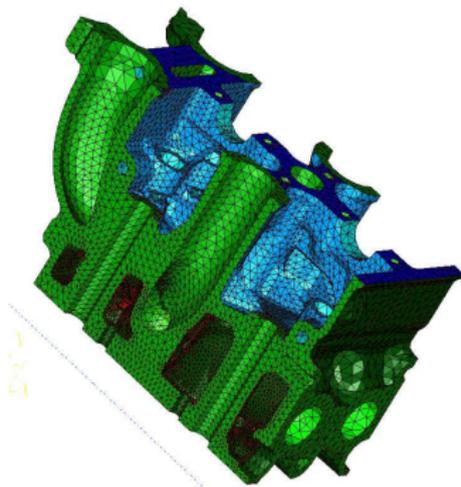


Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis



© PSA Peugeot Citroën

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html

Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

A quoi sert la simulation en Mécanique ?

- ▶ **Substitut économique à l'expérimentation** : analyser l'influence de paramètres ; plus généralement, mieux comprendre la physique du système.
- ▶ **Conception optimale** : analyse de nombreuses variantes de conception ; intégration dans un processus d'optimisation automatisé.
- ▶ **Vérification et certification** : conformité vis-à-vis de normes règlementaires.
- ▶ **Prévision de durée de vie** sous fissuration, endommagement, corrosion... analyse de la sécurité et des risques dans les structures.
- ▶ **Analyses a posteriori** (expertises) : détermination des facteurs à l'origine d'un accident...
- ▶ **Simulation de procédés industriels** : mise en forme, soudage...
- ▶ **Aide à l'analyse de données expérimentales** sur des configurations complexes (problèmes inverses).

Mécanique numérique (computational mechanics) : outil essentiel pour l'industrie.

La majorité des simulations en Mécanique des structures et des matériaux solides repose sur la méthode des éléments finis (MEF)

Motivation et objectif du cours

- ▶ Méthode des éléments finis (MEF) : outil essentiel de l'ingénieur
- ▶ Une pratique saine exige une bonne compréhension
 - des concepts de mécanique des milieux continus
 - des algorithmes mis en œuvre

Particulièrement vrai pour toutes les analyses dans le domaine **non linéaire**.

- ▶ Domaine en fort développement (idées et moyens informatiques)
 - contributions futures bienvenues !

Interaction forte, et transferts rapides, entre recherche et industrie.

But général du cours : présentation structurée des notions permettant de traduire la mécanique des solides déformables en algorithmes.

Mise en œuvre des concepts introduits dans

- ▶ *Mécanique des milieux continus* (MEC 431)
- ▶ *Rupture et plasticité* (MEC 551)

En particulier, initiation au calcul numérique en mécanique non linéaire des structures.

- ▶ liens avec *Mécanique des structures anélastiques* (MEC 562)

Thèmes

Abordés :

- ▶ MEF en élasticité et élastoplasticité, **cadre HPP volumique**
- ▶ Mécanique linéaire de la rupture ;
- ▶ Evolution en temps : thermoélasticité avec diffusion thermique, dynamique.

Non abordés :

- ▶ Structures élancées ou minces (poutres, plaques, coques)
 - Poutres : voir MEC 553 (P. Ballard)
 - Technicité de la MEF (notamment plaques et coques)
- ▶ Transformations non infinitésimales (sauf exemple PC5) ;
 - Poutres : voir MEC 553 (P. Ballard)
- ▶ Analyse mathématique des propriétés des schémas numériques (existence / unicité de solutions, convergence...)
 - voir MAP 431 (G. Allaire)
- ▶ ...

