ▷ Un processus est *adiabatique* si aucune chaleur n'est échangée avec l'extérieur au cours de ce processus.
- ▷ On appelle *variables d'état*, tout ensemble de variables $\underline{\chi}$ dont la connaissance suffit à déterminer complètement l'état d'équilibre du système.
- ▷ Les variables d'état sont *a priori* définies à l'équilibre. Nous ne considérerons dans la suite que des processus suffisamment lents pour que la validité du paramétrage des états d'équilibre du système s'étende aux états *hors équilibre*. C'est le cas pour des évolutions qui peuvent être considérées comme des successions d'états d'équilibre¹.
- ▷ Nous distinguerons les *systèmes discrets* (ou systèmes homogènes) pour lesquels les variables d'état sont uniformes sur tout le système, des *milieux continus* ou *systèmes distribués* pour lesquels les variables d'état dépendent de la position de la particule $\underline{\chi} = \underline{\chi}(\underline{x}, t)$.

7.1.1 Premier principe de la Thermodynamique.

Le premier principe de la Thermodynamique est un bilan d'énergie exprimant la possibilité de transformation de chaleur en énergie mécanique

7.1.1.1 Rappels de thermostatique

Premier principe : 1. A tout état \mathcal{E} d'un système homogène on peut associer un scalaire E (énergie interne). La variation d'énergie interne dans le passage d'un état \mathcal{E}_1 à un état \mathcal{E}_2 est donnée par

$$\Delta E = \mathcal{T} + \mathcal{Q}, \quad (7.1)$$

¹Lorsque ce n'est pas le cas, le paramétrage par les variables d'état peut être étendu à l'aide de la notion *d'état d'équilibre accompagnant* : au voisinage de l'état du système en évolution, il existe une position d'équilibre dont les variables d'état sont bien définies et servent, par convention, à repérer le système en évolution.

7.1. LES PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

où \mathcal{T} est le travail reçu par le système au cours de la transformation et \mathcal{Q} la quantité de chaleur reçue.

2. L'énergie interne est une fonction additive d'ensemble (ou grandeur extensive) : l'énergie interne de la réunion de deux systèmes disjoints est la somme des énergies internes des deux systèmes pris séparément.

3. Il est toujours possible de trouver une transformation adiabatique permettant de passer d'un état quelconque \mathcal{E}_1 du système à un autre état \mathcal{E}_2 quelconque.

Remarquons que l'énergie interne est définie à une constante additive près, puisque seules les différences d'énergie entre 2 états sont données par la loi (7.1). Mentionnons également deux conséquences du dernier point énoncé :

- Le long du trajet adiabatique mentionné au point 3 on a donc $\Delta E = \mathcal{T}$. On dispose ainsi d'un moyen (au moins théoriquement) de mesure des variations d'énergie interne du système à partir d'une mesure du travail mécanique fourni le long de ce trajet. On accède donc à son énergie interne en prenant un état de référence pour le niveau 0.
- Une fois connue la variation d'énergie interne entre les deux états, la quantité de chaleur reçue le long de tout autre trajet entre ces deux mêmes états peut être mesurée par $\mathcal{Q} = \Delta E - \mathcal{T}$.

7.1.1.2 Premier principe pour un système fermé en évolution

Considérons dans un premier temps un système homogène en évolution thermodynamique quasi-statique, suffisamment lente pour que les effets d'inertie soient négligeables. En considérant les deux états d'équilibre du système à t et à $t+dt$, le premier principe (7.1) peut être écrit sous forme incrémentale

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_{cal}, \quad (7.2)$$

\mathcal{P}_e et \mathcal{P}_{cal} étant les puissances mécanique et calorifique reçues par le système à l'instant t .

Considérons maintenant un système en évolution thermodynamique quelconque. Le premier principe peut être généralisé en tenant compte de l'énergie cinétique du système dans le bilan (7.2) qui devient alors :

$$\frac{d}{dt} (E + \mathcal{C}) = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_{cal}. \quad (7.3)$$

E désigne l'énergie interne du système, \mathcal{C} son énergie cinétique, \mathcal{P}_e la puissance des efforts extérieurs et \mathcal{P}_{cal} la puissance calorifique reçue.

7.1.1.3 Premier principe pour un milieu continu

Un milieu continu est un *système distribué* (par opposition à un système discret) en ce sens qu'il est constitué d'une distribution d'une infinité de particules. Ce système occupe à l'instant t un domaine $\Omega(t)$. Pour un tel système, la propriété d'additivité de l'énergie interne se traduit par l'existence d'une *densité* d'énergie interne que nous prendrons pour des raisons de commodité par unité de masse (et non de volume). Cette densité spécifique²

²Spécifique signifie « par unité de masse ».

e fournit l'énergie interne totale du système par intégration :

$$E = \int_{\Omega(t)} \rho(\underline{x}, t) e(\underline{x}, t) \, d\Omega.$$

L'équation de conservation de la masse pour un système fermé a pour conséquence la règle de dérivation suivante pour toute fonction F définie par une densité spécifique f^3 :

$$F(t) = \int_{\Omega(t)} \rho f(\underline{x}, t) \, d\Omega, \quad \frac{dF}{dt}(t) = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{df}{dt} \, d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho \dot{f} \, d\Omega. \quad (7.4)$$

Appliquée à l'énergie interne cette relation donne :

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega(t)} \rho \dot{e} \, d\Omega.$$

Classiquement l'énergie cinétique du système s'écrit :

$$C = \int_{\Omega(t)} \frac{1}{2} \rho |\underline{v}|^2 \, d\Omega, \quad \underline{v} = \underline{\dot{\xi}}.$$

Les puissances calorifiques et mécaniques échangées avec l'extérieur peuvent être mises sous la forme

$$\mathcal{P}_{cal} = \int_{\Omega(t)} r \, d\Omega - \int_{\partial\Omega(t)} \underline{q} \cdot \underline{n} \, da, \quad \mathcal{P}_e = \int_{\Omega(t)} \underline{F} \cdot \underline{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \underline{T} \cdot \underline{v} \, da.$$

r est la densité volumique de taux de chaleur reçue, provenant par exemple de réactions chimiques, tandis que \underline{q} est le vecteur flux de chaleur échangé avec l'extérieur.

Le principe des puissances virtuelles appliqué au mouvement réel (qui exprime un bilan de quantité de mouvement et qu'on ne confondra pas avec un bilan d'énergie) s'écrit

$$\frac{dC}{dt} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_e, \quad \text{où } \mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega(t)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}) \, d\Omega,$$

où $\underline{\underline{d}}(\underline{v})$ est la vitesse de déformation écrite en configuration eulérienne⁴.

Le principe des puissances virtuelles permet de simplifier l'expression du premier principe en :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} \rho \dot{e} \, d\Omega &= \int_{\Omega(t)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega(t)} r \, d\Omega - \int_{\partial\Omega(t)} \underline{q} \cdot \underline{n} \, da \\ &= \int_{\Omega(t)} [\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}) - \text{div } \underline{q} + r] \, d\Omega. \end{aligned}$$

Cette égalité s'applique au corps Ω dans son ensemble. On peut reprendre à l'identique le raisonnement ci-dessus *pour tout système* $\omega(t)$ *inclus dans* $\Omega(t)$ et constitué de particules

³Nous emploierons indifféremment la notation df/dt ou \dot{f} pour désigner la dérivée *particulière* d'une fonction $f(\underline{x}, t)$.

⁴L'opérateur $\underline{\underline{d}}$ est mathématiquement identique à l'opérateur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dont l'usage est classiquement réservé aux petites transformations. Les développements en cours sur la configuration eulérienne du système sont valables sans hypothèse de petites perturbations, ce qui explique le choix des notations. Lorsque le moment de faire l'hypothèse HPP sera venu, nous identifierons $\underline{\underline{d}}(\underline{v})$ à $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

7.1. LES PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

qu'on suit dans leur mouvement (ω est ainsi un système fermé). Par suite on a également, quel que soit le sous-domaine ω de Ω :

$$\int_{\omega} \rho \dot{e} \, d\Omega = \int_{\omega} [\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}) - \operatorname{div} \underline{q} + r] \, d\omega,$$

Le système ω étant quelconque, il vient, en tout point \underline{x} du corps considéré :

$$\rho \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}) - \operatorname{div} \underline{q} + r. \quad (7.5)$$

Cette équation, dite *équation de conservation de l'énergie*, exprime l'origine des variations d'énergie interne du corps, qui se composent d'un terme de puissance mécanique des efforts intérieurs $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}$ et d'un terme de puissance calorifique $\operatorname{div} \underline{q} - r$, les conventions de signe étant telles qu'on compte positivement les quantités reçues par le système. Elle est l'analogue au niveau local de (7.1).

7.1.2 Second principe de la Thermodynamique

Le second principe de la Thermodynamique introduit les notions de température, d'entropie et la distinction entre transformations réversibles et irréversibles.

7.1.2.1 Rappels de thermostatique

Les systèmes considérés dans ce paragraphe sont homogènes. Une définition intuitive de la température est introduite au sens suivant. Soient deux systèmes homogènes A et B séparés par une membrane adiabatique (qui permet les échanges mécaniques mais pas les échanges de chaleur) et en équilibre thermodynamique. A et B sont dits en *équilibre thermique* si, lorsqu'on retire la paroi, les deux systèmes demeurent dans le même état d'équilibre. On définit ainsi une classe d'équivalence entre systèmes thermodynamiques. Deux systèmes appartenant à la même classe d'équivalence sont par définition à la même *température*. En fixant un système pour référence (un thermomètre!) on définit ainsi la température (dite température empirique⁵) de tout autre système dans la même classe d'équivalence. Le zéro de la température est donc arbitraire et on le choisit de façon telle que la température est toujours positive.

Un processus *isotherme* est un processus au cours duquel la température reste constante à chaque instant.

Second principe pour un processus isotherme : 1. *A tout état \mathcal{E} d'un système homogène on peut associer un scalaire S (entropie) tel que la variation d'entropie dans tout processus isotherme à température T faisant passer d'un état \mathcal{E}_1 à un état \mathcal{E}_2 vérifie :*

$$S_2 - S_1 \geq \frac{Q}{T}, \quad (7.6)$$

où Q est la quantité de chaleur reçue au cours du processus.

2. *L'entropie S est une fonction additive d'ensemble.*

⁵Il existe d'autres définitions de la température. Pour Carathéodory, mathématicien connu pour sa contribution à la théorie de la mesure et à l'analyse fonctionnelle, l'inverse de la température est le facteur intégrant qui transforme la puissance calorifique reçue en forme différentielle lors d'une évolution réversible : $T\dot{S} = \mathcal{P}_{cal}$. Pour Boltzmann, physicien célèbre pour ses contributions à la théorie cinétique des gaz, la température d'un gaz est proportionnelle à l'énergie cinétique d'agitation des molécules qui le composent.... Dans bien des problèmes de l'ingénieur la température empirique suffit.

Processus réversibles. Considérons le cas particulier d'un processus réversible. Le processus inverse du processus envisagé est également isotherme (puisque l'on parcourt le chemin inverse d'un chemin isotherme dans l'espace des états). On doit donc avoir pour ce processus inverse

$$S_1 - S_2 \geq -\frac{Q}{T}, \quad \text{ou inversement} \quad S_2 - S_1 \leq \frac{Q}{T},$$

ce qui joint à (7.6) montre que, *pour un processus réversible, il y a égalité dans (7.6)*.

Second principe pour des systèmes en évolution isotherme lente. Dans le cas d'un système en évolution assez lente pour que les notions introduites (température, entropie) puissent s'étendre à des systèmes hors équilibre (en adoptant par exemple la température et l'entropie d'un état d'équilibre immédiatement voisin), la relation (7.6) pour un processus isotherme se traduit par

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{\mathcal{P}_{cal}}{T}.$$

Second principe pour des systèmes non homogènes. Le second point de l'énoncé du second principe (additivité) permet de considérer le cas d'un système A formé de sous-systèmes A_i chacun ayant une température propre T_i . Si le processus subi par A est tel que chacun des sous-systèmes suit un chemin isotherme, on a

$$S_2 - S_1 \geq \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i}, \quad (7.7)$$

où S est l'entropie totale du système (égale à la somme des entropies des sous-systèmes par additivité) Q_i désigne la quantité de chaleur reçue de l'extérieur par chaque sous-système.

7.1.2.2 Second principe pour un milieu continu

Le second principe pour un milieu continu s'énonce ainsi :

Toute évolution d'un milieu continu fermé se fait en respectant l'inégalité :

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\Omega} \frac{r}{T} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{q \cdot n}{T} da. \quad (7.8)$$

Comme précédemment on montre qu'il y a égalité dans (7.8) dans le cas d'un processus réversible.

La propriété d'additivité de l'entropie permet d'écrire l'entropie totale d'un milieu continu à l'aide de sa densité spécifique s :

$$S = \int_{\Omega(t)} \rho s d\Omega.$$

L'équation de conservation de la masse pour les systèmes fermés (7.4) permet d'écrire :

$$\frac{dS}{dt} = \int_{\Omega(t)} \rho \dot{s} d\Omega.$$

Le second principe s'écrit donc :

$$\int_{\Omega(t)} \rho \dot{s} d\Omega \geq \int_{\Omega} \frac{r}{T} d\Omega - \int_{\partial\Omega(t)} \frac{q \cdot n}{T} da = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{r}{T} - \operatorname{div} \frac{q}{T} \right] d\Omega. \quad (7.9)$$

7.2. THERMODYNAMIQUE ET LOIS DE COMPORTEMENT

Le système $\Omega(t)$ pouvant être en fait remplacé par un sous ensemble quelconque de particules (suivies dans leur mouvement), le second principe prend une forme locale :

$$\rho \dot{s} \geq \frac{r}{T} - \operatorname{div} \frac{\underline{q}}{T},$$

ou encore (en notant que la température a été choisie positive) :

$$\rho T \dot{s} + \operatorname{div} \underline{q} - \frac{\underline{q} \cdot \nabla T}{T} - r \geq 0. \quad (7.10)$$

Le premier membre de cette inégalité est la dissipation totale :

$$\mathcal{D} = \rho T \dot{s} + \operatorname{div} \underline{q} - \frac{\underline{q} \cdot \nabla T}{T} - r,$$

qui doit donc être positive en vertu du second principe.

7.1.3 Inégalité de Clausius-Duhem et dissipation intrinsèque

L'énergie libre spécifique du système est définie par :

$$w = e - Ts$$

de sorte qu'en éliminant $\operatorname{div} \underline{q} - r$ entre (7.5) et (7.10) on obtient :

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}) - \rho (\dot{w} + s\dot{T}) - \frac{\underline{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0. \quad (7.11)$$

C'est l'inégalité de Clausius-Duhem.

Le premier membre de (7.11) qui représente la dissipation totale se décompose en la *dissipation intrinsèque* \mathcal{D}_1 et la *dissipation thermique* \mathcal{D}_2 :

$$\mathcal{D}_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}) - \rho (\dot{w} + s\dot{T}), \quad \mathcal{D}_2 = -\frac{\underline{q} \cdot \nabla T}{T}. \quad (7.12)$$

Hypothèse de découplage des dissipations. L'inégalité de Clausius-Duhem exprime la positivité de la dissipation totale \mathcal{D} . Celle-ci se compose de deux termes correspondant à des phénomènes dissipatifs de nature physique différente, mécaniques dans le cas de \mathcal{D}_1 et thermique dans le cas de \mathcal{D}_2 . Il est raisonnable d'imposer à ces deux dissipations d'être séparément positives, ce qui assurera que leur somme est positive.

Dans toute la suite du chapitre nous imposerons aux deux dissipations d'être séparément positives :

$$\mathcal{D}_1 \geq 0, \quad \mathcal{D}_2 \geq 0. \quad (7.13)$$

7.2 Thermodynamique et lois de comportement

L'objet de cette section est d'examiner les restrictions apportées par les deux principes de la Thermodynamique aux lois de comportement des matériaux solides. Pour simplifier nous nous placerons dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Cette hypothèse a deux conséquences :

1. Les transformations géométriques sont infinitésimales. En particulier nous confondrons le tenseur vitesse de déformation $\underline{\underline{d}}(\underline{v})$ et la vitesse du tenseur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$.
2. Les variations de température sont faibles par rapport à la température d'équilibre de référence que nous supposons uniforme :

$$T(\underline{x}, t) = T_0 + \theta(\underline{x}, t), \quad \theta(\underline{x}, t) \ll T_0. \quad (7.14)$$

7.2.1 Variables d'état normales. Lois d'état.

Puisque nous nous intéressons aux milieux déformables, une variable d'état incontournable est le champ de déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$. Mais dans bien des cas, la seule connaissance de la déformation ne suffit pas à définir complètement l'état du milieu.

Examinons le cas de la plasticité uniaxiale. L'état complet du matériau n'est pas défini par la seule connaissance de ϵ . Il faut par exemple y ajouter la déformation plastique ϵ^P . Dans ce contexte uniaxial, lorsque ϵ et ϵ^P sont connues, on en déduit la déformation élastique $\epsilon^{el} = \epsilon - \epsilon^P$ puis la contrainte $\sigma = E\epsilon^{el}$. L'état (mécanique) (σ, ϵ) du système est alors complètement connu. Remarquons que le système de variables d'état n'est pas unique. Nous aurions pu prendre pour variables d'état σ et ϵ^P .

En plus des variables d'état repérant l'état mécanique du milieu, il faut d'autres variables d'état décrivant les échanges de chaleur à l'intérieur du milieu déformable. Ces variables doivent contenir au moins la température T ou l'entropie s .

Le système de variables permettant de décrire sans ambiguïté l'état d'un système thermodynamique n'est donc pas unique. Helmholtz a introduit une notion qui permet de réduire l'éventail des choix possibles. Un système de variables d'état est ainsi dit *système de variables normales* si

1. La température fait partie des variables d'état.
2. Les autres variables d'état χ sont telles qu'on peut imposer des variations arbitraires de température au système en maintenant les autres variables d'état figées, à puissance des efforts intérieurs nulle :

$$\dot{T} \text{ arbitraire}, \quad \dot{\chi}_i = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{P}_{int} = 0. \quad (7.15)$$

Postulat d'Helmholtz. *Nous supposons que les systèmes thermodynamiques étudiés admettent au moins un système de variables normales.*

Exemple : Prenons le cas d'un gaz parfait. Outre la température, les variables d'état possibles sont la pression p du gaz ou sa masse volumique ρ (liée à son volume V par $\rho = m/V$). La puissance des efforts intérieurs vaut :

$$\mathcal{P}_{int} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = p \underline{\underline{id}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = p \operatorname{div} \underline{v} = -p \dot{\rho} / \rho.$$

Si p et T sont choisies comme variables d'état, une variation de température à pression constante entraîne une variation de volume et donc une variation de densité : la puissance des efforts intérieurs est non nulle. *Le système (p, T) n'est pas un système de variables normales.*

Si en revanche on choisit comme variables d'état ρ et T , la puissance des efforts intérieurs sera nulle lorsque ρ sera figées, quelles que soient les variations de température. *Le système (ρ, T) est un système de variables normales.*

Commentaires.

1. Le point délicat du postulat d'Helmholtz est qu'on peut trouver un dispositif extérieur permettant de bloquer l'état du système (les variables $\boldsymbol{\chi}$) *sans que cela coûte au système extérieur*. En effet, si les variations de température à variables figées peuvent se faire avec $\mathcal{P}_{ext} = 0$, le principe des puissances virtuelles $\mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext} = 0$ entraînera $\mathcal{P}_{int} = 0$ et réciproquement.

2. Dans le cas d'un milieu déformable général l'expression de la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \, d\Omega$ lève l'ambiguïté sur le choix entre $\underline{\underline{\epsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ comme variable d'état. C'est en choisissant la déformation (et non la contrainte) qu'on pourra faire des variations de température à variables d'état figées et à puissance des efforts intérieurs nulle.

3. On verra dans quelques lignes que ce qui importe dans le postulat d'Helmholtz n'est pas l'amplitude des variations de température (qui peuvent être faibles), mais le fait qu'elles puissent être positives et négatives.

Conséquence du postulat d'Helmholtz. Un système de variables d'état normales comportera donc, d'après le commentaire 2 qui précède, la déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$. Mais selon le type de comportement considéré, ce système de variables devra aussi contenir d'autres variables mécaniques $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ dites *variables internes*⁶. La dénomination variables internes ou *variables cachées* provient de ce que ces variables sont parfois plus difficiles à mesurer que la déformation, directement accessible à la mesure. Ces variables internes peuvent décrire des phénomènes réversibles comme une transformation de phase (α désigne alors la fraction volumique d'une des phases), mais le plus souvent elles décrivent des *phénomènes irréversibles* prenant place dans le milieu continu considéré (plasticité, endommagement...). L'ensemble des variables d'état mécaniques est noté $\boldsymbol{\chi} = (\underline{\underline{\epsilon}}, \boldsymbol{\alpha})$.

Choisissons pour le corps étudié un système de variables normales $(T, \boldsymbol{\chi})$. L'énergie libre w du corps est une fonction de ces variables. Elle représente l'énergie stockée dans le corps. La dissipation intrinsèque s'exprime par :

$$\mathcal{D}_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \rho \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\chi}}(T, \boldsymbol{\chi}) \dot{\boldsymbol{\chi}} - \rho \left(\frac{\partial w}{\partial T}(T, \boldsymbol{\chi}) + s \right) \dot{T} \geq 0. \quad (7.16)$$

Plaçons nous dans un état $(T, \boldsymbol{\chi})$ et effectuons des variations de température (positives et négatives) en figeant les variables d'état $\boldsymbol{\chi}$. La déformation, qui fait partie des variables d'état normales, est figée et le premier terme dans (7.16) s'annule. Il en est de même du second terme puisque $\dot{\boldsymbol{\chi}} = 0$. Au cours de transformations qui se réduisent à des variations de température le second principe s'écrit donc :

$$-\rho \left(\frac{\partial w}{\partial T}(T, \boldsymbol{\chi}) + s \right) \dot{T} \geq 0, \quad (7.17)$$

et ceci indépendamment du signe de \dot{T} . On en déduit que le terme entre parenthèses dans (7.17) est nul et que l'entropie s dérive de l'énergie libre w du système par :

$$s = - \frac{\partial w}{\partial T}(T, \boldsymbol{\chi}). \quad (7.18)$$

⁶Chacune des variables internes $\boldsymbol{\alpha}_i$ peut être tensorielle, mais d'un ordre différent d'une variable à l'autre. C'est la raison pour laquelle nous notons ces variables en gras, sous-entendant qu'il peut s'agir de variables tensorielles, sans en préciser l'ordre.