Plan du cours

Concepts fondamentaux et leur application en élasticité linéaire statique

- ▶ **Amphi 1 – Résolution approchée de problèmes d'équilibre en élasticité**
- ▶ Amphi 2 – La notion d'élément fini isoparamétrique
- ▶ Amphi 3 – La méthode des éléments finis en élasticité linéaire
- ▶ Amphi 4 – Application à la mécanique linéaire de la rupture

Régime non-linéaire quasistatique, application aux solides élastoplastiques

- ▶ Amphi 5 – Calcul de solides à comportement non-linéaire
- ▶ Amphi 6 – Calcul de solides élastoplastiques : aspects locaux
- ▶ Amphi 7 – Calcul de solides élastoplastiques : aspects globaux

Evolution, en régime linéaire

- ▶ Amphi 8 – Evolution thermique et thermoélasticité linéaire quasistatique
- ▶ Amphi 9 – Analyse dynamique des structures élastiques

Les enseignants

Marc BONNET : Directeur de recherche CNRS

Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique

bonnet@lms.polytechnique.fr

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/index.html

Attilio FRANGI : Professeur associé,

Politecnico di Milano, Italie

attilio.frangi@polimi.it

www.stru.polimi.it/home/frangi/curriculum.html

Christian REY : Professeur des universités

Laboratoire de Mécanique et Technologie, ENS Cachan

christian.rey@lmt.ens-cachan.fr

Organisation et support

Petites classes :

- 5 séances « classiques » (04/01, 18/01, 08/02, 15/02, 08/03), salles PC 3 (A. Frangi) et PC 4 (C. Rey) ;
- 4 séances sur ordinateur (25/01, 01/02, 01/03, 22/03)
Programmes d'initiation (Matlab), réalisés par A. Frangi.
salles informatiques 36 (A. Frangi) et 35 (C. Rey).
- **(petits) travaux personnels** PC(n) → PC(n+1), non notés

Livre : Un amphi = un chapitre

Supports complémentaires disponibles en ligne :

- amphis (PDF) ;
- documents relatifs aux PCs (PDF) ;
- programmes d'initiation (Matlab) et documents associés (PDF) ;
www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html
- **Introduction à Matlab** : mardi 19/01 à 17h30, salle TMS (A. Frangi)

Contrôle écrit : le 29/03 (2 heures).

Questions type « montrez comment faire [...] en qq. lignes de Matlab » possibles.

Amphi 1 : Résolution approchée de problèmes d'équilibre en élasticité

1. Rappel des équations de l'équilibre d'un solide élastique
2. Formulation faible de l'équilibre d'un solide élastique
3. Formulation variationnelle de l'équilibre d'un solide élastique
4. Minimisation approchée : la méthode de Galerkin

Plan

1. **Rappel des équations de l'équilibre d'un solide élastique**
2. Formulation faible de l'équilibre d'un solide élastique
3. Formulation variationnelle de l'équilibre d'un solide élastique
4. Minimisation approchée : la méthode de Galerkin

Equations de l'équilibre d'un solide élastique

Hypothèse des petites perturbations (HPP)

Configuration actuelle = configuration initiale

Tenseur des déformations linéarisé

Evolution quasi-statique

Les termes d'accélération sont négligés

Matériau élastique linéaire homogène (et habituellement isotrope)

- ▶ Equations de compatibilité

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}^T\underline{\underline{u}})$$

- ▶ Equations d'équilibre

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{f}} = 0$$

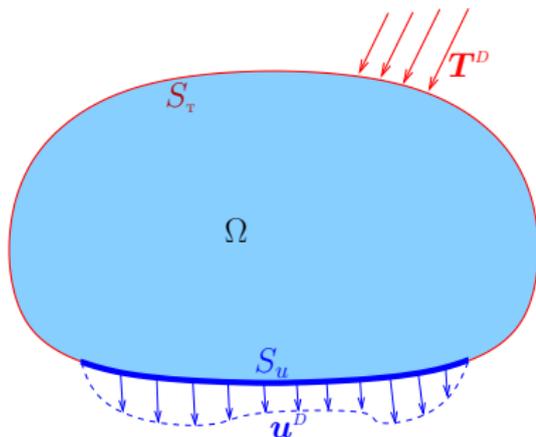
- ▶ Equations de comportement

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

- ▶ Conditions aux limites

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}^D \quad (\text{sur } S_u)$$

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{T}}^D \quad (\text{sur } S_T)$$



Ensembles de champs admissibles

- ▶ Ensemble des déplacements réguliers (d'énergie finie) :

$$\mathcal{C} = \left\{ \underline{v} \mid \underline{v} \text{ continu sur } \Omega, \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV < +\infty \right\}$$