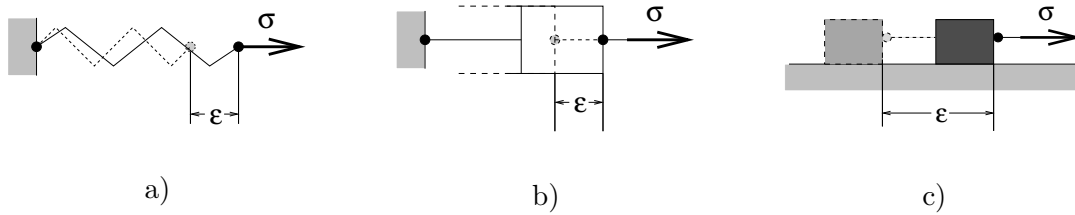


Fig. 7.1: Modèles rhéologiques. a) Ressort élastique. b) Amortisseur. c) Frotteur.

C'est l'équation de Gibbs du système. Cette équation entraîne que le dernier terme de (7.16) est identiquement nul. Afin d'aboutir à l'expression finale de la dissipation intrinsèque nous introduisons les définitions suivantes, qui constituent avec (7.18), les lois d'état du système :

$$\text{Lois d'état : } \underline{\underline{\sigma}}^{\text{rev}} = \rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathcal{A} = -\rho \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (7.19)$$

$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{rev}}$ est appelée *partie réversible* des contraintes. \mathcal{A} est la *force thermodynamique* associée à la variable interne $\boldsymbol{\alpha}$. S'il y a plusieurs variables internes, $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N)$, il y a plusieurs forces associées définies par : $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N)$ avec

$$\mathcal{A}_i = -\rho \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}_i}(T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha}).$$

On introduit également la *partie irréversible* des contraintes en posant :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\text{rev}}, \quad (7.20)$$

Avec ces notations, la positivité de la dissipation intrinsèque s'exprime par l'inégalité :

$$\mathcal{D}_1 = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \mathcal{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0, \quad \mathcal{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{i=1}^N \mathcal{A}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i \quad (7.21)$$

On peut mettre cette inégalité sous une forme symbolique faisant apparaître des « forces » \mathbf{X} et des « vitesses » \mathbf{Y} :

$$\mathcal{D}_1 = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \geq 0, \quad \mathbf{X} = (\underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}}, \mathcal{A}), \quad \mathbf{Y} = (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}). \quad (7.22)$$

7.2.1.1 Exemples : modèles rhéologiques

Les modèles rhéologiques (figure 7.1) illustrent de façon simple les notions de variable d'état, d'énergie libre et de dissipation intrinsèque. Ils guident également l'intuition pour généraliser un modèle unidimensionnel en loi tridimensionnelle. Ces modèles sont des assemblages, en série, en parallèle ou en pont de Wheastone d'éléments simples : ressort, amortisseur, frotteur, représentés sur la figure 7.1. Tous ces modèles sont étudiés sans tenir compte des effets thermiques (variation de température ou échanges de chaleur).

Modèles élémentaires. Les lois de comportement des modèles élémentaires sont

$$\begin{aligned} \text{Ressort} & : \sigma = E\varepsilon, & \text{amortisseur} & : \sigma = \mu\dot{\varepsilon}, \\ \text{frotteur} & : |\sigma| \leq \sigma_0, & \dot{\varepsilon} & = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma| < \sigma_0, \\ \dot{\lambda} \frac{\sigma}{\sigma_0} = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma) & \text{si } |\sigma| = \sigma_0, \quad \dot{\lambda} \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

E est la raideur du ressort, μ la viscosité de l'amortisseur et σ_0 le seuil de frottement du frotteur.

7.2. THERMODYNAMIQUE ET LOIS DE COMPORTEMENT

Pour décrire l'état de chacun des modèles élémentaires ci-dessus, une seule variable d'état suffit. Nous choisisons la déformation ε car il s'agit d'une variable normale. Il n'y a donc pas de variable interne pour les modèles élémentaires.

L'énergie libre d'un modèle est l'énergie stockée dans le système lorsque les variables d'état sont prescrites. Dans le cas des modèles élémentaires, seul le ressort élastique stocke de l'énergie, les autres modèles étant purement dissipatifs.

$$\text{Ressort : } w(\varepsilon) = \frac{1}{2}E\varepsilon^2, \quad \text{amortisseur : } w(\varepsilon) = 0, \quad \text{frotteur : } w(\varepsilon) = 0.$$

La partie réversible de la contrainte est donc :

$$\text{Ressort : } \sigma^{\text{rev}} = E\varepsilon, \quad \text{amortisseur : } \sigma^{\text{rev}} = 0, \quad \text{frotteur : } \sigma^{\text{rev}} = 0.$$

On en déduit la partie irréversible de la contrainte ($\sigma^{\text{irr}} = \sigma - \sigma^{\text{rev}}$) et la dissipation intrinsèque ($\mathcal{D}_1 = \sigma^{\text{irr}}\dot{\varepsilon}$) pour chaque modèle :

$$\begin{aligned} \text{Ressort : } \sigma^{\text{irr}} &= 0, & \text{amortisseur : } \sigma^{\text{irr}} &= \sigma, & \text{frotteur : } \sigma^{\text{irr}} &= 0, \\ \text{Ressort : } \mathcal{D}_1 &= 0, & \text{amortisseur : } \mathcal{D}_1 &= \mu\dot{\varepsilon}^2, & \text{frotteur : } \mathcal{D}_1 &= \sigma_0\dot{\varepsilon} \|. \end{aligned}$$

On vérifie dans chaque cas la positivité de la dissipation intrinsèque.

Modèles rhéologiques obtenus par assemblage de modèles élémentaires.

1. *Modèle de Kelvin-Voigt* : ce modèle consiste en l'assemblage en parallèle d'un ressort de raideur E et d'un amortisseur de viscosité μ (figure 7.2a). Bien qu'il soit possible d'écrire directement les équations de comportement de ce modèle assez simple, nous allons effectuer la même analyse systématique que précédemment.

La connaissance de la déformation ε suffit à définir l'état du système et nous la prendrons comme seule variable d'état du système. L'énergie libre est l'énergie stockée dans le ressort $w = \frac{1}{2}E\varepsilon^2$. la contrainte réversible s'en déduit par dérivation $\sigma^{\text{rev}} = E\varepsilon$: il s'agit de la contrainte dans le ressort. Par différence, la contrainte irréversible $\sigma^{\text{irr}} = \sigma - \sigma^{\text{rev}}$ est la contrainte dans l'amortisseur. On a donc $\sigma^{\text{irr}} = \mu\dot{\varepsilon}$. En conclusion la loi de comportement du modèle de Kelvin-Voigt, déduite des équations $\sigma^{\text{rev}} = E\varepsilon$ et $\sigma^{\text{irr}} = \mu\dot{\varepsilon}$, s'écrit :

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}. \quad (7.23)$$

La dissipation intrinsèque du modèle est

$$\mathcal{D}_1 = \sigma^{\text{irr}}\dot{\varepsilon} = \mu\dot{\varepsilon}^2.$$

2. *Modèle de Maxwell* : ce modèle consiste en l'assemblage en série d'un ressort de raideur E et d'un amortisseur de viscosité μ (figure 7.2b). La seule déformation totale ε

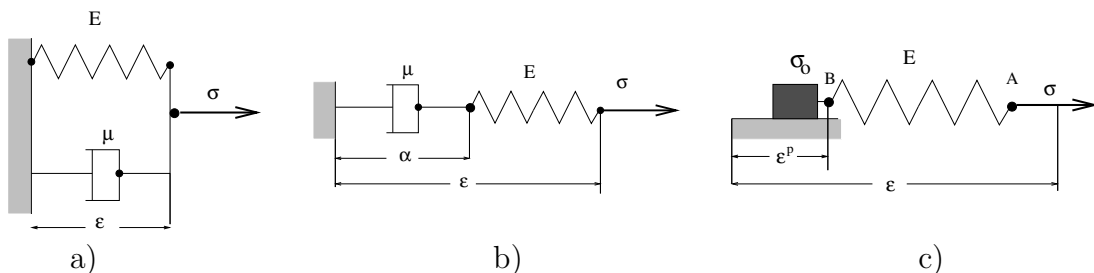


Fig. 7.2: Modèles rhéologiques. a) Modèle de Kelvin-Voigt. b) Modèle de Maxwell. c) Modèle élasto-plastique.

ne suffit pas à définir l'état du système puisqu'elle ne fixe pas l'extension du ressort par exemple. Il faut une variable supplémentaire α que nous prenons égale à la déformation de l'amortisseur (on la note parfois ε^v pour déformation visqueuse). La déformation du ressort seul s'exprime en fonction de ε et α par $\varepsilon^{\text{el}} = \varepsilon - \alpha$.

L'énergie libre du système est l'énergie stockée à l'équilibre dans le ressort :

$$w(\varepsilon, \alpha) = \frac{1}{2}E(\varepsilon - \alpha)^2,$$

dont on déduit par dérivation la contrainte réversible et la force thermodynamique associée à la variable interne α :

$$\sigma^{\text{rev}} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} = E(\varepsilon - \alpha), \quad \mathcal{A} = -\frac{\partial w}{\partial \alpha} = E(\varepsilon - \alpha).$$

Ces deux forces sont donc toutes deux égales à la contrainte extérieure qui s'applique également dans le ressort (force σ^{rev}) et dans l'amortisseur (force \mathcal{A}). La contrainte irréversible est donc nulle et la loi de comportement du modèle de Maxwell, déduite des équations $\varepsilon - \alpha = \frac{\sigma}{E}$ et $\dot{\alpha} = \frac{\sigma}{\mu}$, s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu}. \quad (7.24)$$

On vérifie sans difficulté que la dissipation intrinsèque est positive :

$$\mathcal{D}_1 = \sigma^{\text{irr}}\dot{\varepsilon} + \mathcal{A}\dot{\alpha} = \mu\dot{\alpha}^2.$$

3. Modèle élasto-plastique : Ce modèle consiste en l'assemblage en série d'un ressort de raideur E et d'un frotteur dont le seuil de frottement est noté σ_0 (figure 7.2c). A nouveau, la seule déformation totale ε ne suffit pas à définir l'état du système et on adopte une variable supplémentaire qui est la déformation du frotteur. Pour rendre encore plus claire l'analogie avec la plasticité nous noterons cette variable ε^{P} . La déformation du ressort se déduit de ces deux variables : $\varepsilon^{\text{el}} = \varepsilon - \varepsilon^{\text{P}}$.

L'énergie libre du système est l'énergie stockée à l'équilibre dans le ressort :

$$w(\varepsilon, \varepsilon^{\text{P}}) = \frac{1}{2}E(\varepsilon - \varepsilon^{\text{P}})^2,$$

dont on déduit par dérivation la contrainte réversible et la force thermodynamique associée à la variable interne ε^{P} :

$$\sigma^{\text{rev}} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} = E(\varepsilon - \varepsilon^{\text{P}}), \quad \mathcal{A} = -\frac{\partial w}{\partial \varepsilon^{\text{P}}} = E(\varepsilon - \varepsilon^{\text{P}}).$$

A nouveau ces deux forces sont donc toutes deux égales à la contrainte extérieure qui s'applique également dans le ressort (force σ^{rev}) et dans le frotteur (force \mathcal{A}). La contrainte irréversible est nulle et la loi de comportement du modèle rhéologique élasto-plastique s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}^{\text{P}}, \quad . \quad (7.25)$$

La dissipation intrinsèque s'exprime par :

$$\mathcal{D}_1 = \sigma^{\text{irr}}\dot{\varepsilon} + \mathcal{A}\dot{\alpha} = \sigma\dot{\varepsilon}^{\text{P}} = \sigma_0|\dot{\varepsilon}^{\text{P}}|.$$

La puissance dissipée plastiquement est le produit de la contrainte par la vitesse de déformation plastique (expression que nous avons définie au paragraphe 5.2.2.3 sans avoir vraiment établi le caractère de dissipation).

7.2.2 Lois complémentaires

7.2.2.1 Bilan équations-inconnues

Effectuons un bilan des (nombreuses) équations et inconnues rencontrées pour résoudre un problème d'évolution pour un milieu continu.

Inconnues	Nombre	Equations	Nombre
ρ	1	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0$	1
$\underline{\xi}$	3	$\rho \frac{d^2 \underline{\xi}}{dt^2} = \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}$	3
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	6	$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\xi} + {}^T \nabla \underline{\xi})$	6
$\boldsymbol{\alpha}$	N	—	N
$\underline{\underline{\sigma}}$	6	$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{\operatorname{rev}} + \underline{\underline{\sigma}}^{\operatorname{irr}}$	6
$\underline{\underline{\sigma}}^{\operatorname{rev}}$	6	$\underline{\underline{\sigma}}^{\operatorname{rev}} = \rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha})$	6
$\underline{\underline{\sigma}}^{\operatorname{irr}}$	6	—	6
\mathcal{A}	N	$\mathcal{A} = -\rho \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha})$	N
T	1	$\rho T \dot{s} = \mathcal{D} - \operatorname{div} \underline{q} + \frac{\underline{q} \cdot \nabla T}{T} + r$	1
s	1	$s = -\frac{\partial w}{\partial T}(T, \boldsymbol{\chi})$	1
\mathcal{D}	1	$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}}^{\operatorname{irr}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \mathcal{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\underline{q} \cdot \nabla T}{T}$	1
\underline{q}	3	—	3

Si l'on regarde les lignes qui ne contiennent pas d'équations en regard des inconnues, ce sont au total $N + 9$ équations qui manquent pour équilibrer le bilan. Ces équations sont 6 équations de comportement pour la partie irréversible de la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{\operatorname{irr}}$, N équations de comportement pour les variables internes $\boldsymbol{\alpha}$ et 3 équations de comportement pour le flux de chaleur \underline{q} . Les lois qui permettent de compléter le bilan équations-inconnues sont dites *lois complémentaires*. La seule restriction à la forme qu'elles peuvent prendre est d'assurer la positivité des dissipations intrinsèque et thermique. Nous allons décrire des lois de comportement qui assurent cette positivité. Le cadre adopté pour leur formulation ne fournit que des *conditions suffisantes* (et non nécessaires) d'admissibilité des lois de comportement qui s'en déduisent.

7.2.2.2 Comportement thermique

L'hypothèse de découplage des dissipations permet de considérer séparément le comportement thermique du comportement mécanique. La dissipation thermique \mathcal{D}_2 doit être

positive :

$$\mathcal{D}_2 = -\underline{q} \cdot \frac{\nabla T}{T}.$$

La loi de comportement thermique est la loi qui lie $-\underline{q}$ et $\frac{\nabla T}{T}$ tout en assurant la positivité du produit.

Loi de Fourier. La loi de comportement la plus simple est une relation linéaire entre flux de chaleur et gradient de température :

$$-\underline{q} = \underline{\underline{C}} \cdot \frac{\nabla T}{T},$$

où $\underline{\underline{C}}$ est un tenseur du second ordre, symétrique et positif. En posant $\underline{\underline{k}} = \frac{1}{T} \underline{\underline{C}}$, cette loi prend la forme familière de la loi de Fourier :

$$\text{Loi de Fourier : } \underline{q} = -\underline{\underline{k}} \cdot \nabla T. \quad (7.26)$$

$\underline{\underline{k}}$ est le tenseur de conductivité thermique du matériau. La loi de Fourier fournit les 3 équations de comportement thermique qui manquent au bilan équations-inconnues précédent.

Pour un milieu quelconque $\underline{\underline{k}}$ est un tenseur du second ordre, symétrique et positif. Pour un milieu isotrope ce tenseur est sphérique et s'exprime en fonction d'un scalaire k appelé *conductivité thermique* du milieu :

$$\text{Milieu anisotrope : } q_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

$$\text{Milieu isotrope : } q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad k_{ij} = k \delta_{ij}.$$

Comportement thermique réversible. Un comportement réversible correspond à une dissipation nulle. Dans le cas de la dissipation thermique, sa nullité entraîne soit que le flux de chaleur \underline{q} est nul, soit le gradient de température est nul⁷. Le premier cas correspond donc à un isolant thermique parfait (flux de chaleur nul, aucune conduction). Le second cas correspond à un conducteur thermique parfait (la température devient instantanément uniforme dans le corps considéré).

$$\text{Isolant thermique : } \underline{\underline{k}} = \underline{\underline{0}}, \quad \underline{q} = \underline{\underline{0}},$$

$$\text{Conducteur thermique parfait : } (\underline{\underline{k}})^{-1} = \underline{\underline{0}}, \quad \nabla T = 0.$$

Ces cas sont exceptionnels car la plupart des matériaux courants sont conducteurs mais opposent une certaine résistance à la conduction thermique (le tenseur de conductivité $\underline{\underline{k}}$ est défini positif et fini).

Dans les milieux conducteurs, la dissipation thermique \mathcal{D}_2 est non nulle en général :

$$\mathcal{D}_2 = \frac{1}{T} \nabla T \cdot \underline{\underline{k}} \cdot \nabla T.$$

Ainsi un milieu thermoélastique est en général dissipatif, non pas mécaniquement, mais *thermiquement*.

⁷Pour être complet on doit envisager que certaines composantes du flux puissent être nulles tandis que les composantes complémentaires du gradient de température sont nulles. Le matériau est alors parfaitement isolant dans certaines directions et parfaitement conducteur dans les autres directions.

7.2.3 Comportement mécanique. Potentiel de dissipation

Les $N + 6$ lois complémentaires manquantes doivent exprimer le comportement mécanique du système en assurant la positivité de la dissipation intrinsèque

$$\mathcal{D}_1 = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}, \quad \mathbf{X} = (\underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}}, \mathcal{A}), \quad \mathbf{Y} = (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\dot{\alpha}}}).$$

Ces lois sont des lois d'évolution donnant la vitesse de déformation $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ et la vitesse des variables internes $\underline{\underline{\dot{\alpha}}}$ (c'est à dire en général la vitesse d'avancement des phénomènes irréversibles), en fonction des forces associées, contraintes irréversibles et forces thermodynamiques.

7.2.3.1 Comportement mécanique réversible

Lorsque le comportement mécanique est réversible, la dissipation intrinsèque est nulle. Le plus souvent les variables internes α décrivent les phénomènes irréversibles qui prennent place dans le corps. Ces variables internes sont donc absentes de la liste des variables d'état (ou elles sont figées dans tous les processus considérés). La dissipation intrinsèque se réduit alors à :

$$\mathcal{D}_1 = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$$

Lorsque les déformations que peut subir le corps ne sont pas limitées par des liaisons cinématiques internes⁸, la nullité de la dissipation intrinsèque entraîne la nullité de la partie irréversible des contraintes. Par suite, dans le cas d'un comportement mécanique réversible :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{rev}} = \rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T). \quad (7.27)$$

Puisque les transformations sont infinitésimales on peut se contenter de développer l'énergie libre ρw en puissance de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\theta = T - T_0$ au voisinage de 0. Un développement au second ordre du potentiel donnera le développement au premier ordre des forces par rapport à $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et θ :

$$\rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, \theta) = \rho w_0 + \underline{\underline{\sigma}}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}} - \rho s_0 \theta + \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{2} c_\varepsilon \theta^2 - \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\alpha}}^{\text{th}} \theta. \quad (7.28)$$

L'interprétation physique des constantes matérielles $\underline{\underline{C}}, \beta, \underline{\underline{\alpha}}^{\text{th}}$ est précisée par les lois d'état

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \theta \underline{\underline{\alpha}}^{\text{th}}), \quad s = s_0 + c_\varepsilon \theta. \quad (7.29)$$

$\underline{\underline{\sigma}}^0$ est la contrainte initiale (ou pré-contrainte) existant dans le matériau en l'absence de déformation ou d'élévation de température. De même s_0 est l'entropie initiale. c_ε est la *capacité calorifique* à déformation constante

$$c_\varepsilon = -T \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} = T \frac{\partial s}{\partial T}.$$

$\underline{\underline{C}}$ est le tenseur du 4ème ordre de raideur élastique du matériau. $\underline{\underline{\alpha}}^{\text{th}}$ est le tenseur d'ordre 2 des dilatations thermiques (on prendra garde à ne pas le confondre avec les variables internes).

⁸Des exemples de telles liaisons sont l'incompressibilité, l'inextensibilité dans certaines directions. On renvoie aux cours de Mécanique des Milieux Continus [2, 1] pour la prise en compte de ces liaisons dans les lois de comportement.

7.2.3.2 Comportement irréversible linéaire.

La relation la plus simple entre vitesse et forces est une relation linéaire :

$$\mathbf{X} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y}, \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}} \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}} & \mathbf{L}_{\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}} \\ \mathbf{L}_{\dot{\alpha}\dot{\varepsilon}} & \mathbf{L}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \\ \dot{\underline{\underline{\alpha}}} \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

où \mathbf{L} peut être vu comme un tenseur d'ordre 2 sur l'espace auquel appartiennent \mathbf{X} et \mathbf{Y} . Pour respecter la positivité de la dissipation \mathbf{L} est choisie symétrique, définie et positive. La symétrie de \mathbf{L} se traduit par les relations, dites *relations de symétrie d'Onsager* :

$$\frac{\partial X_i}{\partial Y_j} = \frac{\partial X_j}{\partial Y_i} = L_{ij} = L_{ji}, \quad (\text{par symétrie de } \mathbf{L}).$$

Commentaires :

1. La loi (7.30) est une relation *linéaire* entre les vitesses et les forces qui exprime donc un comportement *visqueux linéaire*, analogue aux comportements des modèles de l'amortisseur, de Kelvin-Voigt et de Maxwell étudiés au paragraphe 7.2.1.1.

2. Remarquons que la relation (7.30) *dérive d'un potentiel* au sens suivant. On pose :

$$\varphi(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2} {}^T \mathbf{Y} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y}.$$

Alors (7.30) exprime que les forces \mathbf{X} dérivent du potentiel φ par rapport aux vitesses \mathbf{Y} :

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}).$$

On peut également introduire un autre potentiel φ^* fonction des forces, dont dérivent les vitesses :

$$\varphi^*(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} {}^T \mathbf{X} \cdot (\mathbf{L})^{-1} \cdot \mathbf{X}, \quad \mathbf{Y} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}).$$

7.2.3.3 Comportement irréversible à seuil

Les lois à seuil se situent à l'opposé des lois linéaires en raison de leur non linéarité très marquée. Ces lois se caractérisent par deux ingrédients :

- *L'existence d'un domaine \mathcal{P} de forces admissibles, dans lequel les forces généralisées \mathbf{X} sont astreintes à demeurer. On supposera par la suite que le domaine \mathcal{P} est convexe et contient la force nulle $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.*
- *Une loi d'évolution « on-off » pour les vitesses \mathbf{Y} : si les forces sont à l'intérieur du domaine \mathcal{P} , les vitesses sont nulles ; si les forces sont au bord du domaine, les vitesses sont normales extérieures au domaine \mathcal{P} .*

En termes mathématiques, en supposant que le domaine des états admissibles peut être décrit par l'inéquation $\mathcal{P} = \{ \mathbf{X}, \mathcal{F}(\mathbf{X}) \leq 0 \}$, la loi à seuil s'exprime de la façon suivante :

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}) \leq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{F}(\mathbf{X}) < 0, \\ \mathbf{Y} = \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}) & \text{si } \mathcal{F}(\mathbf{X}) = 0. \end{cases} \quad (7.31)$$

7.2. THERMODYNAMIQUE ET LOIS DE COMPORTEMENT

Si l'on tient maintenant compte de l'expression de \mathbf{X} et \mathbf{Y} , cette loi complémentaire s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \text{Loi à seuil} : \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}}, \mathcal{A}) &\leq 0 \quad \text{et} \\ \left(\begin{array}{c} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \dot{\underline{\underline{\alpha}}} \end{array} \right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}}, \mathcal{A}) < 0, \\ \left(\begin{array}{c} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \dot{\underline{\underline{\alpha}}} \end{array} \right) &= \dot{\lambda} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}}}(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}}, \mathcal{A}) \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{A}}(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}}, \mathcal{A}) \end{pmatrix} \quad \text{si } \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}}, \mathcal{A}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

La convexité de \mathcal{P} (qui résulte elle-même de la convexité de la fonction \mathcal{F} que nous supposons), implique que la loi (7.31) conduit à une dissipation positive. En effet

$$\mathcal{D}_1 = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \dot{\lambda} \mathbf{X} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}).$$

Il s'agit de montrer que le dernier terme de cette égalité est positif lorsque $\mathcal{F}(\mathbf{X}) = 0$ (il est nul lorsque $\mathcal{F}(\mathbf{X}) < 0$). Comme toute fonction convexe, la fonction \mathcal{F} possède la propriété d'être « située au dessus de sa tangente ». Cette propriété géométrique, illustrée sur la figure 7.3 se traduit mathématiquement par l'inégalité, valable quels que soient \mathbf{X}' et \mathbf{X} :

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}') \geq \mathcal{F}(\mathbf{X}) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{X}' - \mathbf{X}). \quad (7.33)$$

L'inégalité (7.33) peut être appliquée à $\mathbf{X}' = \mathbf{0}$, qui est tel que $\mathcal{F}(\mathbf{0}) \leq 0$ et à \mathbf{X} qui est

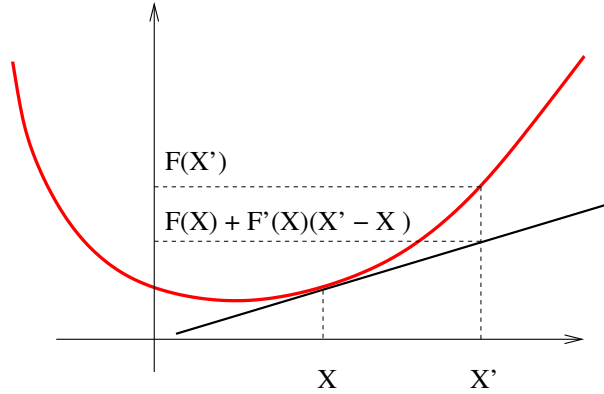


Fig. 7.3: Une fonction convexe est toujours située au dessus de sa tangente.

tel que $\mathcal{F}(\mathbf{X}) = 0$. On obtient alors :

$$0 \geq \mathcal{F}(\mathbf{0}) \geq -\mathbf{X} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}),$$

ce qui, compte tenu de la positivité du multiplicateur $\dot{\lambda}$, entraîne la positivité de la dissipation intrinsèque.

Remarque : Il arrive fréquemment que la définition du domaine \mathcal{P} entraîne que certaines composantes des forces \mathbf{X} sont identiquement nulles au cours de tout processus. La dissipation intrinsèque ne fait alors plus intervenir les vitesses correspondantes qui sont totalement indéterminées. En termes mathématiques, \mathcal{P} est défini par :

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2), \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathcal{F}(\mathbf{X}_2) \leq 0 \}.$$

Alors la loi (7.31) donnant les vitesses s'écrit

$$\mathbf{Y}_1 \text{ arbitraire et } \mathbf{Y}_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{F}(\mathbf{X}_2) < 0, \\ \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}_2}(\mathbf{X}_2) & \text{si } \mathcal{F}(\mathbf{X}_2) = 0. \end{cases} \quad (7.34)$$

Exemple : plasticité parfaite. Nous avons déjà décrit et analysé le modèle de la plasticité sous l'angle du comportement mécanique. Nous le considérons ici sous l'angle thermodynamique.

Les variables d'état mécanique du système (le problème thermique est considéré à part) sont la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et la déformation plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$. L'énergie libre du système est son énergie élastique :

$$\rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^P) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P).$$

Les lois d'état fournissent les forces associées aux variables d'état :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{rev}} = \rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^P) = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P), \quad \underline{\underline{A}}_{\varepsilon^P} = -\rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^P}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^P) = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{rev}}. \quad (7.35)$$

Les lois complémentaires sont exprimées par un seuil. La partie irréversible de la contrainte est choisie nulle :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}} = \underline{\underline{0}}. \quad (7.36)$$

Le seuil ne porte que sur la force thermodynamique $\underline{\underline{A}}_{\varepsilon^P}$ qui est la « force motrice » de la déformation plastique et qui n'est autre d'après (7.35) et (7.36) que la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$. Le seuil est pris sous la forme :

$$\mathcal{F}(\underline{\underline{A}}_{\varepsilon^P}) = \| \underline{\underline{A}}_{\varepsilon^P} \|_{\text{eq}} - \sigma_0 \leq 0. \quad (7.37)$$

Le critère exprimé par (7.37) est le critère de von Mises et la loi complémentaire (7.34) est la règle de normalité en Plasticité parfaite :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{A}}_{\varepsilon^P}}(\underline{\underline{A}}_{\varepsilon^P}) = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\sigma_0}.$$

Enfin la dissipation intrinsèque s'écrit :

$$\mathcal{D}_1 = \underline{\underline{A}}_{\varepsilon^P} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P = \sigma_0 \dot{p}, \quad (7.38)$$

où p est la déformation plastique cumulée.

Exemple : plasticité avec écrouissage isotrope. Les variables d'état sont, comme en plasticité parfaite, la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et la déformation plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$, auxquelles il convient d'ajouter une variable d'état scalaire pour modéliser l'écrouissage isotrope du matériau. Nous notons cette variable β , sans en connaître la signification précise pour l'instant. L'énergie libre se compose du terme classique d'énergie élastique et d'un terme supplémentaire traduisant l'énergie stockée microscopiquement dans les mécanismes qui durcissent le matériau :

$$\rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^P, \beta) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P) + w^{\text{st}}(\beta).$$

Les forces thermodynamiques définies par les lois d'état sont :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{rev}} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P), \quad \underline{\underline{A}}_{\varepsilon^P} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P), \quad \mathcal{A}_\beta = -\frac{\partial w^{\text{st}}}{\partial \beta}(\beta).$$

Le seuil, qui ne porte que sur les forces thermodynamiques $\underline{\underline{A}}_{\varepsilon^P}$ et \mathcal{A}_β , est pris sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}} = \underline{\underline{0}}, \quad \mathcal{F}(\underline{\underline{A}}_{\varepsilon^P}, \mathcal{A}_\beta) = \|\mathcal{A}_{\varepsilon^P}\|_{\text{eq}} + \mathcal{A}_\beta - \sigma_0 \leq 0. \quad (7.39)$$

La force associée à la déformation plastique n'est autre que la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$. Les lois complémentaires (7.34) s'expriment alors par :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{A}}_{\varepsilon^P}} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_0}, \quad \dot{\beta} = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{A}_\beta} = \dot{\lambda}. \quad (7.40)$$

On en déduit que β n'est autre que la déformation plastique cumulée p avec laquelle on l'identifie dorénavant. Le seuil

$$\sigma_{\text{eq}} + \mathcal{A}_\beta - \sigma_0 \leq 0,$$

doit donc s'identifier à la courbe $R(p)$ donnant le seuil de plasticité en fonction de la déformation plastique cumulée. On a donc :

$$\mathcal{A}_\beta = -\frac{\partial w^{\text{st}}}{\partial p}(p) = \sigma_0 - R(p),$$

et par intégration

$$w^{\text{st}}(p) = \int_0^p (R(p) - \sigma_0) dp.$$

L'énergie stockée est l'aire grisée représentée sur la figure 7.4a.

La dissipation intrinsèque s'écrit :

$$\mathcal{D}_1 = \underline{\underline{A}}_{\varepsilon^P} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P + \mathcal{A}_\beta \dot{p} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P - (R(p) - \sigma_0) \dot{p} = \sigma_0 \dot{p}.$$

L'énergie dissipée est également représentée sur la figure 7.4a. Notons que, *contrairement à la plasticité parfaite, la dissipation intrinsèque ne se réduit pas à la puissance plastique* $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P = R(p) \dot{p}$. Une partie de la puissance plastique est dissipée, une autre partie est stockée dans w^{st} (voir également l'exercice 2 du chapitre 5 pour un phénomène analogue).

Commentaires :

1. Nous avons déjà rencontré à deux reprises des lois à seuil :

a) En rupture fragile, où la force \mathbf{X} est le taux de restitution de l'énergie G , le domaine admissible est défini par $G \leq G_c$, la vitesse \mathbf{Y} est la vitesse d'avancement de la fissure et la dissipation est $G\ell$.

b) En plasticité, où la force \mathbf{X} est le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, la vitesse \mathbf{Y} est la vitesse de déformation plastique $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}^P}$ et la dissipation est $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}^P}$.

L'analyse thermodynamique nous permet de reconnaître que ces lois relèvent de la même classe générale des lois à seuil.

2. La seule réponse mécanique ne suffit pas pour définir de façon unique la loi de comportement thermodynamique d'un matériau. Prenons l'exemple de la plasticité avec écrouissage. On peut faire un autre choix de la fonction seuil :

$$\mathcal{F}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\varepsilon^P}, \mathcal{A}_\beta) = \|\mathcal{A}_{\varepsilon^P}\|_{\text{eq}} + \mathcal{A}_\beta - \sigma_1 \leq 0,$$

où σ_1 peut être choisi arbitrairement. L'identification du comportement mécanique conduit à l'équation

$$\mathcal{A}_p = \sigma_1 - R(p).$$

La même démarche que précédemment conduira à identifier β comme étant la déformation plastique cumulée mais à une autre répartition entre énergie stockée et énergie dissipée, comme indiqué sur la figure 7.4b :

$$w^{\text{st}}(p) = \int_0^p (R(p) - \sigma_1) dp, \quad \mathcal{D}_1 = \sigma_1 \dot{p}.$$

Le choix de σ_1 n'a aucune influence sur le comportement mécanique (la courbe $R(p)$) mais a une influence importante sur le comportement thermodynamique par le biais de la dissipation intrinsèque.

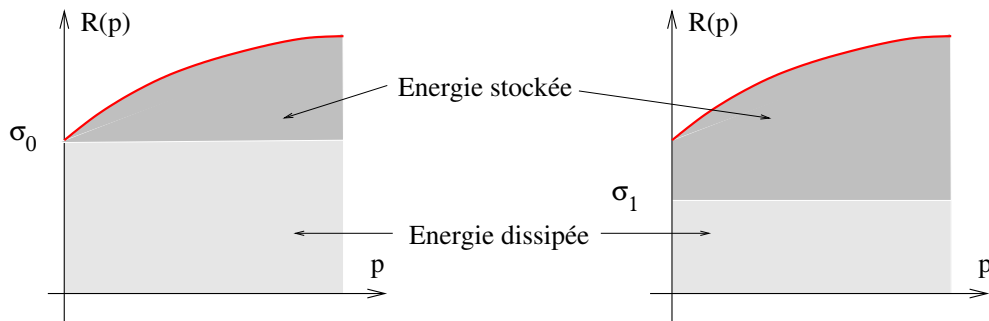


Fig. 7.4: *Seuil de plasticité en fonction de la déformation plastique cumulée. a) Choix le plus courant de la partition entre énergie libre et énergie stockée. b) Autre choix possible.*

7.2.4 Matériaux standards généralisés

7.2.4.1 Potentiel de dissipation

Les *matériaux standard généralisés*, introduits par B. Halphen et Q.S. Nguyen [27], se caractérisent par l'existence d'un *potentiel de dissipation* dont dérive la relation entre forces généralisées et vitesses généralisées.

Un matériau est dit *standard généralisé* s'il existe une fonction convexe $\varphi(\mathbf{Y})$, minimum en $\mathbf{Y} = 0$, telle que

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}). \quad (7.41)$$

En détaillant l'expression des forces et des vitesses, l'hypothèse de l'existence d'un potentiel de dissipation se traduit par :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}} \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

Les relations (7.42) fournissent les $N + 6$ équations de comportement manquantes entre forces et vitesses pour équilibrer le bilan des équations et des inconnues. φ est le *potentiel de dissipation* du milieu considéré.

Vérifions que l'hypothèse d'existence d'un potentiel de dissipation convexe entraîne la positivité de la dissipation \mathcal{D}_1 . Il résulte de la convexité de φ et de l'inégalité (7.33) appliquée à $\varphi(\mathbf{Y})$ que :

$$\varphi(\mathbf{0}) - \varphi(\mathbf{Y}) \geq \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{0} - \mathbf{Y}) = \mathbf{X} \cdot (\mathbf{0} - \mathbf{Y}) = -\mathcal{D}_1.$$

Mais puisque φ est minimum en $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ le premier membre de cette inégalité est négatif ce qui montre que \mathcal{D}_1 est positive.

Les relations (7.41) peuvent être inversées à l'aide du potentiel dual φ^* de φ qui est fonction (*convexe*) des forces \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) \Leftrightarrow \mathbf{Y} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}), \quad (7.43)$$

avec (transformée de Legendre-Fenchel) :

$$\varphi^*(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} - \varphi(\mathbf{Y}), \quad \text{où } \mathbf{X} \text{ et } \mathbf{Y} \text{ sont liés par (7.43)}. \quad (7.44)$$

La relation géométrique entre le potentiel φ et le potentiel dual φ^* est schématisée sur la figure 7.5. Les deux aires grisées correspondent aux valeurs de deux potentiels en \mathbf{X} et \mathbf{Y} respectivement. La courbe qui les sépare est l'ensemble des points (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) vérifiant la relation (7.43). Le potentiel φ^* est parfois appelé *potentiel de force* du matériau.

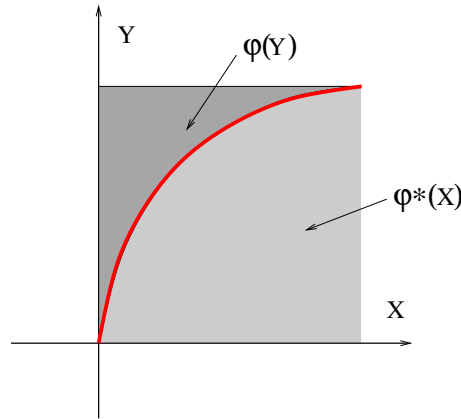


Fig. 7.5: Potentiel de dissipation et potentiel dual.

Exemples 1. Soit φ le potentiel quadratique défini par

$$\varphi(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{L} \mathbf{Y},$$

où \mathbf{L} est un tenseur d'ordre 2 défini positif. La relation force-vitesse est donnée par :

$$\mathbf{X} = \mathbf{L} \mathbf{Y}, \quad \text{ou inversement} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X},$$

et le potentiel dual φ^* donné par (7.44) s'écrit :

$$\varphi^*(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} - \frac{1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{L} \mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X} - \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X} = \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X}.$$

C'est un potentiel quadratique défini par l'inverse du tenseur qui définit φ .

2. Soit φ le potentiel en loi puissance

$$\varphi(\mathbf{Y}) = \frac{1}{m+1} \|\mathbf{Y}\|^{m+1}.$$

En dérivant la définition $\|\mathbf{Y}\|^2 = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}$ de la norme $\|\cdot\|$, on établit que

$$\frac{\partial \|\mathbf{Y}\|}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\mathbf{Y}}{\|\mathbf{Y}\|}.$$

Il en résulte que la relation force-vitesse s'écrit :

$$\mathbf{X} = \|\mathbf{Y}\|^{m-1} \mathbf{Y}, \quad \text{ou inversement} \quad \mathbf{Y} = \|\mathbf{X}\|^{n-1} \mathbf{X}, \quad \text{avec} \quad n = \frac{1}{m}.$$

Le potentiel dual φ^* donné par (7.44) s'écrit :

$$\varphi^*(\mathbf{X}) = \frac{1}{n+1} \|\mathbf{X}\|^{n+1}.$$

7.2.4.2 Structure de la loi de comportement

La loi de comportement complète consiste en l'ensemble des lois d'état et des lois complémentaires. En revenant à l'expression détaillée des forces et des vitesses, il vient, en éliminant les forces \mathcal{A} :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}), \\ \rho \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}}(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

Les équations de comportement sont donc *des équations différentielles ordinaires*. Elles sont couplées aux équations aux dérivées partielles (équilibre, compatibilité) que doivent satisfaire les champs $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

7.2.4.3 Ecriture d'une loi de comportement dans le cadre des matériaux standard généralisés.

L'hypothèse du potentiel de dissipation permet de réduire l'écriture (ou l'identification) des lois de comportement à celle de *deux potentiels thermodynamiques*, l'énergie libre w et le potentiel de dissipation φ . La détermination de deux fonctions scalaires est nettement plus simple que l'identification de $N + 6$ lois complémentaires liant forces et vitesses. C'est pourquoi cette démarche est de plus en plus adoptée.

Voici en résumé les étapes essentielles de la construction d'une loi de comportement mécanique dans le cadre « standard généralisé »⁹.

1. Identification des variables d'état et notamment des variables internes, dont la signification physique est étroitement liée au contexte considéré et aux phénomènes (irréversibles le plus souvent) à décrire :

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha}.$$

2. Identification (ou mesure) de l'énergie libre. L'énergie libre est l'énergie stockée dans le système et qui est susceptible d'être mobilisée pour faire évoluer la déformation et les différents mécanismes irréversibles :

$$\Rightarrow \quad \rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha}).$$

3. Identification à l'aide des *lois d'état* des forces thermodynamiques, ou forces motrices :

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}} = \rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathcal{A} = -\rho \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \boldsymbol{\alpha}).$$

Ces forces sont définies à l'équilibre (en termes mathématiques \mathcal{A} dépend de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\boldsymbol{\alpha}$ et non de leur dérivée par rapport au temps). Les lois d'état traduisent donc essentiellement les phénomènes réversibles. En effet, si le système passe deux fois par le même état (mêmes valeurs des variables d'état), les forces correspondantes seront identiques quel que soit l'histoire du milieu entre les deux instants considérés.

4. Identification (ou mesure) du potentiel de dissipation φ ou de son dual φ^* et dérivation des *lois complémentaires* qui fixent l'évolution des variables d'état du système, notamment celles qui décrivent des phénomènes irréversibles.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}}}(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}}, \mathcal{A}), \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathcal{A}}(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{irr}}, \mathcal{A}).$$

⁹La dépendance par rapport à la température des potentiels est implicite.

Au contraire des lois d'état, les lois complémentaires décrivent essentiellement des phénomènes irréversibles s'accompagnant d'une dissipation.

Avertissement : Ce cadre séduisant se révèle très efficace à l'usage. Il ne faut cependant pas perdre de vue qu'une loi de comportement est avant tout la traduction mathématique d'un ensemble de résultats expérimentaux. La démarche basée sur les deux potentiels thermodynamiques qui vient d'être décrite n'est en fait qu'un fil conducteur possible dans cette transcription des résultats expérimentaux en une loi de comportement multiaxiale. Elle n'est pas *nécessaire*, au sens que seule la positivité de la dissipation est requise par le second principe de la Thermodynamique, l'existence de potentiels étant une condition suffisante, mais en aucun cas nécessaire, permettant d'assurer cette positivité. Le cadre proposé peut s'avérer inefficace dans certaines situations sans qu'il y ait pour autant contradiction entre les résultats expérimentaux et les principes de la Thermodynamique. Il faut alors procéder différemment.