- ▶ Ensembles de champs admissibles avec les données

- ▶ Déplacements cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{C}(\underline{u}^D) = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \in \mathcal{C} \text{ et } \underline{v} = \underline{u}^D \text{ sur } S_u \}$$

- ▶ Contraintes statiquement admissibles :

$$\mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}) = \{ \underline{\underline{\tau}} \mid \operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{f} = 0 \text{ dans } \Omega, \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^D \text{ sur } S_T \}$$

- ▶ Ensemble des déplacements cinématiquement admissibles à zéro

$$\mathcal{C}(\underline{0}) = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \in \mathcal{C} \text{ et } \underline{v} = \underline{0} \text{ sur } S_u \}$$

Reformulation du problème d'équilibre en élasticité :

trouver $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ et $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})$ tels que $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}](\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega)$

Propriétés de la relation de comportement élastique linéaire (rappel)

- \mathcal{A} possède les symétries majeures et mineures :

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{jikl} = \mathcal{A}_{klij}$$

\mathcal{A} est défini positif :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} > 0, \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}}, \|\underline{\underline{\varepsilon}}\| \neq 0 \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T$$

- Tenseur \mathcal{S} des souplesses élastiques (forme inverse de la relation de comportement) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} \iff \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathcal{S} : \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{soit } \mathcal{A} : \mathcal{S} = \mathcal{S} : \mathcal{A} = \mathcal{I}$$

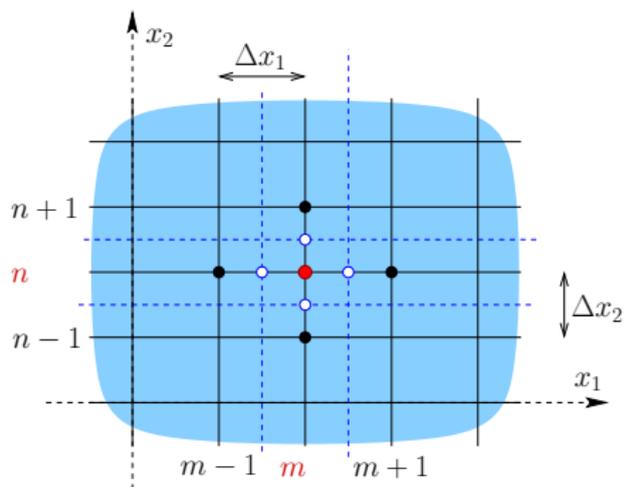
\mathcal{I} : identité entre tenseurs symétriques du second ordre :

$$\mathcal{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})$$

\mathcal{S} est défini positif :

$$\underline{\underline{\tau}} : \mathcal{S} : \underline{\underline{\tau}} > 0, \quad \forall \underline{\underline{\tau}}, \|\underline{\underline{\tau}}\| \neq 0 \text{ et } \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}^T$$

Approximation des équations locales par différences finies



$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_1}(\underline{x}^{(m+1/2, n+1/2)})$$

$$\approx \frac{1}{\Delta x_1} [\underline{u}(\underline{x}^{(m+1, n)}) - \underline{u}(\underline{x}^{(m, n)})]$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_2}(\underline{x}^{(m+1/2, n+1/2)})$$

$$\approx \frac{1}{\Delta x_2} [\underline{u}(\underline{x}^{(m, n+1)}) - \underline{u}(\underline{x}^{(m, n)})]$$

$$\operatorname{div}(\mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]) + \rho \underline{f} = \underline{0} \quad (\text{D.F. à l'ordre 2})$$

- ▶ Géométries simples (grilles cartésiennes)
- ▶ Géométries définies par déformation de grilles cartésiennes

Différences finies : peu utilisées en mécanique des structures pour l'approximation en espace

Approximation des équations locales par différences finies

Différences finies :

- ▶ Peu utilisées en mécanique des structures pour l'approximation en espace ;
- ▶ Par contre : emploi **courant** pour la **variable temps** :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} (f(t_{n+1}) - f(t_n)) \quad (\text{diffusion, cf. amphi 8})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2} (f(t_{n+1}) - 2f(t_n) + f(t_{n-1})) \quad (\text{dynamique, cf amphi 9})$$