7.3 Equation de la chaleur

7.3.1 Forme générale

Revenons à la définition de la dissipation totale :

$$\mathcal{D} = \rho T \dot{s} + \operatorname{div} \underline{q} - \frac{\underline{q} \cdot \underline{\nabla} T}{T} - r,$$

et isolons la dissipation intrinsèque :

$$\mathcal{D}_1 = \rho T \dot{s} + \operatorname{div} \underline{q} - r.$$

Compte tenu de l'équation de Gibbs $s = -\frac{\partial w}{\partial T}(\boldsymbol{\chi}, T)$, l'expression précédente de la dissipation intrinsèque devient :

$$\mathcal{D}_1 = -\rho T \frac{\partial^2 w}{\partial T \partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} - \rho T \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} \dot{T} + \operatorname{div} \underline{q} - r,$$

qui, compte tenu des lois d'état et de la loi de Fourier $\underline{q} = -k \cdot \underline{\nabla} T$ (la conduction est supposée isotrope pour simplifier), conduit à :

$$\rho c_\chi \dot{T} - \operatorname{div} k \underline{\nabla} T = r + T \frac{\partial \sigma^{\text{rev}}}{\partial T} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - T \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial T} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathcal{D}_1, \quad (7.46)$$

où $c_\chi = -T \frac{\partial^2 w}{\partial T \partial \boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\chi}, T)$ est, par définition, la *capacité calorifique* à variables d'état $\boldsymbol{\chi}$ constantes¹⁰.

L'équation (7.46) est *l'équation de la chaleur*. Elle est complétée par des conditions aux limites : température imposée sur une partie du bord, flux imposé sur la partie complémentaire du bord. L'équation de la chaleur est couplée avec les équations

¹⁰On rencontre souvent dans les bases de données matériaux la constante $\kappa = \frac{k}{\rho c_\chi}$ qui est la *diffusivité* du milieu.

7.3. EQUATION DE LA CHALEUR

mécaniques du problème, loi de comportement et équations d'équilibre et de compatibilité. Le couplage thermomécanique se produit à plusieurs niveaux. En premier lieu les propriétés matérielles sont fonctions de la température (avec des variations parfois très importantes). En second lieu, la température génère une déformation d'origine thermique par le biais des coefficients de dilatation. Enfin, le second membre de l'équation de la chaleur contient des termes (dont la dissipation intrinsèque) qui dépendent des variables d'état mécanique du système et de leur évolution. Le système complet d'équations (équation de la chaleur + équations mécaniques) constitue le problème *thermomécanique* couplé dont la résolution, lorsqu'elle est possible, fournit les variables d'état $(T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}})$.

7.3.2 Champ de température et sources de chaleur

Le couplage thermomécanique est la base théorique de différentes méthodes expérimentales qui utilisent une mesure du champ de température pour en déduire les différents termes sources d'origine mécanique, responsables des variations de température, qui figurent au second membre de (7.46). La mesure du champ de température se fait le plus souvent par thermocouples ou par *thermographie infrarouge* (qui donne une image du champ de température avec une précision du dixième, voire du centième de degré).

Le terme r est un terme source connu. Il traduit en général des sources de chaleur provenant de réactions chimiques internes. Il est nul dans les applications que nous avons en vue. Les deuxième et troisième termes du second membre de (7.46) forment le terme source *isentropique* : c'est en effet le seul terme présent lorsque la dissipation intrinsèque est nulle. L'analyse de ce terme source fait l'objet du paragraphe suivant. Le dernier terme est la dissipation intrinsèque qui est toujours positive d'après le second principe.

7.3.2.1 Comportement mécanique réversible

Considérons pour commencer le cas d'un comportement mécanique réversible. Le modèle ne comporte ni variables internes, ni forces associées, la contrainte réversible est la contrainte totale et la dissipation intrinsèque est nulle. L'équation de la chaleur se réduit à :

$$\rho c_\varepsilon \dot{T} - \operatorname{div} k \underline{\nabla} T = T \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial T} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}.$$

Dans l'hypothèse HPP (transformations infinitésimales et petites variations de température) le comportement réversible est décrit par les relations de comportement (7.29). En négligeant la dépendance par rapport à la température des différents « constantes » matérielles $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{\alpha}}^{\text{th}}$, il vient :

$$\rho c_\varepsilon \dot{\theta} - \operatorname{div} k \underline{\nabla} \theta = -T_0 \underline{\underline{\alpha}}^{\text{th}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}. \quad (7.47)$$

Le terme source qui figure au second membre de (7.47) est *négatif* lorsque la vitesse de déformation est positive. En d'autres termes lorsqu'on allonge une éprouvette uniaxiale, celle-ci se refroidit. Cet effet est analogue au refroidissement qui accompagne la détente des gaz parfaits. La variation de température qui en résulte est faible (de l'ordre de quelques dixièmes de degrés selon la vitesse de déformation) et n'affecte pas significativement les propriétés mécaniques des matériaux courants. En revanche elle permet une mesure des modes propres des structures ou de certaines composantes des contraintes comme nous allons le voir.

Mesure des contraintes par thermographie. Il est possible de modifier l'équation (7.47) en notant que $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\alpha}}^{\text{th}}\dot{\theta})$ pour obtenir :

$$\rho c_\sigma \dot{\theta} - \text{div } k \underline{\underline{\nabla}}\theta = -T_0 \underline{\underline{\alpha}}^{\text{th}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}, \quad \text{où on a posé } c_\sigma = c_\varepsilon + \underline{\underline{\alpha}}^{\text{th}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\alpha}}^{\text{th}}. \quad (7.48)$$

Dans le cas le plus courant d'un matériau isotrope où $\underline{\underline{\alpha}}^{\text{th}} = \alpha^{\text{th}} \underline{\underline{i}}$, le terme source qui figure au second membre de (7.48) vaut donc $-T_0 \alpha^{\text{th}} \text{tr} \underline{\underline{\dot{\sigma}}}$.

Les mesures de variation de température par thermographie infrarouge permettent d'accéder à la variation de la trace des contraintes. Cette méthode suppose que les contraintes varient, ce qui n'est pas le cas dans une structure à l'équilibre. On a alors recours à la *vibro-thermographie*. Si sous un chargement $\underline{\underline{Q}}^0$ le champ de contrainte est $\underline{\underline{\sigma}}^0$, sous chargement $\underline{\underline{Q}}(t) = \underline{\underline{Q}}^0(1 + \delta \sin \omega t)$ le champ de contrainte sera $\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}^0(1 + \delta \sin \omega t)$ et donc $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}(t) = \delta \omega \underline{\underline{\sigma}}^0 \cos \omega t$. La thermographie infrarouge fournit une carte de la température θ et donc du terme source dans (7.48). On obtient ainsi une carte de la trace de $\underline{\underline{\sigma}}^0$ sur la structure.

7.3.2.2 Comportements mécaniques irréversibles.

Lorsque le comportement du matériau est irréversible, l'évolution des irréversibilités s'accompagne d'une dissipation intrinsèque *qui est toujours positive*, quel que soit le signe de la vitesse de déformation. La source de chaleur due à la dissipation est donc toujours positive. Dans les métaux courants, la dissipation est principalement d'origine plastique. Elle l'emporte très rapidement sur le terme isentropique qui induit des *variations* de température (positives ou négatives) de quelques dixièmes de degré tandis que la dissipation intrinsèque peut conduire à des *élévations* de température de plusieurs dizaines, voire plusieurs centaines de degrés, pouvant s'accompagner de transformations de phase dans le matériau.

La figure 7.6 extraite du travail de Chrysochoos *et coll.* [25] permet d'apprécier les ordres de grandeur des différents termes sources. Au début de la traction, en régime élastique, le terme isentropique est seul actif et on constate un refroidissement de quelques dixièmes de degré de l'éprouvette. Dès que le seuil de plasticité est atteint la dissipation intrinsèque prend rapidement le dessus sur le terme isentropique et entraîne une remontée très nette du champ de température. Cette remontée permet d'ailleurs une détermination plus précise du seuil de plasticité que la détection (délicate) de la non linéarité dans la courbe contrainte-déformation.

7.3.3 Programme d'étude d'un problème thermomécanique

Beaucoup de problèmes de structures industrielles sont des problèmes *thermomécaniques*, où le chargement est à la fois thermique et mécanique. On peut distinguer deux grandes classes de problèmes :

1. Dans les problèmes de structures *chaudes*, où la structure contient ou véhicule un fluide chaud (gaz ou liquide), le champ de température dans la structure est en général contrôlé par le champ de température dans le fluide. C'est le cas des moteurs thermiques, des échangeurs thermiques (tuyauteries de centrale nucléaire

7.3. EQUATION DE LA CHALEUR

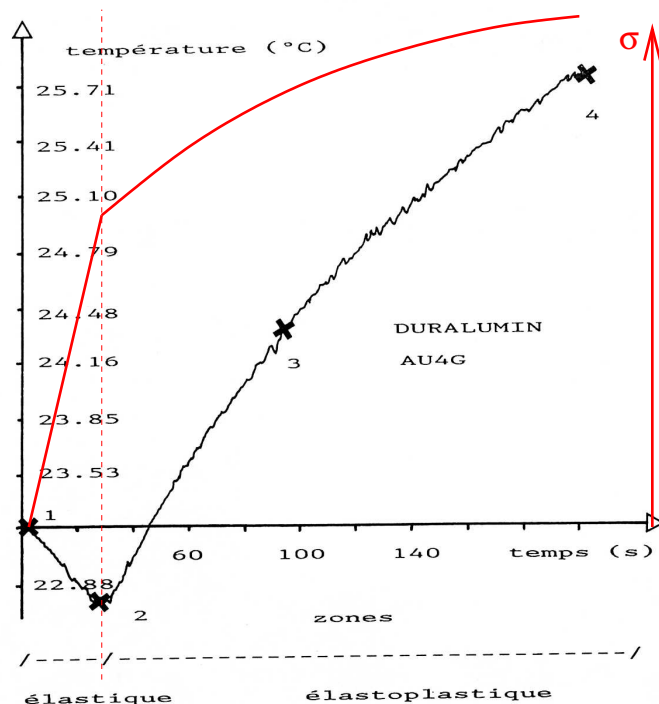


Fig. 7.6: Réponses thermique et mécanique d'un aluminium lors d'un essai de traction simple à température ambiante (d'après [25]).

par exemple...), de la mise forme à chaud (forgeage). Les termes sources « internes » (terme isentropique et dissipation intrinsèque) sont négligeables devant les apports de chaleur par l'extérieur. On peut donc résoudre dans un premier temps l'équation de la chaleur en négligeant les termes sources internes et donc sans tenir compte du couplage thermomécanique. Dans un second temps on utilise le champ de température ainsi obtenu dans les équations purement mécaniques du problème. *Le problème thermomécanique est ainsi résolu de façon découplée.*

2. Dans d'autres situations, notamment en usinage ou en mise en forme à froid, dans les problèmes de contact entre solides mettant en jeu du frottement, le couplage thermomécanique est essentiel. En coupe des métaux par exemple il existe une zone de très fort cisaillement à la pointe de l'outil de coupe. Le copeau subit une forte déformation plastique dans cette zone. Le gradient du cisaillement dans l'épaisseur est également très important ce qui entraîne un fort gradient des déformations plastiques dans l'épaisseur du copeau et génère des contraintes résiduelles. Ces contraintes résiduelles sont à l'origine de l'enroulement du copeau qui est familier à chacun (même le bois qui ne paraît pas particulièrement plastique, présente ce phénomène d'enroulement dû aux contraintes résiduelles). Un dégagement de chaleur très fort, présentant un fort gradient, se produit dans la zone de cisaillement en pointe d'outil et change de façon très notable les propriétés du métal dans cette zone (dans une certaine mesure la chaleur ramollissant le métal en facilite l'usinage), et par conduction affecte aussi l'outil (qu'il faut refroidir). La compréhension des contraintes et déformations dans cette zone passe obligatoirement par la résolution du problème couplé, et nécessite donc une

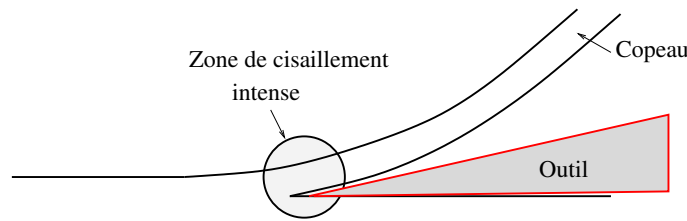


Fig. 7.7: Coupe d'un métal. Zone de cisaillement intense dans le copeau entraînant un dégagement de chaleur.

détermination correcte du comportement thermomécanique couplé des matériaux. Pour traiter convenablement ces problèmes il faut aller au delà du comportement purement mécanique du matériau puisque l'on a vu plus haut sur l'exemple de l'écroutissage isotrope que des modèles du même comportement mécanique pouvaient conduire à des dissipations intrinsèques très différentes. Il va de soi que le terme isentropique est négligeable dans ces problèmes. En revanche il importe de connaître précisément la dissipation intrinsèque \mathcal{D}_1 .

7.4 Exercices

Exercice 1. Modèles de Kelvin-Voigt et de Maxwell. On reprend l'analyse des modèles de Kelvin-Voigt et de Maxwell décrits au paragraphe 7.2.1.1.

1⁰) *Modèle de Kelvin-Voigt.* Exprimer la déformation à l'instant t en fonction de l'histoire des contraintes entre 0 et t . En déduire la réponse d'un milieu de Kelvin-Voigt à un essai de fluage. Un milieu de Kelvin-Voigt est-il fluide ou solide au sens du chapitre 1 ?

2⁰) *Modèle de Maxwell.* Exprimer la contrainte à l'instant t en fonction de l'histoire des déformations entre 0 et t . En déduire la réponse d'un milieu de Maxwell à un essai de relaxation. Un tel milieu est-il fluide ou solide ?

Eléments de réponse.

1⁰) *Modèle de Kelvin-Voigt.* Supposant connue l'histoire des contraintes $\sigma(t)$ on obtient par intégration de l'équation (7.23) :

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^t \sigma(s) e^{-E(t-s)/\mu} ds \quad (7.49)$$

Le milieu de Kelvin-Voigt a une mémoire, puisque la valeur de ε à l'instant t dépend des valeurs du chargement aux instants passés; cette mémoire est évanescence à cause de l'exponentielle décroissante qui figure dans (7.49). $\tau = \mu/E$ est le *temps de relaxation* du matériau.

Essai de fluage. On impose $\sigma(t) = \sigma$, $t \geq 0$. D'après (7.49) :

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t \sigma e^{-E(t-s)/\mu} ds = \frac{\sigma}{E} (1 - e^{-Et/\mu}).$$

La déformation retardée est limitée et tend vers $\frac{\sigma}{E}$, qui est la déformation d'un modèle élastique de même raideur. Le modèle de Kelvin-Voigt est donc de type solide.

2⁰) *Modèle de Maxwell.* Lorsqu'on suppose connu le trajet $\varepsilon(t)$, l'équation (7.25) s'intègre en

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - \frac{E^2}{\mu} \int_0^t \varepsilon(s) e^{-E(t-s)/\mu} ds \quad (7.50)$$

7.4. EXERCICES

Le milieu de Maxwell possède comme le milieu de Kelvin-Voigt une mémoire.

Essai de relaxation. On prend dans (7.50) $\varepsilon(t) = \varepsilon$ pour $t \geq 0$.

$$\sigma(t) = E\varepsilon e^{-Et/\mu}$$

La relaxation est *totale*. Le milieu de Maxwell est de type fluide, ce que confirme l'essai de fluage (les déformations ne sont pas limitées).

Exercice 2. Modélisation de l'endommagement du béton. *Le béton est un matériau qui s'endommage (par microfissuration) lorsqu'il est soumis à une traction. La courbe réelle de traction lors d'un essai uniaxial est représentée sur la figure 7.8a.*

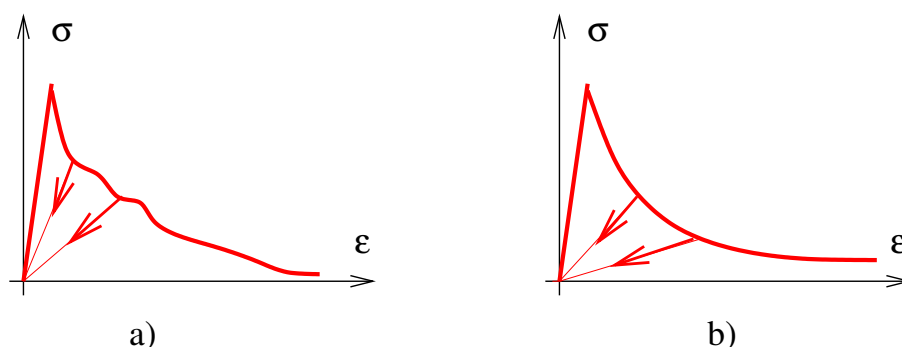


Fig. 7.8: Réponse du béton en traction. a) Courbe réelle. b) Modélisation.

Une approximation relativement bonne est obtenue en supposant que le comportement est élastique linéaire jusqu'à une certaine valeur de la déformation, puis suit approximativement une hyperbole $\sigma\varepsilon = w_c$ lorsque la déformation est augmentée. Lors des décharges à partir de la courbe principale le point (σ, ε) revient à l'origine (aucune déformation résiduelle) suivant une droite et suit la même droite lors d'une nouvelle charge jusqu'à la courbe hyperbolique principale qu'il suit à nouveau.

Après avoir identifié les variables d'état pertinentes, montrer que le comportement idéalisé peut être décrit par une loi complémentaire à seuil. Le problème sera traité en dimension 1.

Eléments de réponse.

Le comportement décrit est celui d'un matériau *élastique endommageable*. Le phénomène irréversible qui doit être modélisé est la variation de raideur élastique. La raideur initiale est E_0 , la raideur courante est $E(d)$ où d est une variable interne mesurant l'endommagement du matériau dont la définition précise apparaîtra plus tard. E doit être une fonction décroissante de d et d ne peut que croître. Les variables d'état sont (ε, d) .

Les essais de charge-décharge indiquent que l'endommagement se fige dès que l'on quitte la partie hyperbolique de la courbe de traction lors d'une décharge, et ne se remet à évoluer que lorsqu'une charge ramène le point (σ, ε) sur cette hyperbole, ce qui indique bien un comportement à seuil.

L'énergie libre est l'énergie élastique stockée dans un état d d'endommagement et un état ε de déformation :

$$\rho w = \frac{1}{2} E(d) \varepsilon^2.$$

Les lois d'état sont

$$\sigma^{\text{rev}} = E(d)\varepsilon, \quad Y = -\frac{1}{2}E'(d)\varepsilon^2,$$

où Y désigne la force thermodynamique associée à l'endommagement d .

Le seul phénomène irréversible étant l'endommagement nous choisissons d'imposer $\sigma^{\text{irr}} = 0$ comme une partie de la loi complémentaire, l'autre partie de la loi complémentaire étant donnée par un seuil sur Y

$$\sigma^{\text{irr}} = 0, \quad Y \leq Y_c, \quad \dot{d} = 0 \quad \text{si} \quad Y < Y_c, \quad \dot{d} \geq 0 \quad \text{si} \quad Y = Y_c.$$

Il résulte de ce choix que $\sigma = \sigma^{\text{rev}} = E(d)\varepsilon$ et donc

$$Y = -\frac{1}{2} \frac{E'(d)}{E(d)} \sigma \varepsilon.$$

Sur la partie hyperbolique de la courbe de traction où l'endommagement se développe on a $\sigma \varepsilon = w_c$ et $Y = Y_c$. par suite

$$-\frac{1}{2} \frac{E'(d)}{E(d)} w_c = Y_c, \quad \text{et par intégration} \quad E(d) = E_0 e^{-\frac{2Y_c}{w_c} d}.$$

Y_c peut être choisi à notre guise (seule restriction, il doit être positif pour assurer la positivité de la dissipation $\mathcal{D}_1 = Y\dot{d} = Y_c\dot{d}$), et nous pouvons par exemple le choisir égal à $w_c/2$, ce qui donne $E(d) = E_0 e^{-d}$. Cette dernière relation précise la signification de la variable d : plaçons nous en un point de la courbe de traction. Le module d'Young du matériau en ce point est E (pente de la droite qui joint l'origine à ce point). L'état d'endommagement en ce point est donné par $d = -\log E/E_0$. En conclusion le modèle s'écrit ainsi :

$$\sigma = E(d)\varepsilon, \quad E(d) = E_0 e^{-d}, \quad \dot{d} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{1}{2}E(d)\varepsilon^2 < \frac{w_c}{2}, \quad \dot{d} \geq 0 \quad \text{si} \quad \frac{1}{2}E(d)\varepsilon^2 = \frac{w_c}{2}.$$

Chapitre 8

Charges limites

Introduction et cadre de travail...

Les contraintes que peuvent supporter les matériaux solides sont, en général, limitées. Deux comportements physiques particuliers illustrant cet état de fait, la rupture fragile et la plasticité, ont été examinés dans les chapitres précédents, mais il en existe bien d'autres qui conduisent au même constat : les matériaux ont une résistance limitée.

La question posée dans ce chapitre est celle de la tenue d'une *structure* constituée d'un matériau possédant une résistance limitée et soumise à un chargement dépendant d'un ou plusieurs paramètres Q et ceci *sans autre information sur le comportement du matériau constituant la structure que sa résistance*. La théorie des *charges limites*¹ aborde le problème selon deux angles :

- Sous l'angle des champs de contrainte *statiquement et physiquement admissibles* (approche statique) ; il est en effet exclu qu'une structure puisse soutenir un chargement qu'aucun champ de contrainte physiquement admissible ne pourrait équilibrer.
- Sous l'angle de la puissance des efforts mis en jeu dans un mécanisme de ruine de la structure (approche cinématique).