Principe adopté :

approximation spatiale fondée sur une forme **intégrale** des équations

Plan

1. Rappel des équations de l'équilibre d'un solide élastique
- 2. Formulation faible de l'équilibre d'un solide élastique**
3. Formulation variationnelle de l'équilibre d'un solide élastique
4. Minimisation approchée : la méthode de Galerkin

Formulation faible de l'équilibre d'un solide élastique

► Forme faible de l'équation locale d'équilibre

$$\underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV}_{-\mathcal{P}_i(\underline{w})} = \underbrace{\int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{\partial\Omega} [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{w} \, dS}_{\mathcal{P}_e(\underline{w})} \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

► Résulte d'une intégration par parties de

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}) \cdot \underline{w} \, dV = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

(résidu pondéré pour l'équation d'équilibre)

► Exprime le principe des puissances virtuelles (PPV) avec hypothèse d'équilibre

► Compatibilité locale et comportement élastique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] \quad (\text{dans } \Omega)$$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

Formulation faible de l'équilibre d'un solide élastique

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

Prise en compte des conditions aux limites dans la formulation faible

- (a) Pas de référence explicite aux données cinématiques ;
- (b) Présence de l'inconnue $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ sur S_u (réaction associée au déplacement imposé).

Formulation faible de l'équilibre élastique : deux variantes possibles

Éliminer la réaction inconnue \underline{T} ;

Faire figurer explicitement la donnée cinématique \underline{u}^D .

Variante 1 : formulation faible obtenue par élimination de la réaction

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

- Restriction aux champs virtuels \underline{w} admissibles à zéro ;
- Admissibilité de \underline{u} imposée comme condition supplémentaire.

trouver $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ tel que

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

Variante 2 : formulation faible obtenue par incorporation de la donnée cinématique

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

- ▶ Pas de restriction pour les champs virtuels \underline{w} ;
- ▶ Admissibilité de \underline{u} imposée via une équation supplémentaire.

trouver $(\underline{u}, \underline{T}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'(S_u)$ tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV - \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS &= \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C} \\ \int_{S_u} \underline{u} \cdot \underline{T}' \, dS &= \int_{S_u} \underline{u}^D \cdot \underline{T}' \, dS \quad \forall \underline{T}' \in \mathcal{C}'(S_u) \end{aligned}$$

où l'ensemble \mathcal{C}' des réactions admissibles est défini par dualité par rapport à \mathcal{C} :

$$\mathcal{C}'(S_u) = \left\{ \underline{T}' \mid \forall \underline{w} \in \mathcal{C}, \int_{S_u} \underline{T}' \cdot \underline{w} \, dS < +\infty \right\}$$

Plan

1. Rappel des équations de l'équilibre d'un solide élastique
2. Formulation faible de l'équilibre d'un solide élastique
- 3. Formulation variationnelle de l'équilibre d'un solide élastique**
4. Minimisation approchée : la méthode de Galerkin

Formulation variationnelle de l'équilibre d'un solide élastique

Formulation variationnelle : caractérisation de solutions en termes d'extremum de fonctionnelle (énergie).

- ▶ Déjà vu dans le cadre de l'élasticité linéaire (MEC 431 P. le Tallec) ;
- ▶ **Notion essentielle** pour la méthode des éléments finis ;
- ▶ Ici : présentation alternative à partir de l'**erreur en relation de comportement**

Erreur en relation de comportement

Trois grands groupes d'équations : compatibilité, équilibre, **comportement**.

- ▶ **Erreur en relation de comportement** entre déplacement \underline{v} et contrainte $\underline{\tau}$:

$$\mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\tau}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\tau} - \mathcal{A}:\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}]) : \mathcal{S} : (\underline{\tau} - \mathcal{A}:\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}]) \, dV$$

avec les propriétés

$$\mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\tau}) \geq 0 \quad \forall (\underline{v}, \underline{\tau}) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\tau}) = 0 \Leftrightarrow \underline{\tau} - \mathcal{A}:\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] = 0 \text{ dans } \Omega$$

- ▶ **Reformulation de l'équilibre en élasticité :**

$$\text{trouver } (\underline{u}, \underline{\sigma}) \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \times \mathcal{S}(\underline{\tau}^D, \underline{f}) \quad \text{tels que} \quad \mathcal{E}(\underline{u}, \underline{\sigma}) = 0$$

qui conduit au problème de **minimisation**

$$(\underline{u}, \underline{\sigma}) = \arg \min_{(\underline{v}, \underline{\tau}) \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \times \mathcal{S}(\underline{\tau}^D, \underline{f})} \mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\tau})$$

$$(\underline{u}, \underline{\sigma}) \text{ solution d'un problème d'équilibre élastique bien posé} \Leftrightarrow \mathcal{E}(\underline{u}, \underline{\sigma}) = 0$$

Energies potentielle et complémentaire

- **Forme développée de l'erreur en relation de comportement (ERC) :**

$$\mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\tau}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\mathcal{S}}} : \underline{\underline{\tau}} \, dV - \int_{\Omega} (\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}]) \, dV$$

- **PPV avec champ virtuel \underline{v} (caractère SA de $\underline{\tau}$) :**

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV + \int_{S_u} [\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{u}^D \, dS_x + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{v} \, dS$$

Résultat : **ERC = Energie potentielle + Energie complémentaire**

$$\mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\tau}) = \mathcal{P}(\underline{v}) + \mathcal{P}^*(\underline{\tau})$$

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{v} \, dS$$

$$\mathcal{P}^*(\underline{\tau}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\mathcal{S}}} : \underline{\underline{\tau}} \, dV - \int_{S_u} [\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{u}^D \, dS_x$$

► **Energie potentielle :**

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \mathcal{W}(\underline{v}) - \mathcal{F}(\underline{v})$$

$$\mathcal{W}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV$$

$$\mathcal{F}(\underline{v}) = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{v} \, dS$$

► **Energie complémentaire :**

$$\mathcal{P}^*(\underline{T}) = \mathcal{W}^*(\underline{T}) - \mathcal{F}^*(\underline{T})$$

$$\mathcal{W}^*(\underline{T}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{T} : \underline{\underline{\mathcal{S}}} : \underline{T} \, dV$$

$$\mathcal{F}^*(\underline{T}) = \int_{S_u} [\underline{T} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{u}^D \, dS_x$$

Commentaire. La notion d'erreur en relation de comportement se généralise à des classes de comportement non linéaire, telles que

- comportement élastique non linéaire ;
- comportement élastoplastique standard généralisé.

Minimisation des énergies, formulations variationnelles

La minimisation couplée de l'erreur en relation de comportement

$$(\underline{u}, \underline{\sigma}) = \arg \min_{(\underline{v}, \underline{\tau}) \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \times \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})} \mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\tau})$$

est ainsi transformée en deux minimisations découplées :

$$\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v})$$

$$\underline{\sigma} = \arg \min_{\underline{\tau} \in \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})} \mathcal{P}^*(\underline{\tau})$$

Il suffit d'accomplir l'une OU l'autre de ces minimisations

Par exemple, $\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v})$ puis $\underline{\sigma} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]$

Equation de stationnarité de l'énergie potentielle

- ▶ **Variation** de \mathcal{P} autour d'un champ admissible \underline{v} :

$$\mathcal{P}(\underline{v} + \eta \underline{w}) - \mathcal{P}(\underline{v}) = \eta \langle \mathcal{P}'(\underline{v}), \underline{w} \rangle + o(|\eta|) \quad (\underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0}))$$

- ▶ Le champ \underline{u} solution, c.à.d. tel que

$$\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v})$$

annule la variation de \mathcal{P} à l'ordre 1 en η dans **toute** direction $\underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$:

$$\langle \mathcal{P}'(\underline{v}), \underline{w} \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \left. \frac{d}{d\eta} \mathcal{P}(\underline{u} + \eta \underline{w}) \right|_{\eta=0} = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

- ▶ Formulation variationnelle : forme explicite prise par cette condition, soit

trouver $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ tel que

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

On retrouve la formulation faible avec élimination de la réaction

- « **Formulation faible** » : version dualisée d'équations locales ;
- « **Formulation variationnelle** » : condition de stationnarité d'une fonctionnelle.