Les hypothèses de travail faites au long de ce chapitre sont les suivantes :

- ▷ *Les déformations sont suffisamment petites pour que l'hypothèse des petites perturbations soit légitime.*
- ▷ *Les transformations sont suffisamment lentes pour pouvoir se placer dans l'approximation d'une évolution quasi-statique et isotherme (les effets d'inertie et les variations de température sont négligés).*

¹Petit point de vocabulaire : certains auteurs (par exemple J. Salençon [34, 35] dont ce chapitre s'inspire fortement) réservent l'usage du terme *charges limites* aux structures élasto-plastiques et adoptent le vocable de *calcul à la rupture* pour un comportement général du matériau. Pour éviter une confusion possible avec la *mécanique de la rupture* abordée au début de ce cours, nous utiliserons les termes de *théorie des charges limites* ou *analyse limite* sans distinguer les différents types de comportement.

8.1 Chargements potentiellement supportables. Approche statique

8.1.1 Exemple introductif

Considérons l'exemple de la torsion d'un arbre cylindrique dont les notations ont été introduites dans l'annexe A. Le chargement est défini par le paramètre généralisé M (couple de torsion) associé à la variable cinématique généralisée α (angle de torsion). Le matériau constitutif de l'arbre ne peut supporter d'états de contrainte dont la contrainte de von Mises dépasse un seuil σ_0 . On se demande quel est le couple maximal qui peut être appliqué à l'arbre, ou à défaut de cette information, quels sont les couples *qui ne peuvent pas être supportés*.

Remarquons qu'un problème *semblable* a été partiellement traité en plasticité parfaite au chapitre 6. Mais nous l'avons traité sous d'autres hypothèses : le comportement était totalement connu et le chargement était monotone croissant. Le problème envisagé ici est plus général et plus délicat, car l'information disponible est incomplète, tant en ce qui concerne le chargement que la loi de comportement.

Cherchons des conditions nécessaires d'acceptabilité du chargement. Pour que le couple M soit supportable par l'arbre, il doit pouvoir être équilibré par un champ de contrainte qui respecte le critère de von Mises. La relation liant le moment de torsion et le tenseur des contraintes s'écrit (équation (6.5)) :

$$M = 2\pi \int_0^R \sigma_{\theta z} r^2 dr.$$

La limitation sur la contrainte de von Mises s'écrit :

$$\sigma_{\text{eq}}^2 = \frac{3}{2} (s_{rr}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{zz}^2 + 2\sigma_{r\theta}^2 + 2\sigma_{rz}^2 + 2\sigma_{\theta z}^2) \leq \sigma_0^2, \quad \text{en particulier } 3\sigma_{\theta z}^2 \leq \sigma_0^2.$$

Il en résulte que M doit nécessairement vérifier

$$M \leq 2\pi \int_0^R \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} r^2 dr = \frac{2\pi\sigma_0}{3\sqrt{3}} = M^+.$$

Cette inégalité donne un *majorant* M^+ *de tout couple supportable*. Il s'agit donc d'une approche par excès, dite encore *approche par l'extérieur*.

La question de savoir si toutes les valeurs de M inférieures à M^+ peuvent être atteintes est plus délicate. Pour un matériau élasto-plastique, la réponse est positive comme la construction explicite d'une solution l'a montré au chapitre 6. Pour un matériau élastique fragile, la réponse est négative comme la solution élastique établie en annexe A le montre. Il ne sera en effet pas possible de dépasser le couple M_0 du paragraphe 6.2.2, couple correspondant, dans le contexte de la plasticité, à la première plastification (en d'autres termes à la saturation du critère en un point). La réponse dépend donc du type de matériau considéré.

En l'absence d'information complète sur le comportement du matériau constituant la structure, il n'est pas possible d'obtenir mieux qu'un majorant du chargement supportable par la structure.

8.1.2 *Enoncé général du problème des charges limites*

Considérons un corps constitué d'un matériau qui possède un *domaine de résistance* G délimitant les états de contraintes *physiquement admissibles* par le matériau. La raison de cette limitation n'est pas spécifiée ; différents types de comportement (plasticité, comportement fragile ou endommageable....) peuvent y conduire, comme l'illustre la figure 8.1.

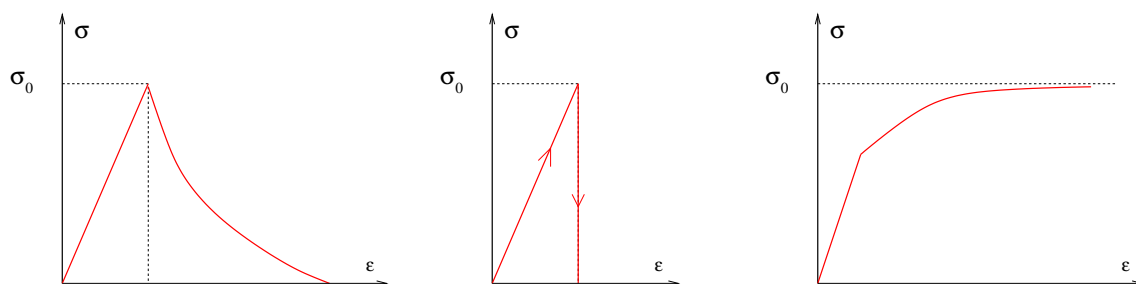


Fig. 8.1: Trois matériaux de comportements différents ayant même domaine de résistance (caractérisé ici par la contrainte σ_0).

On note G ce domaine de $\mathbb{R}^3 \otimes_s \mathbb{R}^3$ pour lequel on fait les hypothèses suivantes (bien vérifiées expérimentalement) :

1. G est convexe.
2. l'état de contrainte nul $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$ est point intérieur de G .

Le domaine de résistance peut dépendre du point considéré et, dans ce cas, sera noté $G(\underline{x})$.

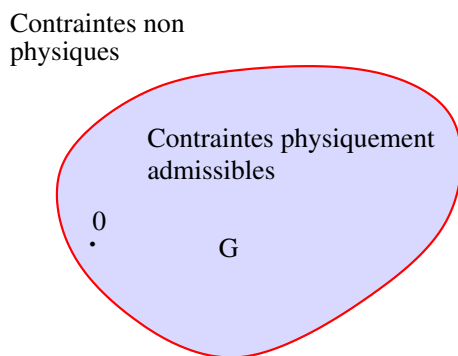


Fig. 8.2: Domaine de résistance G .

La structure considérée occupe un domaine Ω fixe (HPP). Elle est soumise à un chargement défini par des paramètres généralisés de chargement \underline{Q} , comme cela a été défini au chapitre 6 paragraphe 6.3.2.2.

La question qui nous intéresse peut être posée sous deux formes différentes :

- 1) *Forme forte* (conditions suffisantes) : quels sont les chargements \underline{Q} supportables par la structure ?
- 2) *Forme faible* (conditions nécessaires) : quels sont les chargements qui ne peuvent pas être supportés par la structure ?

L'exemple de la torsion nous a appris qu'il n'y a pas d'espoir de répondre à la première question sans information supplémentaire sur le comportement du matériau constituant la structure. En revanche le même exemple nous laisse un espoir de répondre à la deuxième question en toute généralité.

8.1.3 Chargements potentiellement supportables

On note $\mathcal{S}(\underline{Q})$ l'ensemble des *champs de contraintes statiquement admissibles* avec le chargement \underline{Q} :

$$\mathcal{S}(\underline{Q}) = \{ \underline{\sigma}^*, \quad \operatorname{div} \underline{\sigma}^* + \underline{F}(\underline{Q}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega, \quad \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \underline{T}^d(\underline{Q}) \text{ sur } S_T. \} \quad (8.1)$$

On note \mathcal{P} l'ensemble des *champs de contrainte physiquement admissibles* par le matériau constituant la structure :

$$\mathcal{P} = \{ \underline{\sigma}, \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \}. \quad (8.2)$$

Il est clair que la structure ne pourra pas supporter un chargement \underline{Q} pour laquelle on ne pourra pas trouver un champ de contraintes $\underline{\sigma}$ qui soit à la fois statiquement et physiquement admissible. Cette remarque nous conduit à la définition suivante (approche statique des charges limites) :

L'ensemble des chargements \underline{Q} potentiellement supportables par la structure est défini de façon statique (uniquement au moyen de champs de contrainte) par :

$$\mathcal{K} = \{ \underline{Q}, \quad \exists \underline{\sigma} \in \mathcal{S}(\underline{Q}) \cap \mathcal{P}. \} \quad (8.3)$$

Les chargements \underline{Q} situés sur le bord de \mathcal{K} sont dits *chargements limites*² pour la structure.

Commentaires.

1. Tout chargement en dehors de \mathcal{K} ne pourra pas être supporté par la structure (un chargement non potentiellement supportable est certainement non supportable).

2. Pour les chargements contenus dans \mathcal{K} , on notera la réserve introduite par l'adverbe « potentiellement », qui exprime que tous les chargements dans \mathcal{K} ne sont pas nécessairement supportables. Il faut des informations supplémentaires sur la loi de comportement pour en décider.

3. Si le matériau constituant la structure est élastique parfaitement plastique, le résultat théorique énoncé au chapitre 6 assure que tout chargement intérieur à \mathcal{K} est *effectivement supportable*. Le statut des chargements limites est laissé indéterminé, ce qui est sans grande importance pour l'ingénieur qui devra toujours prendre une marge de sécurité.

4. Dès qu'il est possible de trouver un champ de contrainte statiquement admissible avec un chargement \underline{Q} et physiquement admissible, on sait de façon sûre que ce chargement est situé *dans* \mathcal{K} . C'est la raison pour laquelle l'approche par construction de champs de contrainte admissibles est appelée *approche par l'intérieur de \mathcal{K}* .

²On trouve aussi parfois les qualificatifs *ultimes* ou *extrêmes*.

8.1.4 Propriétés du domaine des chargements potentiellement supportables

Le domaine \mathcal{K} possède les propriétés suivantes :

- a) \mathcal{K} est convexe.
- b) \mathcal{K} contient $\underline{0}$.

Pour établir la première propriété, considérons deux chargement \underline{Q}_1 et \underline{Q}_2 dans \mathcal{K} et soient $\underline{\sigma}_1$ et $\underline{\sigma}_2$ deux champs de contrainte associés à ces chargements par la définition (8.3) de \mathcal{K} . Il s'agit de montrer que

$$\forall t \in [0, 1] : \underline{Q}_t = t\underline{Q}_1 + (1-t)\underline{Q}_2 \in \mathcal{K}.$$

Par linéarité de l'application $\underline{\sigma} \rightarrow \underline{Q}(\underline{\sigma})$ on déduit que

$$\underline{Q}(t\underline{\sigma}_1 + (1-t)\underline{\sigma}_2) = t\underline{Q}_1 + (1-t)\underline{Q}_2.$$

Le champ de contrainte $\underline{\sigma}_t = t\underline{\sigma}_1 + (1-t)\underline{\sigma}_2$ est donc en équilibre avec \underline{Q}_t . Ce champ de contrainte est physiquement admissible par convexité de \mathcal{P} qui résulte elle-même de celle de $G(\underline{x})$. Le chargement \underline{Q}_t peut donc être équilibré par le champ physiquement admissible $\underline{\sigma}_t$: c'est un chargement potentiellement supportable.

Pour établir la seconde propriété il suffit de remarquer que le champ de contrainte nul est en équilibre avec le chargement nul et qu'il est de plus physiquement admissible par hypothèse sur $G(\underline{x})$.

Commentaire. Dans le cas (fréquent) d'un chargement à un paramètre, le domaine des chargements potentiellement supportables est donc un intervalle :

$$\mathcal{K} = [-Q_-^u, +Q_+^u]. \quad (8.4)$$

Dans bien des cas, le convexe G est symétrique par rapport à l'origine, ce qui entraîne la même propriété pour \mathcal{K} qui, dans le cas d'un chargement à un paramètre est défini par la seule valeur $Q^u = Q_+^u = Q_-^u$.

8.1.5 Mise en oeuvre de l'approche statique. Exemples

Il n'existe malheureusement pas de procédure systématique permettant la construction de champs de contrainte statiquement et physiquement admissibles. Cette démarche est à inventer sur chaque cas et fait partie de « l'art de l'ingénieur ». Il existe en revanche des méthodes numériques pour cela. L'un des commentaires ci-dessus donne un moyen indirect de détermination de \mathcal{K} . En effet \mathcal{K} ne dépend du comportement du matériau que par son domaine de résistance local G et ne dépend pas du trajet de chargement suivi. Il suffit donc d'imaginer un matériau artificiel, élastique parfaitement plastique, ayant G comme domaine d'élasticité. En suivant des trajets de chargement radiaux dans l'espace des chargements sous la forme $\underline{Q}(t) = Q(t)\underline{Q}^0$ dans différentes directions \underline{Q}^0 , on est ramené, le long de chaque direction à la détermination de la charge limite Q^u le long de cette direction. Cette charge limite se déduit de la résolution du problème d'élasto-plasticité sous ce chargement radial qui se traduit par une réponse (élasto-plastique) $\underline{q}(t)$ des paramètres cinématiques. Q^u est l'asymptote de la courbe $(\underline{q}(t), Q(t))$ (croissante comme on l'a vu au chapitre 6) où le paramètre cinématique $\underline{q}(t)$ est défini par $\underline{q}(t) = \underline{q}(t) \cdot \underline{Q}^0$.

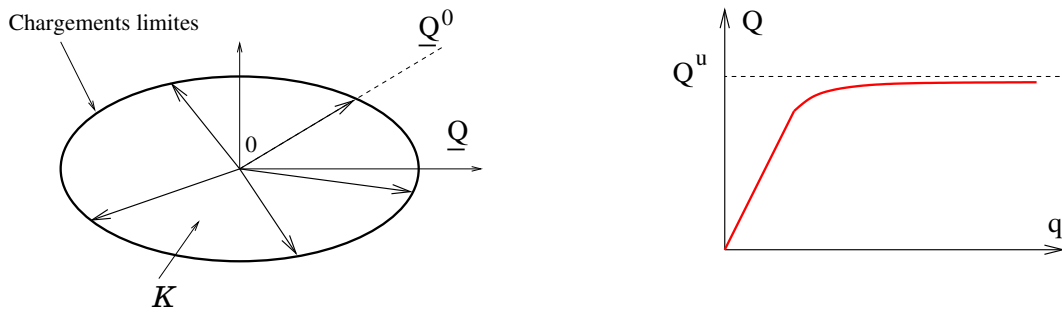


Fig. 8.3: Détermination des chargements limites.

Il existe d'autres méthodes numériques permettant de déterminer \mathcal{K} sans passer par la notion d'une structure élasto-plastique artificielle. Mais il peut être utile de garder en tête que tous les champs de contrainte associés aux chargements limites peuvent être obtenus comme limites de champs de contrainte ayant une existence physique dans une structure élasto-plastique. Un exemple de raisonnement utilisant cette remarque est donné plus bas.

8.1.5.1 Torsion

Revenons à l'exemple de la torsion considéré en introduction. Le couple M^+ est-il potentiellement supportable? La réponse est positive et le champ de contrainte qui l'équilibre peut se deviner aisément grâce aux commentaires qui précèdent. Puisque la loi de comportement importe peu, la solution en contrainte du problème élasto-plastique (artificiel puisque nous ne connaissons pas la loi de comportement exacte du matériau constituant l'arbre) est un champ admissible. La limite de ce champ de contrainte (pour un angle de torsion infini) est donnée par

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta).$$

On vérifie sans difficulté qu'il est statiquement admissible et équilibre le couple M^+ . On en déduit que

$$M^u \geq M^+. \quad (8.5)$$

8.1.5.2 Eprouvette trouée

On considère l'éprouvette trouée représentée sur la figure 8.4. Cette éprouvette de largeur L contient en son centre un trou de diamètre a . Elle est soumise à une force de traction $\underline{Q} = \pm Q \underline{e}_y$ sur ses deux faces supérieure et inférieure et libre de contrainte sur les bords latéraux. Les forces de volume sont nulles. Elle est constituée d'un matériau dont le domaine de résistance est donné par le critère de von Mises. Son épaisseur est suffisante pour que le problème puisse être traité en déformations planes. On cherche à déterminer les charges Q potentiellement supportables par l'éprouvette.

Un champ de contrainte naturel, compte tenu de la présence du trou, est un champ nul dans la bande centrale de l'éprouvette et constant dans les bandes latérales (voir figure 8.4. Pour qu'un tel champ, discontinu, soit statiquement admissible, il doit être à divergence nulle dans les parties où il est différentiable (ce qui est le cas puisque ce champ

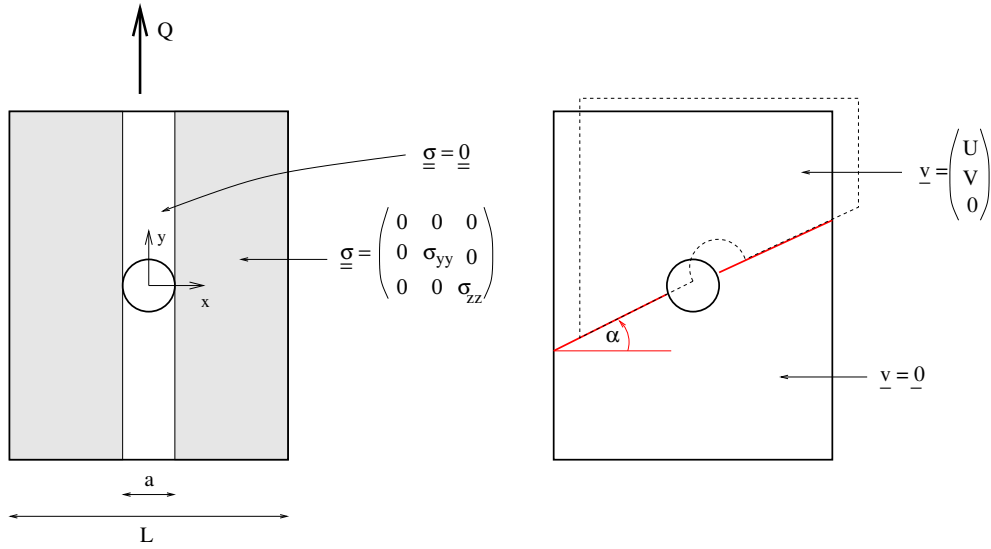


Fig. 8.4: Epreuve trouée. A gauche, champ de contrainte utilisée dans l'approche statique. A droite, champ de vitesse utilisé dans l'approche cinématique.

est constant par morceaux), le vecteur contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ doit être continu à la traversée des lignes de discontinuité et il doit satisfaire les conditions aux limites au bord. Ces conditions imposent dans les bandes latérales :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = \frac{Q}{L - a}.$$

Un premier choix naturel consiste à prendre un champ de contrainte uniaxial dans les bandes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{yy} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y, \quad \sigma_{yy} = \frac{Q}{L - a}, \quad (8.6)$$

et la condition pour que ce champ soit admissible physiquement est :

$$Q \leq \sigma_0(L - a), \quad (8.7)$$

Tout champ uniaxial vérifiant (8.7) est potentiellement supportable ce qui entraîne une minoration de Q^u :

$$Q^u \geq \sigma_0(L - a). \quad (8.8)$$

Si le choix (8.6) est naturel, il n'est pas celui qui donne la meilleure minoration dans (8.8). En effet, gardons en tête le fait qu'à tout chargement potentiellement supportable correspond un champ de contrainte qui peut être solution d'un problème élasto-plastique sous ce chargement. Dans les problèmes de déformations planes, il existe une contrainte hors du plan en réaction à la liaison cinématique imposée par les déformations planes. En d'autres termes, il est probablement astucieux de rechercher un champ de contrainte possédant une composante σ_{zz} non nulle, sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{yy} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z, \quad \sigma_{yy} = \frac{Q}{L - a}. \quad (8.9)$$

Ce champ est statiquement admissible avec \underline{Q} . Un calcul facile donne

$$\sigma_{\text{eq}}^2 = (\sigma_{yy}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}^2).$$

En variant σ_{zz} pour rendre minimale cette expression, on pourra au contraire rendre maximale la contrainte σ_{yy} physiquement permise. Le minimum de σ_{eq} est atteint pour $\sigma_{zz} = \frac{1}{2}\sigma_{yy}$ et vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{yy}$. Un champ de la forme (8.8) sera donc physiquement admissible si

$$Q \leq \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}(L - a),$$

ce qui conduit à une minoration de la charge limite :

$$Q^u \geq \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}(L - a).$$

8.2 Approche cinématique par l'extérieur

On peut proposer une définition dite *cinématique* des chargements limites, faisant intervenir des champs de vitesse. Soit \underline{Q} un élément de \mathcal{K} . D'après la définition même de \mathcal{K} il existe un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ statiquement et physiquement admissible, équilibrant la charge \underline{Q} .

Soit \underline{v} un champ de vitesse cinématiquement admissible avec les données en déplacement du problème, continûment différentiable par morceaux (des discontinuités du champ \underline{v} sur des surfaces S arbitraires sont admises et on en verra l'intérêt plus tard). Le principe des puissances virtuelles, sous la forme (6.24) adaptée aux chargements définis par des paramètres généralisés et aux champs de vitesse pouvant être discontinus, conduit à³ :

$$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}) = \int_{\Omega-S} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}) \, d\Omega + \int_S \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket \, da. \quad (8.10)$$

Le second membre de (8.10) est, au signe près, la puissance des efforts intérieurs développée par le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le champ de vitesse \underline{v} . Cette puissance ne peut être arbitraire compte tenu de la limitation des contraintes apportée par la condition d'admissibilité physique. En termes mathématiques :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}) \leq \pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}(\underline{v})), \quad \text{où} \quad \pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}) = \text{Sup}_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in G(\underline{x})} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}}. \quad (8.11)$$

π est appelée la *fonction d'appui* de G . De même

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket \leq \text{Sup}_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in G(\underline{x})} \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket.$$

La symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}^*$ permet de transformer cette dernière expression en :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket = \sigma_{ij}^* n_j v_i = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* (n_j v_i + n_i v_j) = \underline{\underline{\sigma}}^* : \llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n}.$$

Par suite :

$$\text{Sup}_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in G(\underline{x})} \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket = \pi(\underline{x}, \llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n}).$$

³Nous revenons ici à la notation $\underline{\underline{d}}(\underline{v})$ pour bien montrer qu'il s'agit d'un champ de vitesse de déformation.