Plan

1. Rappel des équations de l'équilibre d'un solide élastique
2. Formulation faible de l'équilibre d'un solide élastique
3. Formulation variationnelle de l'équilibre d'un solide élastique
4. Minimisation approchée : la méthode de Galerkin

Minimisation approchée : la méthode de Galerkin

- ▶ Ensembles $\mathcal{C}(\underline{u}^D)$ et $\mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})$ de champs admissibles : espaces affines de dimension infinie.
- ▶ Minimisation **exactes**

$$\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v})$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \arg \min_{\underline{\underline{\tau}} \in \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})} \mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}})$$

en pratique impossibles (complexité géométrique des systèmes réels).

- ▶ **Recherche d'un minimum approché** : « méthode de Galerkin » :

$$\underline{u}_N = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}_N(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_N = \arg \min_{\underline{\underline{\tau}} \in \mathcal{S}_N(\underline{T}^D, \underline{f})} \mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}})$$

Méthode de Galerkin pour l'énergie potentielle

Minimisation de $\mathcal{P}(\underline{v})$ pour des champs de la forme

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K(\underline{x}) \quad \text{avec } \underline{u}^{(D)} \in \mathcal{C}(\underline{u}^{(D)}) \text{ et } \underline{\varphi}^K \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

pour base $(\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^N)$ et champ admissible particulier $\underline{u}^{(D)} \in \mathcal{C}(\underline{u}^{(D)})$ choisis a priori.

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} - \{\alpha\}^T \{\mathbb{F}\} + \mathcal{P}(\underline{u}^{(D)}) = P(\{\alpha\})$$

- ▶ **Vecteur des déplacements généralisés** : $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}^T$:
- ▶ **Matrice de rigidité** $[\mathbb{K}]$:

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^I] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^J] dV \quad (1 \leq I, J \leq N)$$

- ▶ **Vecteur des forces généralisés** $\{\mathbb{F}\}$:

$$F_I = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(D)}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^I] dV + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\varphi}^I dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{\varphi}^I dS \quad (1 \leq I \leq N)$$

Méthode de Galerkin pour l'énergie potentielle

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} - \{\alpha\}^T \{\mathbb{F}\} + \mathcal{P}(\underline{u}^{(D)}) = P(\{\alpha\})$$

- ▶ $[\mathbb{K}]$ est carrée $N \times N$, **symétrique, définie positive** (si $\text{mesure}(S_u) \neq 0$) :

$$\{\alpha\} \neq \{0\} \Rightarrow \{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} > 0$$

- ▶ $P(\{\alpha\})$ **admet un minimum unique**, défini par

$$\frac{\partial P}{\partial \{\alpha\}} = \{0\} \quad \text{soit} \quad [\mathbb{K}] \{\alpha\} = \{\mathbb{F}\}$$

Déplacements généralisés optimaux :

$$\{\alpha^{\min}\} = [\mathbb{K}]^{-1} \{\mathbb{F}\}$$

Solution approchée :

$$\underline{u}_N(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K^{\min} \underline{\varphi}^K(\underline{x})$$

$\in \mathcal{C}(\underline{u}^{(D)})$ par construction

puis $\underline{\sigma}_N = \underline{\mathcal{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(D)}](\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K^{\min} \underline{\mathcal{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^K](\underline{x})$

$\notin \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})$ en général

Méthode de Galerkin : interprétation (équilibre efforts généralisés)

$$\underbrace{- \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV}_{\{\mathbb{F}^u\} - [\mathbb{K}]\{\alpha\} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathbb{F}^{\text{int}}\}} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS}_{\{\mathbb{F}^{\text{ext}}\}} = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

Le système linéaire

$$[\mathbb{K}]\{\alpha\} = \{\mathbb{F}\} \quad \text{avec} \quad \{\mathbb{F}\} = \{\mathbb{F}^u\} + \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\}$$

obtenu par la méthode de Galerkin exprime l'équilibre des forces généralisées :

$$\{\mathbb{F}^{\text{int}}\} + \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\} = \{0\}$$