8.2. APPROCHE CINÉMATIQUE PAR L'EXTÉRIEUR

(8.10) devient alors :

$$\mathcal{P}_e(\underline{Q}, \underline{v}) \leq \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}) \quad (8.12)$$

où

$$\mathcal{P}_e(\underline{Q}, \underline{v}) = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}), \quad \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}) = \int_{\Omega-S} \pi(\underline{x}, \underline{d}(\underline{v})) \, d\Omega + \int_S \pi(\underline{x}, \llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n}) \, da. \quad (8.13)$$

\mathcal{P}_{rm} est la *puissance résistante maximale* dans le champ \underline{v} . C'est, au signe près, la puissance maximale que peuvent développer les efforts intérieurs compte tenu de la limitation physique à laquelle ils sont soumis.

Commentaire. L'inégalité (8.12) peut être contraposée :

si un chargement Q est tel qu'il existe un champ de vitesse dans lequel la puissance du chargement dépasse la puissance résistante maximale de la structure, alors ce chargement n'est pas potentiellement supportable.

Le champ \underline{v} qui met l'inégalité (8.12) en défaut est appelé *mode de ruine* de la structure sous le chargement en question.

L'inégalité (8.12) est directement exploitable en l'appliquant à tout champ de vitesse \underline{v} . On obtiendra alors une majoration du produit scalaire $\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v})$ et donc des informations (par excès) sur tout chargement \underline{Q} potentiellement supportable.

Mais (8.12) conduit également à une autre *caractérisation* de l'ensemble \mathcal{K} . Fixons \underline{v} et considérons dans l'espace des chargements \underline{Q} le demi-espace défini par

$$\mathcal{E}(\underline{v}) = \{ \underline{Q}^* \text{ tels que } \mathcal{P}_e(\underline{Q}^*, \underline{v}) \leq \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}) \}.$$

L'inégalité (8.12) exprime alors que tout chargement potentiel supportable est contenu dans l'intersection \mathcal{K}^c des espaces $\mathcal{E}(\underline{v})$:

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^c = \bigcap_{\underline{v}} \mathcal{E}(\underline{v}). \quad (8.14)$$

L'ensemble \mathcal{K}^c est défini de façon purement cinématique (à partir de champs de vitesses \underline{v} uniquement). Il est convexe car intersection d'ensembles convexes. Il contient $\underline{0}$ qui appartient à chacun des demi-espaces $\mathcal{E}(\underline{v})$.

On peut démontrer, sous des hypothèses techniques sur le domaine de résistance G , que :

$$\mathcal{K}^c = \mathcal{K},$$

ce qui donne de l'ensemble des chargements potentiellement supportables une caractérisation purement cinématique, qui est (8.14). Il est clair que si l'on ne considère pas dans (8.14) tous les champs de vitesse cinématiquement admissibles pour le problème mais un sous-ensemble, l'approximation de \mathcal{K}^c qui en résultera sera un ensemble plus grand, comme cela est schématisé sur la figure 8.5. En ce sens, l'approche basée sur (8.14) est une *approche par l'extérieur* de \mathcal{K} , alors que l'approche par les champs de contrainte était une approche par l'intérieur.

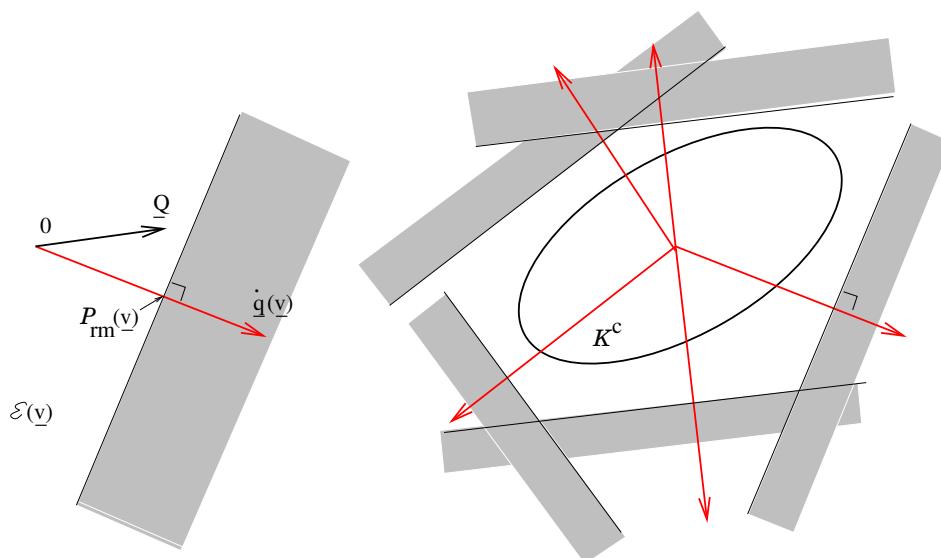


Fig. 8.5: Principe de l'approche cinématique.

8.2.1 Fonctions π

La mise en oeuvre de l'approche cinématique nécessite la connaissance de la fonction π . Notons que π est positive, car $\underline{0}$ appartient à G par hypothèse, et positivement homogène de degré 1, i.e. vérifie

$$\pi(\alpha \underline{d}) = \alpha \pi(\underline{d}) \quad \forall \alpha > 0. \quad (8.15)$$

8.2.1.1 Critère de von Mises

Détaillons le calcul de la fonction π dans le cas du critère de von Mises.

$$\pi(\underline{d}) = \text{Sup}_{\sigma_{\text{eq}}^* \leq \sigma_0} \underline{s}^* : \underline{d}.$$

\underline{d} peut être décomposée en partie sphérique et déviateur :

$$\pi(\underline{d}) = \text{Sup}_{\sigma_{\text{eq}}^* \leq \sigma_0} (p^* : \text{tr} \underline{d} + \underline{s}^* : \underline{d}^d).$$

p^* peut être choisi arbitrairement (\underline{s}^* étant fixé). Il en résulte que le sup sur p^* est $+\infty$ sauf si $\text{tr} \underline{d} = 0$. Dans cette hypothèse, \underline{d} se confond avec son déviateur et le sup à calculer s'écrit

$$\text{Sup}_{\sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}^*\| \leq \sigma_0} \underline{s}^* : \underline{d} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \|\underline{d}\| = \sigma_0 d_{\text{eq}},$$

où $\|\underline{d}\| = (d_{ij}d_{ij})^{1/2}$ désigne la norme euclidienne classique et d_{eq} désigne la *déformation équivalente*.

En conclusion, la fonction π associée au critère de von Mises s'écrit :

$$\pi(\underline{d}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \text{tr} \underline{d} \neq 0 \\ \sigma_0 d_{\text{eq}} & \text{si } \text{tr} \underline{d} = 0, \end{cases} \quad \text{où } d_{\text{eq}} = \left(\frac{2}{3} d_{ij}d_{ij} \right)^{1/2}. \quad (8.16)$$

8.2. APPROCHE CINÉMATIQUE PAR L'EXTÉRIEUR

Lorsque le champ de vitesse est discontinu, un calcul élémentaire donne :

$$\operatorname{tr}(\llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n}) = \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n}, \quad (\llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n})_{\text{eq}}^2 = \frac{1}{3} |\underline{v}|^2 \quad \text{si } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$\pi(\llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} \neq 0 \\ \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} |\llbracket \underline{v} \rrbracket| & \text{si } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0. \end{cases} \quad (8.17)$$

8.2.1.2 Critère de Tresca

Un calcul du même type permet d'établir l'expression de la fonction d'appui du critère de Tresca :

$$\pi(\underline{d}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \operatorname{tr} \underline{d} \neq 0 \\ \frac{\sigma_0}{2} (|d_1| + |d_2| + |d_3|) & \text{si } \operatorname{tr} \underline{d} = 0, \end{cases} \quad (8.18)$$

où les d_i sont les vitesses de déformations principales. Pour un champ de vitesse discontinu, on a :

$$\pi(\llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} \neq 0 \\ \frac{\sigma_0}{2} |\llbracket \underline{v} \rrbracket| & \text{si } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0. \end{cases} \quad (8.19)$$

8.2.2 Champs de vitesse pertinents

Considérer des champs de vitesse pour lesquels l'un des termes de la puissance résistante maximale vaut $+\infty$ n'apporte aucune information. Pour obtenir une information pertinente il suffit de travailler avec les champs de vitesse \underline{v} pour lesquels π est finie : ces champs sont dits *pertinents*. Dans les cas des critères de Tresca et de von Mises, les champs de vitesse pertinents sont *incompressibles*, *i.e.* vérifient

$$\operatorname{tr} \underline{d} = 0, \quad (8.20)$$

dans les zones où ils sont différentiables. Leurs discontinuités doivent satisfaire :

$$\operatorname{tr}(\llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n}) = 0, \quad \text{i.e. } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0. \quad (8.21)$$

Les seules discontinuités de vitesse pertinentes sont tangentielles. En pratique on ne travaille qu'avec des champs de vitesse pertinents.

8.2.3 Le bon choix des champs de vitesse

Il n'existe pas de méthode systématique de construction analytique de champs de vitesse pertinents permettant d'obtenir à coup sûr une détermination précise du domaine \mathcal{K}^c . Des arguments heuristiques permettent néanmoins de guider cette construction⁴. L'estimation donnée par (8.12) devient d'autant plus précise qu'on se rapproche d'une égalité. En vertu d'un commentaire fait plus haut, ce sont les *modes de ruine* de la structure qui ont le plus de chance de se rapprocher de l'égalité ou même de renverser l'inégalité. Les champs de vitesse correspondants sont donc de bons candidats pour tester (8.12) et l'intuition que l'on a de ces modes de ruine est essentielle.

⁴Les arguments qui suivent ne sont que des indications et non des démonstrations.

Si l'intuition fait défaut on peut également essayer d'imaginer des modes d'écoulement plastique d'une structure artificielle composée d'un matériau élastique parfaitement plastique de même domaine de résistance que celui du matériau réel. En effet on se rapproche d'autant plus de l'égalité dans (8.12), donc d'une bonne estimation, qu'on est proche de l'égalité dans (8.11). Mais s'il y a égalité dans (8.11) alors $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{d}}$ vérifie

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \geq \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}} \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in G,$$

ce qui exprime, comme cela a été vu au chapitre 5, que le champ de vitesse de déformation $\underline{\underline{d}}$ est une normale extérieure à G en $\underline{\underline{\sigma}}$. Le champ de vitesse de déformation $\underline{\underline{d}}$ peut donc être vu comme un champ de déformation plastique.

8.2.4 Exemples

8.2.4.1 Torsion

Considérons le champ de vitesse le plus naturel pour l'expérience de torsion :

$$\underline{v} = \frac{\dot{\alpha} r z}{h} \underline{e}_\theta. \quad (8.22)$$

Son tenseur vitesse de déformation et la puissance résistante maximale associée s'écrivent :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{v}) = \frac{\dot{\alpha} r}{2h} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad d_{\text{eq}} = \frac{\dot{\alpha} r}{\sqrt{3}h}, \quad \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}) = 2\pi h \int_0^R \sigma_0 d_{\text{eq}} r dr = \frac{2\pi\sigma_0\dot{\alpha}R^3}{3\sqrt{3}}.$$

La puissance des efforts extérieurs est

$$\mathcal{P}_e(\underline{Q}, \underline{v}) = M\dot{\alpha}.$$

Tout moment de torsion potentiellement supportable doit vérifier :

$$\mathcal{P}_e(\underline{Q}, \underline{v}) \leq \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}), \quad \text{i.e.} \quad M \leq \frac{2\pi\sigma_0 R^3}{3\sqrt{3}} = M^+, \quad \text{et donc} \quad M^u \leq M^+.$$

Cette inégalité, jointe à (8.5), montre que $M^u = M^+$. Dans le cas de la torsion, le couple limite est déterminé de façon exacte.

8.2.4.2 Éprouvette trouée

Reprenons l'exemple de l'éprouvette épaisse trouée présenté au paragraphe 8.1.5.2. Le champ de vitesse imaginé est constant par morceaux. La partie basse de l'éprouvette est fixe et le champ de vitesse \underline{v} y est nul. Dans la partie haute de l'éprouvette, le champ de vitesse est de la forme

$$\underline{v} = U\underline{e}_x + V\underline{e}_y.$$

La ligne de discontinuité fait un angle α avec la direction \underline{e}_x . α est un paramètre qui pourra être optimisé au cours du calcul. La condition de pertinence du champ de vitesse porte sur la discontinuité et s'écrit :

$$V = U \operatorname{tg} \alpha.$$

8.3. CONCLUSION

La discontinuité de vitesse est constante le long de la ligne de discontinuité :

$$|\llbracket \underline{v} \rrbracket| = (U^2 + V^2)^{1/2} = \frac{|U|}{\cos \alpha}.$$

La puissance résistante maximale est donnée par

$$\mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}) = \int_S \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} |\llbracket \underline{v} \rrbracket| da = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{L}{\cos \alpha} - a \right) \frac{|U|}{\cos \alpha}.$$

La puissance des efforts extérieurs est

$$\mathcal{P}_e(Q, \underline{v}) = QV.$$

Par suite, l'inégalité (8.12) entraîne pour tout chargement Q potentiellement supportable :

$$Q \leq \frac{\sigma_0}{\sqrt{3} \sin \alpha} \left(\frac{L}{\cos \alpha} - a \right), \quad \text{i.e.} \quad Q^u \leq \frac{\sigma_0}{\sqrt{3} \sin \alpha} \left(\frac{L}{\cos \alpha} - a \right).$$

Bien qu'il soit possible d'optimiser numériquement par rapport à α nous nous contenterons d'exploiter cette inégalité avec $\alpha = \pi/4$ (optimal si $a \ll L$). Il vient :

$$Q^u \leq \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(L - \frac{a}{\sqrt{2}} \right),$$

ce qui, joint au résultat de l'approche statique, conduit à l'encadrement :

$$\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} (L - a) \leq Q^u \leq \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(L - \frac{a}{\sqrt{2}} \right).$$

8.3 Conclusion

Les chargements *potentiellement supportables* sont ceux qui peuvent être équilibrés par des champs statiquement et plastiquement admissibles. Deux approches peuvent être adoptées pour déterminer l'ensemble de ces chargements :

- L'approche statique consiste à construire explicitement des champs de contrainte admissibles.
- L'approche cinématique utilise uniquement des champs de vitesse admissibles et la puissance maximale que le corps peut opposer aux efforts extérieurs.
- Les deux approches déterminent le même ensemble de chargements potentiellement supportables. Mais lorsqu'on les utilise avec des choix particuliers de champs (de contrainte ou de vitesse) admissibles, l'approche statique permet une approximation par défaut (par l'intérieur) des chargements potentiellement supportables, tandis que l'approche cinématique permet une approche par excès (par l'extérieur).

La réserve exprimée par l'adverbe « potentiellement » est malheureusement nécessaire. Des exemples simples (système de 3 barres en matériau fragile par exemple) permettent de se convaincre que les chargements potentiellement supportables ne sont pas nécessairement supportables. En revanche, dans les structures élastiques parfaitement plastiques, tout chargement potentiellement supportable est effectivement supportable.

Formules et résultats essentiels

• *Approche statique*

▷ Champs de contrainte physiquement admissibles :

$$\mathcal{P} = \{\underline{\underline{\sigma}}, \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega\}.$$

▷ Champs de contrainte statiquement admissibles :

$$\mathcal{S}(Q) = \{\underline{\underline{\sigma}}^*, \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{F}(Q) = \underline{0} \text{ dans } \Omega, \quad \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \underline{T}^d(Q) \text{ sur } \partial_T \Omega.\}.$$

▷ Chargements potentiellement supportables :

$$\mathcal{K} = \{Q, \quad \exists \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}(Q) \cap \mathcal{P}.\}$$

• *Approche cinématique*

▷ Puissance des efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_e(Q, \underline{v}) = Q \cdot \dot{q}(\underline{v}),$$

▷ Puissance résistante maximale dans un champ de vitesse \underline{v} éventuellement discontinu :

$$\mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}) = \int_{\Omega-S} \pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}(\underline{v})) \, d\Omega + \int_S \pi(\underline{x}, \llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes_s \underline{n}) \, da.$$

▷ π est la fonction d'appui du domaine de résistance :

$$\pi(\underline{x}, \underline{\underline{d}}) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in G(\underline{x})} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}}.$$

▷ Un champ de vitesse est *pertinent* si $\pi(\underline{\underline{d}})$ est fini en tout point du corps Ω .

▷ Tout chargement Q potentiellement supportable vérifie :

$$\mathcal{P}_e(Q, \underline{v}) \leq \mathcal{P}_{\text{rm}}(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \text{ cinématiquement admissible.}$$

• *Critère de von Mises*

▷ Fonction d'appui :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = +\infty \quad \text{si } \text{tr} \underline{\underline{d}} \neq 0, \quad \pi(\underline{\underline{d}}) = \sigma_0 d_{\text{eq}} \quad \text{si } \text{tr} \underline{\underline{d}} = 0, \quad \text{où } d_{\text{eq}} = \left(\frac{2}{3} d_{ij} d_{ij} \right)^{1/2}$$

▷ Champs pertinents :

$$\text{tr} \underline{\underline{d}} = 0, \quad \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0.$$

Chapitre 9

Références bibliographiques

Cette liste de référence ne vise pas à l'exhaustivité. Elle contient un choix de textes, majoritairement en français, accessible à des non spécialistes, permettant au lecteur de ce cours d'en approfondir certains aspects.

Mécanique des Milieux Continus

Ce cours suppose une certaine familiarité avec les notions de base des Milieux Continus et avec l'élasticité linéaire. Il constitue une suite naturelle aux cours de J. Salençon [2] et de P. le Tallec [1] dont il reprend largement les notations.

- [1] LE TALLEC, P. *Mécanique des Milieux Continus*. Cours de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (2008).
- [2] SALENÇON, J. *Mécanique des Milieux Continus (3 tomes)*. Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (2001).

D'autres ouvrages présentent la Mécanique des Milieux Continus sous des éclairages différents et complémentaires. On pourra par exemple consulter :

- [3] BAMBERGER, Y. *Mécanique de l'Ingénieur. II : Milieux déformables*. Hermann, Paris (1981).
- [4] CHADWICK, P. *Continuum Mechanics : concise theory and problems*. Dover, Pub., Mineola, USA (1999).
- [5] GERMAIN, P. *Cours de Mécanique des Milieux Continus, vol. I*. Masson, Paris (1973).

Enfin, le cours [6] est consacré au calcul numérique en Mécanique des solides, avec certains chapitres spécifiquement dédiés à la mécanique linéaire de la rupture et à l'élastoplasticité :

- [6] BONNET, M. *Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis*. Cours de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (2006).

Mécanique des Matériaux

Le comportement mécanique des matériaux peut être abordé sous l'angle phénoménologique (modèles *ad-hoc* décrivant bien les phénomènes observés macroscopiquement) ou

sous l'angle des mécanismes microscopiques (détaillant l'origine des phénomènes observés et proposant un lien entre les mécanismes microscopiques et macroscopiques). Bien des aspects de ces comportements n'ont pas été abordés ici, notamment la viscoélasticité, la viscoplasticité et l'endommagement. Les références suivantes permettront de combler certaines de ces lacunes :

- [7] FRANÇOIS, D., PINEAU, A., ZAOUI, A. *Mécanique des Matériaux*. Hermès, Paris (1991).
- [8] KELLY, A., MACMILLAN, N.H. *Strong Solids*. Clarendon-Press, Oxford (1986).
- [9] LEMAÎTRE, J., CHABOCHE, J.L. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris (1988).
- [10] MANDEL, J. *Propriétés Mécaniques des Matériaux*. Eyrolles, Paris (1978).
- [11] MC CLINTOCK, F.A., ARGON, A.S. *Mechanical behavior of materials*. Addison-Wesley, Reading (1966).

Mécanique linéaire de la Rupture

Si les ouvrages de Mécanique de la Rupture en langue anglaise sont relativement nombreux, il n'en est pas de même en langue française. Le livre de Bui [12], qui est l'un des tout premiers ouvrages français sur la Mécanique linéaire de la Rupture, reste une référence. L'ouvrage plus récent de J.B. Leblond [14] approfondit les aspects tridimensionnels. Il aborde également la question de la rupture des matériaux ductiles, laissée de côté dans ce cours.

- [12] BUI, H.D. *Mécanique de la Rupture Fragile*. Masson, Paris (1978).
- [13] GRISVARD, P. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, vol. of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman, Boston (1985).
- [14] LEBLOND, J.B. *Mécanique de la Rupture fragile et ductile*. Hermès, Paris (2002).
- [15] MAUGIS, D. *Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids*, vol. 130 of *Solid-State Sciences*. Springer, Berlin (1999).
- [16] MIANNAY, D. *Mécanique de la Rupture*. Les Editions de Physique, Paris (1995).
- [17] SIH, G.S. *Handbook of Stress Intensity Factors*. Lehigh University, Bethlehem (USA) (1973).

Elasto-plasticité

La démarche adoptée ici est également développée dans d'autres ouvrages de la littérature récente sur la plasticité.

- [18] HALPHEN, B., SALENÇON, J. *Elasto-plasticité*. Presses des Ponts et Chaussées, Paris (1987).
- [19] LUBLINER, J. *Plasticity Theory*. Macmillan, New-York (1990).
- [20] MAUGIN, G. *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, Cambridge (1992).

Si cette présentation moderne est celle qui a notre préférence, on doit explicitement mentionner le livre de R. Hill [22], déjà ancien mais en avance sur son temps et qui reste une référence pour les solutions analytiques en plasticité. Une perspective historique intéressante sur le développement des mécanismes physiques de la plasticité entre les deux guerres se trouve dans les travaux de Taylor [21].

[21] BATCHELOR, G. K. *Scientific papers of G. I. Taylor*. Cambridge University Press, Cambridge (1971).

[22] HILL, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford (1950).

Les résultats expérimentaux présentés dans ce cours sont tirés de la thèse de Bui publiée dans la référence [23].

[23] BUI, H.D. Evolution de la frontière du domaine élastique des métaux avec l'écroutissage plastique et le comportement élastoplastique d'un agrégat de cristaux cubiques. *Mémorial de l'Artillerie Française*, **1**, 141–165 (1970).

[24] PHILLIPS, A.R. Foundations of plasticity. In Ch. Massonnet, W. Olszak, A. Phillips (eds.), *Plasticity in structural engineering : fundamentals and applications*, CISM Lecture Notes 241, pp. 187–272. Springer-Verlag, Wien (1979).

L'introduction des matériaux standard généralisés est due à Halphen et Nguyen [27]. Les résultats expérimentaux sur la mesure des sources de chaleur sont tirés des travaux de Chrysochoos [25]. Des illustrations de travaux plus récents peuvent être trouvées à l'adresse internet : <http://www.lmgc.univ-montp2.fr>

[25] CHRYSOCHOOS, A., CHEZEAUX, J.C., CAUMON, H. Analyse thermomécanique des lois de comportement par thermographie infrarouge. *Revue Phys. Appl.*, **24**, 215–225 (1989).

[26] GERMAIN, P., NGUYEN, Q.S., SUQUET, P. Continuum Thermodynamics. *J. Appl. Mech.*, **50**, 1010–1020 (1983).

[27] HALPHEN, B., NGUYEN, Q.S. Sur les matériaux standard généralisés. *J. Mécanique*, **14**, 39–63 (1975).

[28] TAYLOR, G.I., QUINNEY, H. The latent energy remaining in a metal after cold working. *Proc. Roy. Soc. A*, **143**, 307–326 (1934).

Les problèmes mathématiques de la plasticité sont abordés en particulier dans les références suivantes :

[29] MOREAU, J.J. Application of Convex Analysis to the treatment of elasto-plastic systems. In P. Germain, B. Nayroles (eds.), *Application of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics*, Springer Lecture Notes in Maths 503, pp. 56–89. Springer-Verlag, New-York (1976).

[30] SUQUET, P. Sur les équations de la plasticité : existence et régularité des solutions. *J. Mécanique*, **20**, 3–39 (1981).

[31] TEMAM, R. *Mathematical problems in Plasticity*. Gauthier-Villars, Paris (1987).

Le lecteur intéressé par les méthodes numériques en Plasticité pourra approfondir le sujet en particulier dans les ouvrages suivants :

- [32] BESSON, J., CAILLETAUD, G., CHABOCHE, J.L., FOREST, S. *Mécanique Non Linéaire des Matériaux*. Hermès, Paris (2001).
- [33] SIMO, J.C., HUGHES, T.J.R. *Computational Inelasticity*, vol. 7 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New-York (1998).

Charges limites

Un exposé plus complet sur le « calcul à la rupture » (théorie des charges limites) se trouve dans les deux références suivantes :

- [34] SALENÇON, J. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'ENPC, Paris (1983).
- [35] SALENÇON, J. *Elasto-plasticité et calcul à la rupture*. Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (2001).

Annexe A

Rappels d'élasticité linéaire

Pour la commodité du lecteur, certains résultats utiles ont été regroupés dans cette annexe, sans prétendre à l'exhaustivité. Pour plus de détails le lecteur se reportera utilement au cours de Mécanique des Milieux Continus de J. Salençon [2].

A.1 Tenseur d'élasticité

On se place dans le cadre des petites perturbations : les changements de géométrie sont négligés et les déformations du milieu sont décrites par le tenseur (symétrique) des déformations infinitésimales :

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\xi + {}^T\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\xi \right),$$

où $\underline{\underline{\underline{\xi}}}$ est le champ de déplacement. Les contraintes sont décrites par le tenseur (symétrique) de Cauchy $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$.

A.1.1 Comportement élastique linéaire

En l'absence de contraintes initiales et de variation de température (hypothèses suffisantes pour notre propos) le comportement élastique linéaire s'exprime par une relation linéaire entre contraintes et déformations :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}, \quad \text{ou inversement} \quad \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\underline{\sigma}}}.$$

Les tenseurs de raideur $\underline{\underline{\underline{C}}}$ et de souplesse (ou complaisance) $\underline{\underline{\underline{S}}}$ sont des tenseurs du quatrième ordre présentant les symétries dites *mineures* (conséquence de la symétrie de $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$ et $\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}$) et *majeures* (conséquence de l'existence d'une énergie élastique) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{symétries mineures} : C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}, \\ \text{symétries majeures} : C_{ijkl} = C_{klij}. \end{array} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Matériaux isotropes. Dans le cas de matériaux isotropes les tenseurs $\underline{\underline{\underline{C}}}$ et $\underline{\underline{\underline{S}}}$ peuvent s'exprimer en fonction de deux constantes matérielles et les relations entre contraintes et

déformations prennent les formes suivantes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{i}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (\text{A.2})$$

ou, de façon équivalente :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{i}} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}. \quad (\text{A.3})$$

Les constantes de Lamé λ et μ ainsi que le module d'Young E sont homogènes à une pression et se mesurent en MPa, tandis que le coefficient de Poisson ν est sans dimension.

Partie sphérique et déviateur. Une autre écriture des relations (A.2) et (A.3) peut être obtenue en raisonnant sur les parties sphériques et déviatoriques des tenseurs de contrainte et de déformation. Pour un tenseur symétrique du second ordre $\underline{\underline{\alpha}}$, on considère la décomposition :

$$\underline{\underline{\alpha}} = \alpha_m \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{a}}, \quad \alpha_m = \frac{1}{3} \text{Tr} \underline{\underline{\alpha}}, \quad \text{Tr} \underline{\underline{a}} = 0. \quad (\text{A.4})$$

$\alpha_m \underline{\underline{i}}$ est la partie sphérique de $\underline{\underline{\alpha}}$, tandis que $\underline{\underline{a}}$ est son déviateur.

La décomposition en partie sphérique et déviateur d'un tenseur symétrique d'ordre 2 est une décomposition *orthogonale* au sens suivant : les tenseurs sphériques, i.e. de la forme $p \underline{\underline{i}}$, $p \in \mathbb{R}$, forment un espace vectoriel (de dimension 1) tandis que les déviateurs appartiennent à l'espace vectoriel orthogonal (de dimension 5) comme il résulte immédiatement du fait que les déviateurs sont à trace nulle :

$$\underline{\underline{\alpha}} = \alpha_m \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{a}}, \quad \alpha_m \underline{\underline{i}} : \underline{\underline{a}} = \alpha_m \text{Tr} \underline{\underline{a}} = 0. \quad (\text{A.5})$$

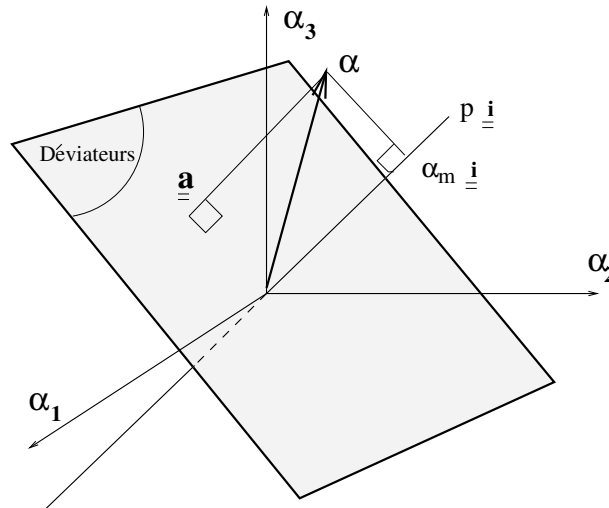


Fig. A.1: Décomposition orthogonale en partie sphérique et déviatorique d'un tenseur d'ordre 2

Cette décomposition orthogonale peut s'écrire mathématiquement à l'aide de deux projecteurs orthogonaux, $\underline{\underline{J}}$ étant le projecteur sur les tenseurs sphériques et $\underline{\underline{K}}$ étant le

A.1. TENSEUR D'ÉLASTICITÉ

projecteur sur l'espace des tenseurs déviatoriques, orthogonal au précédent, la somme de ces 2 projecteurs étant l'identité pour les tenseurs symétriques d'ordre 2 notée $\underline{\underline{I}}$:

$$\alpha_m \underline{\underline{i}} = \underline{\underline{J}} : \underline{\underline{\alpha}}, \quad \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{\alpha}}, \quad \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{I}}.$$

On vérifie sans difficulté que

$$\underline{\underline{J}} = \frac{1}{3} \underline{\underline{i}} \otimes \underline{\underline{i}}, \quad \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{J}},$$

ou encore en détaillant les composantes :

$$I_{ijkh} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}), \quad J_{ijkh} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kh}, \quad K_{ijkh} = I_{ijkh} - J_{ijkh}.$$

En appliquant cette décomposition à $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ on obtient une expression équivalente de (A.2) sous la forme :

$$\sigma_m = 3k \varepsilon_m, \quad 3k = 3\lambda + 2\mu, \quad \underline{\underline{s}} = 2\mu \underline{\underline{e}}, \quad (\text{A.6})$$

où $\underline{\underline{s}}$ et $\underline{\underline{e}}$ sont les déviateurs des contraintes et des déformations. k est le module de rigidité à la compression (isotrope) du matériau, tandis que μ est son module de rigidité au cisaillement.

Tenseurs symétriques isotropes du 4ème ordre. L'écriture (A.6) de la loi de comportement conduit à la décomposition suivante du tenseur d'élasticité $\underline{\underline{C}}$ sur les tenseurs $\underline{\underline{J}}$ et $\underline{\underline{K}}$:

$$\underline{\underline{C}} = 3k \underline{\underline{J}} + 2\mu \underline{\underline{K}}, \quad (\text{A.7})$$

comme on le vérifie facilement en calculant $\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$.

On note sous forme abrégée $\underline{\underline{C}} = (3k, 2\mu)$ un tenseur de la forme (A.7), du 4ème ordre, isotrope et possédant les symétries (A.1) d'un tenseur d'élasticité. L'algèbre sur ces tenseurs est particulièrement simple en raison des propriétés de projecteurs orthogonaux de $\underline{\underline{J}}$ et $\underline{\underline{K}}$:

$$\underline{\underline{J}} : \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}}, \quad \underline{\underline{J}} : \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{J}} = 0, \quad \underline{\underline{K}} : \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}.$$

Les règles de calculs sont les suivantes : si $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{C}'}$ sont de la forme (A.7), alors

$$\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{C}'} = (3(k + k'), 2(\mu + \mu')), \quad \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{C}'} = (9kk', 4\mu\mu'), \quad \underline{\underline{C}}^{-1} = \left(\frac{1}{3k}, \frac{1}{2\mu} \right).$$

Enfin, notons les quantités C_{iijj} et C_{ijij} sont des invariants de $\underline{\underline{C}}$ qui permettent une décomposition simple de $\underline{\underline{C}}$ sur les projecteurs $\underline{\underline{J}}$ et $\underline{\underline{K}}$. Ce sont des invariants car $C_{iijj} = 3\underline{\underline{C}} :: \underline{\underline{J}}$ et $C_{ijij} = \underline{\underline{C}} :: \underline{\underline{I}}$ et car $\underline{\underline{C}} :: \underline{\underline{J}}$ et $\underline{\underline{C}} :: \underline{\underline{I}}$ sont des tenseurs d'ordre 0 (des scalaires) donc invariants par changement de base. Quant à la décomposition, un calcul simple, utilisant les égalités $\underline{\underline{J}} :: \underline{\underline{J}} = 1$ et $\underline{\underline{K}} :: \underline{\underline{K}} = 5$, permet de montrer que :

$$\underline{\underline{C}} = \frac{1}{3}C_{iijj} \underline{\underline{J}} + \frac{1}{5} \left(C_{ijij} - \frac{1}{3}C_{iijj} \right) \underline{\underline{K}}. \quad (\text{A.8})$$

A.2 Problème d'équilibre en élasticité linéaire

Soit Ω le domaine occupé par le milieu déformable dont on souhaite étudier l'équilibre. Ce corps est soumis à des forces de volume \underline{F} , à des déplacements imposés $\underline{\xi}^d$ sur une partie $S_{\underline{\xi}}$ de son bord et à une densité surfacique d'efforts \underline{T}^d sur la partie complémentaire $S_{\underline{T}}$ du bord. Les équations permettant de déterminer le déplacement $\underline{\xi}$ à partir de la position initiale et les contraintes $\underline{\sigma}$ à l'équilibre s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \text{Equilibre :} & \quad \text{div } \underline{\sigma} + \rho \underline{F} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{Comportement :} & \quad \underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{Compatibilité :} & \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi} + {}^T \underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi} \right) \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{Conditions aux limites :} & \quad \underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \quad \text{sur } S_{\underline{T}}, \quad \underline{\xi} = \underline{\xi}^d \quad \text{sur } S_{\underline{\xi}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

Moyennant certaines conditions sur le chargement, le problème d'équilibre (A.9) admet une solution en général unique pour les champs de contrainte et de déformation, le champ de déplacement étant éventuellement défini à un déplacement rigidifiant près.

Cette solution a des propriétés variationnelles très utiles. Soient :

- $\mathbb{C}(S_{\underline{\xi}}, \underline{\xi}^d)$ l'ensemble des *champs de déplacement cinématiquement admissibles* avec les déplacements imposés $\underline{\xi}^d$ sur $S_{\underline{\xi}}$:

$$\mathbb{C}(S_{\underline{\xi}}, \underline{\xi}^d) = \{ \underline{\xi}' \text{ tels que } \underline{\xi}' = \underline{\xi}^d \text{ sur } S_{\underline{\xi}} \},$$

- $W(\underline{\xi}')$ l'énergie élastique du corps pour un champ de déplacement cinématiquement admissible $\underline{\xi}'$:

$$W(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}) w(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}')) \, d\Omega,$$

où $\rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}'$ est la densité d'énergie élastique du matériau,

- $-L(\underline{\xi}')$ le potentiel des efforts extérieurs :

$$L(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}) \underline{F}(\underline{x}) \cdot \underline{\xi}'(\underline{x}) \, d\Omega + \int_{S_{\underline{T}}} \underline{T}^d(\underline{x}) \cdot \underline{\xi}'(\underline{x}) \, da,$$

- P l'énergie potentielle totale du corps dans le champ de déplacement virtuel $\underline{\xi}'$:

$$P(\underline{\xi}') = W(\underline{\xi}') - L(\underline{\xi}'),$$

alors la solution $\underline{\xi}$ du problème (A.9) rend minimum l'énergie potentielle totale :

$$P \text{ minimale sur } \mathbb{C}(S_{\underline{\xi}}, \underline{\xi}^d).$$

¹Pour simplifier nous supposons que toutes les composantes de $\underline{\xi}$ sont imposées sur $S_{\underline{\xi}}$, mais des conditions aux limites plus générales peuvent être envisagées.

A.3 Problèmes plans et anti-plans

Dans les problèmes plans et anti-plans les contraintes et les déformations sont des fonctions de deux variables d'espace (x, y) et certaines de leurs composantes sont nulles.

En *contraintes planes*², le tenseur des contraintes est plan, le déplacement est tridimensionnel, le tenseur des déformations est triaxial :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(x, y) &= \sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_{xy} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \sigma_{yy} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y, \\ \underline{\underline{\xi}}(x, y) &= \xi_x \underline{e}_x + \xi_y \underline{e}_y + \xi_z \underline{e}_z, \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(x, y) &= \varepsilon_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \varepsilon_{xy} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \varepsilon_{yy} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \varepsilon_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.10})$$

En *déformations planes*³, le déplacement est plan, le tenseur des déformations est également plan et le tenseur des contraintes est triaxial :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{\xi}}(x, y) &= \xi_x \underline{e}_x + \xi_y \underline{e}_y, \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(x, y) &= \varepsilon_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \varepsilon_{xy} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \varepsilon_{yy} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y, \\ \underline{\underline{\sigma}}(x, y) &= \sigma_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_{xy} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \sigma_{yy} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.11})$$

Dans les problèmes en contraintes planes ou en déformations planes et en l'absence de forces de volume ($\underline{F} = \underline{0}$, cas particulier du cas où les forces de volume dérivent d'un potentiel), les équations d'équilibre du problème peuvent être automatiquement satisfaites en écrivant le tenseur des contraintes à l'aide d'une *fonction d'Airy* $\Phi(x, y)$:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(x, y), \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, y). \quad (\text{A.12})$$

Lorsque le matériau est linéaire élastique, homogène et isotrope, on montre à l'aide de la loi de comportement et des relations de compatibilité que la fonction d'Airy est *biharmonique* sur le domaine d'étude :

$$\Delta \Delta \Phi(x, y) = 0. \quad (\text{A.13})$$

La fonction Φ est alors déterminée par les conditions aux limites du problème.

L'expression des relations (A.12) en coordonnées polaires est souvent utile :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}. \quad (\text{A.14})$$

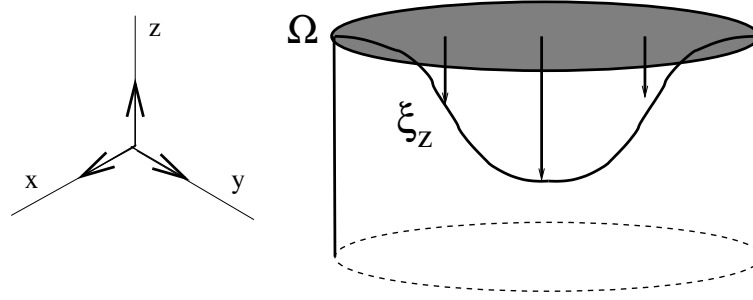
Un problème *anti-plan*⁴ est caractérisé par le fait que seule la composante selon Oz du déplacement est non nulle :

$$\underline{\underline{\xi}} = \xi_z(x, y) \underline{e}_z.$$

²Approximation fréquemment rencontrée dans les structures minces.

³Approximation fréquemment rencontrée dans les structures épaisses chargées dans leur plan.

⁴Par exemple, le problème de la torsion d'un arbre cylindrique se ramène à un problème anti-plan.

**Fig. A.2:** Problème anti-plan

Seules les composantes ε_{xz} et ε_{yz} (glissements anti-plans) du tenseur de déformation sont non nulles, et dans l'hypothèse d'un comportement isotrope du matériau, seules les composantes de cisaillement anti-plan du tenseur des contraintes sont non nulles :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x, y) = \varepsilon_{xz} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) + \varepsilon_{yz} (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y),$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, y) = \sigma_{xz} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) + \sigma_{yz} (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y).$$

En l'absence de forces de volume, les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.15})$$

On peut alors déduire le champ de contrainte d'une fonction $\varphi(x, y)$ appelée *fonction de contrainte* telle que

$$\sigma_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y), \quad \sigma_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y).$$

Les équations d'équilibre (A.15) sont alors automatiquement satisfaites. Lorsque le matériau est élastique linéaire, homogène et isotrope, on montre à l'aide de la loi de comportement et des relations de compatibilité⁵ que la fonction de contrainte est *harmonique* sur le domaine d'étude :

$$\Delta \varphi(x, y) = 0. \quad (\text{A.16})$$

La fonction de contrainte est déterminée par les conditions aux limites du problème.

A.4 Problèmes classiques

Nous traitons ici trois problèmes classiques en Mécanique des Structures dont les solutions sont détaillées dans Salençon [2], auquel le lecteur est renvoyé pour plus d'information.

A.4.1 Torsion d'un arbre cylindrique

Un arbre cylindrique de section droite circulaire, de rayon R , de hauteur h , est soumis à une torsion : sa base inférieure est bloquée latéralement, sa base supérieure est

⁵

$$\frac{\partial \xi_z}{\partial x} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial \xi_z}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \xi_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \xi_z}{\partial y},$$

A.4. PROBLÈMES CLASSIQUES

soumise à une rotation d'angle α , aucun effort le long de \underline{e}_z n'est appliqué sur ces bases. Les forces de volume sont nulles, le bord extérieur de l'arbre est libre de contrainte. Les conditions aux limites du problème sont donc :

$$\left. \begin{array}{l} \text{en } z = 0 : \quad \xi_r = \xi_\theta = 0, \quad T_z = 0, \\ \text{en } z = h : \quad \xi_r = 0, \quad \xi_\theta = \alpha r, \quad T_z = 0, \\ \text{en } r = R : \quad \underline{T} = \underline{0}. \end{array} \right\} \quad (\text{A.17})$$

a) A quelles conditions un champ de contrainte de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau(r, \theta, z) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad (\text{A.18})$$

est-il statiquement admissible avec les données du problème ? Calculer pour un tel champ de contrainte les éléments de réduction en $r = 0, z = h$ du torseur des efforts extérieurs appliqués à la section droite $z = h$.

b) En postulant la forme du champ de déplacement sous la forme :

$$\xi_r = 0, \quad \xi_\theta = \frac{\alpha r z}{h}, \quad \xi_z = 0, \quad (\text{A.19})$$

construire la solution du problème posé. Quelle est la relation entre le couple appliqué à la section supérieure et l'angle de torsion α .

Eléments de réponse

a) Un champ de la forme (A.18) satisfait automatiquement la condition de bord libre en $r = R$ (car $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$) ainsi que les conditions d'effort nul le long de \underline{e}_z sur les sections inférieure et supérieure du cylindre (car $\sigma_{zz} = 0$). De plus, pour un champ de la forme (A.18) les équations d'équilibre $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ se réduisent à (cf le formulaire en coordonnées cylindriques donné en annexe au paragraphe B) :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = 0.$$

Un champ de la forme (A.18) est donc statiquement admissible avec les données du problème à condition que le cisaillement τ ne dépende que de r : $\tau(r, \theta, z) = \tau(r)$. Dans ces conditions, les éléments de réduction en $r = 0, z = h$ des efforts extérieurs appliqués sur la section supérieure du cylindre sont :

$$\underline{\underline{\mathcal{R}}} = \int_{0 \leq r \leq R} \underline{T} \, da = \int_{0 \leq r \leq R} \tau(r) \underline{e}_\theta \, da = \underline{0},$$

(car les vecteurs \underline{e}_θ en θ et $\theta + \pi$ sont opposés et leurs contributions s'annulent dans l'intégrale ci-dessus) et

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \int_{0 \leq r \leq R} \underline{OM} \wedge \underline{T} \, da = 2\pi \int_0^R r \underline{e}_r \wedge \tau(r) \underline{e}_\theta \, r dr = M \underline{e}_z,$$

avec

$$M = 2\pi \int_0^R r^2 \tau(r) dr.$$

b) Le champ de déplacement (A.19) est cinématiquement admissible avec les données en déplacement (A.17) du problème. Le champ de déformations associé est

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\alpha r}{2h} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta).$$

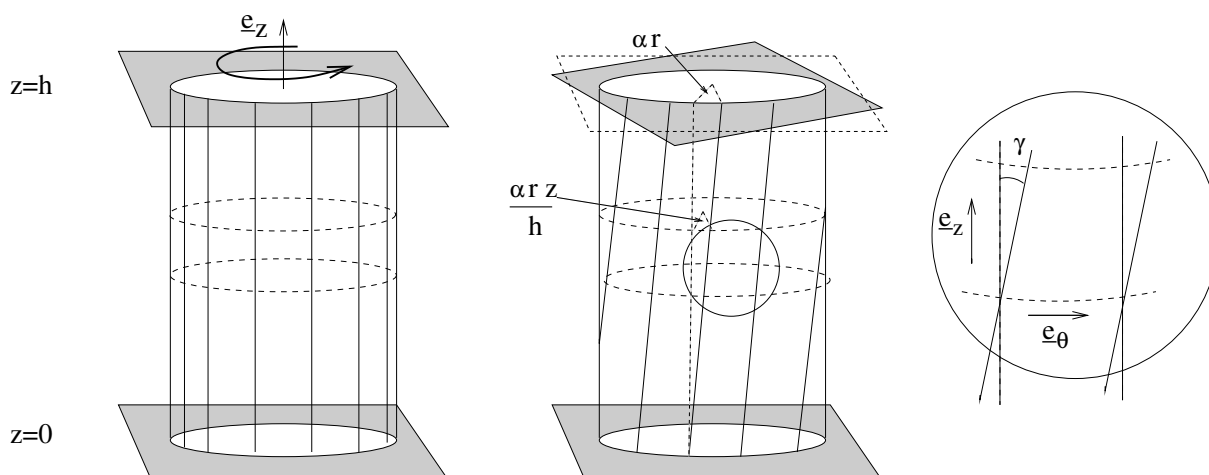


Fig. A.3: Torsion d'un arbre cylindrique.

C'est un état de *glissement simple* dans le plan $(\underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ comme représenté sur la figure A.3), l'amplitude du cisaillement étant donnée par $\gamma = \frac{\alpha r}{h}$. Le champ de contrainte qui s'en déduit par la loi de comportement est :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mu \alpha r}{h} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta). \quad (\text{A.20})$$

Il est de la forme (A.18) avec $\tau(r) = \frac{\mu \alpha r}{h}$, donc statiquement admissible avec les données du problème. Toutes les équations du problème (équilibre, comportement, compatibilité, conditions aux limites) sont donc satisfaites par les champs de déplacement (A.18) et de contrainte (A.20). En vertu de l'unicité (à un déplacement rigide près qui se réduit ici à une translation le long de Oz) on a donc établi la solution du problème d'élasticité ainsi posé. Le moment appliqué à l'arbre s'écrit

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}} = M \underline{e}_z, \quad M = \int_0^R r^2 \tau(r) dr = \frac{\pi \mu \alpha R^4}{2}.$$

La quantité $I = \frac{\pi R^4}{2}$ est le *moment géométrique de torsion* de l'arbre par rapport à son axe.

A.4.2 Sphère creuse sous pression interne

Un réservoir prend la forme d'une sphère creuse, de rayon intérieur a et de rayon extérieur b . Il contient un fluide à la pression p , tandis que sa paroi extérieure est libre de contrainte. Les forces de volume sont nulles et l'état initial est l'état naturel sans contrainte.

a) A quelle condition un champ de déplacement de la forme

$$\underline{\underline{\xi}} = \xi(r) \underline{e}_r, \quad (\text{A.21})$$

est-il cinématiquement admissible avec les données du problème? Ecrire le champ de déformation associé.

b) A quelle condition un champ de contrainte de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{rr}(r) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi), \quad (\text{A.22})$$

est-il statiquement admissible avec les données du problème?

A.4. PROBLÈMES CLASSIQUES

c) En supposant que le matériau constituant le réservoir est homogène, élastique, linéaire et isotrope, établir que la solution du problème posé s'écrit sous la forme (A.21) et (A.22) avec :

$$\left. \begin{aligned} \xi(r) &= \frac{pf}{1-f} \frac{1}{E} \left((1-2\nu)r + \frac{1+\nu}{2} \frac{b^3}{r^2} \right), & f &= \frac{a^3}{b^3}, \\ \sigma_{rr}(r) &= \frac{pf}{1-f} \left(1 - \frac{b^3}{r^3} \right), & \sigma_{\theta\theta}(r) &= \frac{pf}{1-f} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.23})$$

Eléments de solution.

a) Il n'y a pas de condition cinématique au bord du réservoir. Tout champ ξ est donc cinématiquement admissible. Le champ de déformation qui dérive d'un champ de la forme (A.21) s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \xi}{\partial r}(r) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\xi(r)}{r} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi). \quad (\text{A.24})$$

b) Un champ de contrainte est statiquement admissible s'il satisfait les équations d'équilibre et les conditions aux limites (en force imposée) sur le bord du domaine :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{0}, \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -p \underline{n} \quad \text{en } r = a, \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad \text{en } r = b.$$

Compte tenu de la forme (A.22) du champ $\underline{\underline{\sigma}}$ ces conditions se réduisent à :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} = 0, \quad \sigma_{rr}(a) = -p, \quad \sigma_{rr}(b) = 0. \quad (\text{A.25})$$

c) Par symétrie sphérique, il est raisonnable de chercher le déplacement sous la forme radiale (A.21). L'application de la loi de comportement (A.2) au tenseur de déformation (A.24) conduit à un tenseur des contraintes sous la forme (A.22). L'équation d'équilibre (A.25) fournit alors une équation différentielle pour ξ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{\xi}{r} \right) = 0,$$

dont les solutions sont de la forme $\xi(r) = Ar + B/r^2$. En reportant cette forme dans l'expression des contraintes et en appliquant les conditions aux limites, on obtient :

$$A = \frac{pf}{1-f} \frac{1}{3\lambda + 2\mu} = \frac{pf}{1-f} \frac{1-2\nu}{E}, \quad B = \frac{pf}{1-f} \frac{b^3}{4\mu} = \frac{pf}{1-f} \frac{1+\nu}{2E} b^3$$

ce qui conduit à la forme annoncée de la solution.

A.4.3 Flexion pure d'une poutre.

Le corps considéré est une barre cylindrique homogène de génératrices parallèles à Ox , de longueur $2L$, de section droite rectangulaire $\Sigma = \{-h \leq y \leq +h, -b/2 \leq z \leq +b/2\}$. La pesanteur est négligée et l'état initial du cylindre est l'état naturel sans contrainte. La barre subit une flexion normale à Oz sous l'effet d'un moment $\underline{M} = \pm M \underline{e}_z$ appliqué à ses extrémités $x = \pm L$. Par symétrie on ne considère que la moitié de la barre

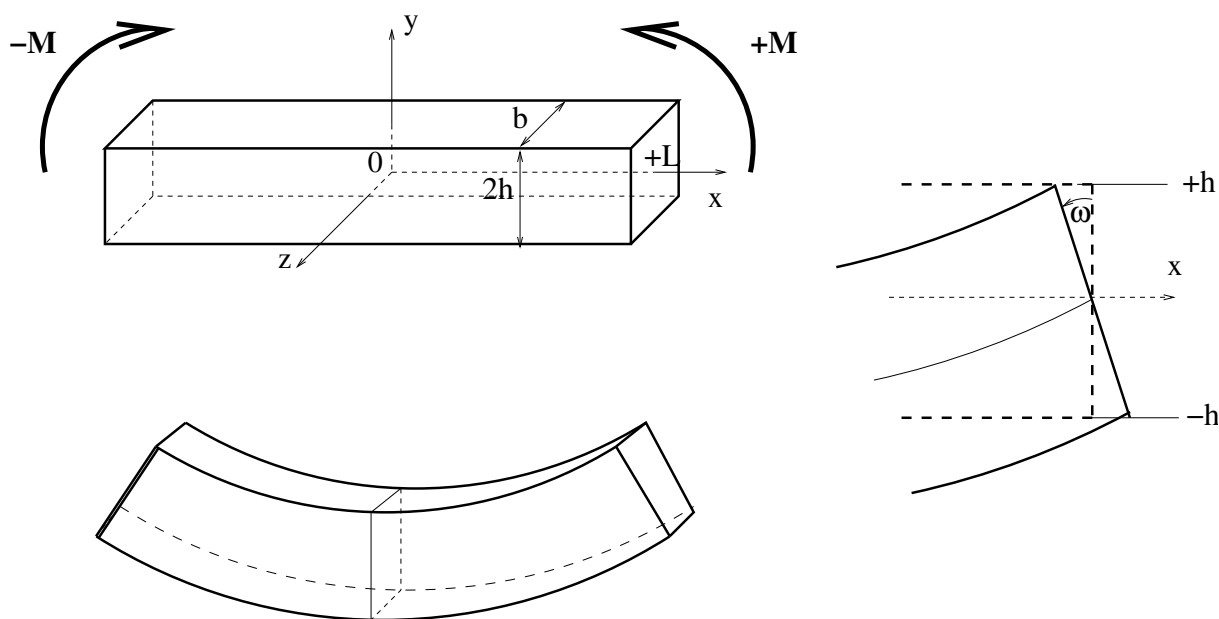


Fig. A.4: Flexion pure d'une poutre.

$\{0 \leq x \leq L\}$. Les conditions aux limites classiques imposées par un dispositif approprié sont :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bord latéral } \partial\Sigma \times]0, +L[\quad : \underline{T} = \underline{0}, \\ \text{Section droite } x = 0 \quad : \xi_x = 0, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0, \\ \text{Section droite } x = L \quad : \xi_x = -\omega y, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0. \end{array} \right\} \quad (\text{A.26})$$

ω représente la rotation de la section droite $x = L$ sous l'effet du moment appliqué \underline{M} .

a) A quelle condition un champ de contrainte de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx}(x, y, z) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x, \quad (\text{A.27})$$

est-il statiquement admissible avec les données du problème ?

b) Calculer le champ de déformation associé à $\underline{\underline{\sigma}}$ et montrer qu'il peut être intégré en un champ de déplacement $\underline{\underline{\xi}}$ cinématiquement admissible avec les données du problème. Conclure que la solution du problème est donnée par :

$$\underline{\underline{\xi}} = -\chi xy \underline{e}_x + \chi \left(\frac{x^2}{2} + \nu \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \underline{e}_y + \nu \chi yz \underline{e}_z, \quad \underline{\underline{\sigma}} = -E\chi y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x, \quad (\text{A.28})$$

où $\chi = \omega/L$ est la courbure (constante) de déformée de la fibre Ox .

c) Exprimer le moment de flexion M en fonction de la courbure χ .

Eléments de solution.

a) Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ doit satisfaire les équations d'équilibre $\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ (les forces de volume sont nulles) et les conditions aux limites en forces imposées par (A.26). Ces dernières conditions sont automatiquement satisfaites avec un champ de la forme (A.27). Quant aux équations d'équilibre, elles se réduisent à :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \sigma_{xx} = \sigma_{xx}(y, z).$$

A.4. PROBLÈMES CLASSIQUES

b) Le champ de déformation associé au champ de contrainte (A.27) s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\sigma_{xx}(y, z)}{E} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \nu \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z).$$

Les relations de compatibilité :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y},$$

(et ainsi de suite par permutation circulaire), impliquent que :

$$\varepsilon_{xx} = A + By + Cz + Dyz,$$

puis par intégration par rapport à x , que

$$\xi_x = (A + By + Cz + Dyz)x + E(y, z).$$

Mais les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ entraînent $A = C = D = E = 0$, $B = -\omega/L = -\chi$. On en déduit $\varepsilon_{xx} = -\chi y$, $\sigma_{xx} = -E\chi y$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \nu\chi y$, autres ε_{ij} nuls. L'intégration de ces équations conduit à la forme de déplacement (A.28) à un déplacement rigidifiant près dans le plan Oyz , laissé indéterminé par les conditions aux limites (A.26), que l'on prend nul par raison de symétrie. On remarque que la déformée de la fibre $y = z = 0$ a pour équation $y = \omega \frac{x^2}{2}$, $z = 0$. Sa courbure est donc constante, égale à χ . Les champs $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$ satisfont toutes les équations du problème dont ils sont donc solution (le champ de contrainte est unique, le champ de déplacement est défini à un déplacement rigidifiant près dans le plan Oxz).

c) On rappelle l'expression du moment \underline{M} appliqué à la poutre :

$$\underline{M} = \int_{\Sigma} \underline{OM} \wedge \underline{T} \, da = M \underline{e}_z, \quad M = - \int_{\Sigma} \sigma_{xx} y \, da = EI\chi, \quad (\text{A.29})$$

$$I = \int_{\Sigma} y^2 \, da = \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h}^{+h} y^2 \, dy \, dz = \frac{2bh^3}{3}.$$

Ces relations permettent d'établir une autre expression du champ de contrainte montrant que celui-ci est essentiellement déterminé statiquement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\frac{M}{I} y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

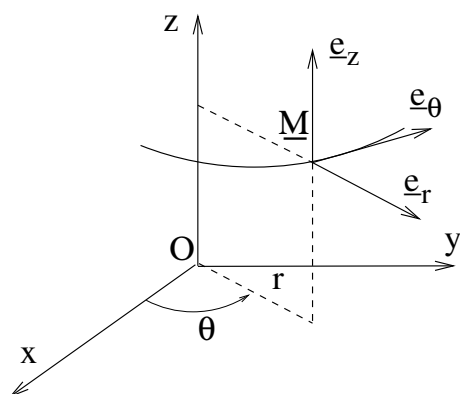
La solution élastique ainsi trouvée possède les propriétés remarquables suivantes :

- P1) Le champ de contrainte est uniaxial et indépendant de x .
- P2) Les sections droites planes restent planes et perpendiculaires à la fibre neutre Ox au cours de la transformation. En effet, les composantes ε_{xy} et ε_{xz} qui mesurent la variation d'angle entre la direction Ox et toute direction du plan Oyz de la section droite sont nulles.

Annexe B

Coordonnées curvilignes. Formulaire

B.1 Coordonnées cylindriques.



La position d'un point \underline{M} est repérée par les paramètres r, θ, z .

Les résultats sont donnés dans la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.

Fig. B.1: Coordonnées cylindriques.

Fonction scalaire. $f(\underline{M}) = f(r, \theta, z)$

$$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_z.$$

$$\Delta f = \text{div}(\underline{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Champ de vecteurs. $\underline{v}(\underline{M}) = v_r(r, \theta, z) \underline{e}_r + v_\theta(r, \theta, z) \underline{e}_\theta + v_z(r, \theta, z) \underline{e}_z.$

$$\underline{\nabla} \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

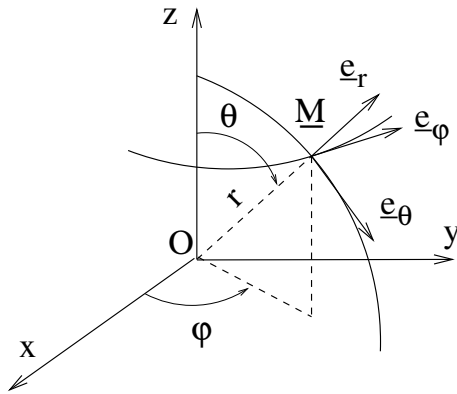
$$\text{div}(\underline{v}) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Champ de tenseurs du second ordre symétriques.

$$\underline{\underline{T}}(\underline{M}) = \underline{\underline{T}}(r, \theta, z) = T_{ij}(r, \theta, z) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j.$$

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{T}})(r, \theta, z) = \begin{cases} \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \right) \underline{e}_r \\ + \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} \right) \underline{e}_\theta \\ + \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \right) \underline{e}_z \end{cases}$$

B.2 Coordonnées sphériques



La position d'un point \underline{M} est repérée par les paramètres r, θ, φ .

Les résultats sont donnés dans la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)$.

Fig. B.2: Coordonnées sphériques.

Fonction scalaire. $f(\underline{M}) = f(r, \theta, \varphi)$.

$$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi$$

$$\Delta f = \operatorname{div}(\underline{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Champ de vecteurs. $\underline{v}(\underline{M}) = v_r(r, \theta, \varphi) \underline{e}_r + v_\theta(r, \theta, \varphi) \underline{e}_\theta + v_\varphi(r, \theta, \varphi) \underline{e}_\varphi$.

$$\underline{\nabla} \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\cot \theta}{r} v_\varphi \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{v_r}{r} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \cot \theta \frac{v_\theta}{r} + 2 \frac{v_r}{r}$$

Champ de tenseur du second ordre symétrique.

$$\underline{T}(\underline{M}) = \underline{T}(r, \theta, \varphi) = T_{ij}(r, \theta, \varphi) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\operatorname{div} \underline{T} = \begin{cases} \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta} \cot \theta) \right) \underline{e}_r \\ + \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} ((T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \cot \theta + 3T_{r\theta}) \right) \underline{e}_\theta \\ + \left(\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3T_{r\varphi} + 2T_{\theta\varphi} \cot \theta) \right) \underline{e}_\varphi \end{cases}$$

Index

- Accommodation, 6
- Adaptation, 6
- Admissible
 - cinématiquement, 186
 - physiquement, 168
 - plastiquement, 98
 - statiquement, 168
- Airy
 - fonction d'—, 35, 187
- Anti-plan, 187
- Approche
 - cinématique des charges limites, 172
 - statique des charges limites, 168
- Bauschinger
 - effet, 6, 80
- Charge
 - décharge, 4, 89
 - condition de — sûre, 115
- Chargement
 - paramètres généralisés, 117
 - potentiellement supportable, 166
- Cission
 - réduite, 17
- Clausius-Duhem, 141
- Clivage, 16
- Coefficient de Poisson, 184
- Compatibilité de la déformation, 119
- Constantes de Lamé, 184
- Contrainte
 - (s) plane(s), 187
 - équivalente, 23
 - résiduelle, 110
 - relaxation, 7
 - tenseur de —, 15
 - vecteur —, 14
- Convexe
 - domaine, 76
 - fonction, 154
- Courbes intrinsèques, 21
- Critère
 - de Hill, 25
 - de la contrainte normale maximale, 17
 - de Tresca, 18, 28, 77, 175
 - de von Mises, 23, 28, 77, 174
- Déformation
 - (s) plane(s), 187
 - plastique (triaxiale), 82
 - plastique (uniaxiale), 4
 - plastique cumulée, 93, 153
- Déviateur, 184
- Dissipation , 141
 - intrinsèque, 141, 159
 - plastique, 90
- Domaine de résistance, 167
- Ecroûissage
 - cinématique, 82
 - de structure, 121
 - isotrope, 81
 - positif, 115
- Endommagement, 6
- Energie
 - élastique, 57, 186
 - de rupture, 63, 67
 - libre, 143
 - potentielle totale, 57
- Entropie, 140
- Equation de la chaleur, 158
- Essai
 - multiaxial, 74
 - uniaxial, 1
- Facteur
 - d'intensité des contraintes, 41
 - de concentration de contraintes, 33

- Fluage, 8
- Fonction d'appui
 - définition, 172
 - Tresca, 175
 - von Mises, 174
- Force thermodynamique, 62, 144
- Fourier
 - loi de –, 148
- Griffith, 56
- Incompressibilité plastique, 91
- Irwin, 67
- Matériau standard généralisé, 154
- Modèles rhéologiques, 144
- Mode
 - de ruine d'une structure, 173
- Modes de rupture, 37
- Module d'Young, 184
- Monocristal, 16
- Multiplicateur plastique
 - matériaux écrouissables, 95
 - Plasticité parfaite, 87
- Normalité
 - critère de Tresca, 93
 - critère de von Mises, 92
 - critère régulier, 87
 - matériaux écrouissables, 94
 - multi-critère, 88
 - Règle de –, 86
- Offset, 75
- Onsager
 - relations de symétrie, 150
- Plasticité
 - avec écrouissage, 5, 80, 114
 - parfaite, 4, 5, 86, 115
- Polycristal, 9
- Potentiel
 - dual, 155
- Potentiel des efforts extérieurs, 186
- Propriétés variationnelles, 186
- Puissance résistante maximale, 173
- Raideur
 - d'une éprouvette, 65
 - tenseur de – élastique, 183
- Rochet, 6
- Singularité de contrainte
 - en fond d'entaille, 33
 - en fond de fissure, 37
- Souplesse
 - d'une éprouvette, 65
 - tenseur de – élastique, 183
- Stabilité de la propagation d'une fissure, 66
- Surface seuil
 - après écrouissage, 78
 - initiale, 74
- Symétries du tenseur d'élasticité, 183
- Ténacité, 43, 67
- Taille critique des défauts, 43
- Taux de restitution de l'énergie, 58
- Température, 139, 159
- Thermodynamique
 - premier principe, 136
 - processus –, 136
 - second principe, 139
 - système –, 136
- Thermographie, 160
- Torsion
 - élastique, 189
- Variables
 - d'état, 136
 - internes, 143
- Viscosité, 4