Méthode de Galerkin pour la formulation faible

- **Equation de stationnarité de $\mathcal{P}(\underline{v})$, ou formulation faible des éq. locales (rappel) :**

trouver $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ tel que

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

- **Représentation de l'inconnue et des champs virtuels :**

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K(\underline{x}) \quad \implies \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$$

$$\underline{w}(\underline{x}) = \sum_{J=1}^N \alpha_J^* \underline{\varphi}^J(\underline{x}) \quad \implies \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

- **On obtient le même système d'équations**

$$\forall \{\alpha^*\} \in \mathbb{R}^N, \{\alpha^*\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} - \{\alpha^*\}^T \{\mathbf{F}\} = \{0\}$$

$$\implies \boxed{[\mathbb{K}] \{\alpha\} = \{\mathbf{F}\}}$$

Approximation par méthode de Galerkin : propriétés générales (1/3)

On pose $\underline{u} = \underline{u}_N + \Delta \underline{u}$ ($\Delta \underline{u}$: erreur entre solution exacte et approchée).

- ▶ Champ virtuel

$$\underline{w}_N(\underline{x}) = \sum_{J=1}^N \alpha_J^* \varphi^J(\underline{x})$$

- ▶ Formulation faible (solution exacte \underline{u}) :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV = \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w}_N dS$$

- ▶ Formulation faible (solution approchée \underline{u}_N) :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV = \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w}_N dS$$

Propriété 1 : l'erreur $\Delta \underline{u}$ est orthogonale (au sens du produit scalaire associé à l'énergie de déformation) à tout champ virtuel de l'espace d'approximation utilisé :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV = 0$$

Approximation par méthode de Galerkin : propriétés générales (2/3)

- **Développement de l'énergie de déformation de $\underline{u} - \underline{v}_N = \Delta \underline{u} + (\underline{u}_N - \underline{v}_N)$**
avec $\underline{v}_N = \underline{u}^{(D)} + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K$ arbitraire :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] dV \\ &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] dV + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{v}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{v}_N] dV \\ &+ 2 \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{v}_N] dV}_{=0 \text{ (orthogonalité)}} \end{aligned}$$

Propriété 2 (meilleure approximation) : \underline{u}_N est la meilleure approximation de \underline{u} parmi tous les champs de l'espace d'approximation, au sens de la norme en énergie.

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] dV \leq \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] dV$$

Approximation par méthode de Galerkin : propriétés générales (3/3)

- **Energie de déformation de la solution exacte** $\underline{u} = \underline{u}_N + \Delta \underline{u}$:

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] \, dV = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] \, dV + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] \, dV \\ + 2 \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] \, dV$$

- **Hypothèse** : $\underline{u}^D = \underline{0}$. Alors $\underline{u} \in \mathcal{C}(0)$, et donc

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] \, dV = 0 \quad (\text{orthogonalité})$$

Propriété 3 : si $\underline{u} \in \mathcal{C}(0)$, \underline{u}_N approche \underline{u} par défaut, au sens de la norme en énergie :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] \, dV < \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] \, dV$$

Méthode de Galerkin pour l'énergie complémentaire

Minimisation de $\mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}})$ pour des champs de la forme

$$\underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\tau}}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \beta_K \underline{\underline{\tau}}^K(\underline{x})$$

avec $\underline{\underline{\tau}}^{(D)} \in \mathcal{S}(\underline{\underline{T}}^{(D)})$ et $\underline{\underline{\tau}}^K \in \mathcal{S}(\underline{\underline{0}})$
choisis *a priori*

$$\mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}}) = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [\mathbb{S}] \{\beta\} - \{\beta\}^T \{\mathbb{U}^d\} + \mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}}^{(D)}) = P^*(\{\beta\})$$

Solution approchée en contrainte définie par

$$[\mathbb{S}] \{\beta\} = \{\mathbb{U}^d\} \Rightarrow \{\beta^{\min}\} = [\mathbb{S}]^{-1} \{\mathbb{U}^d\}$$

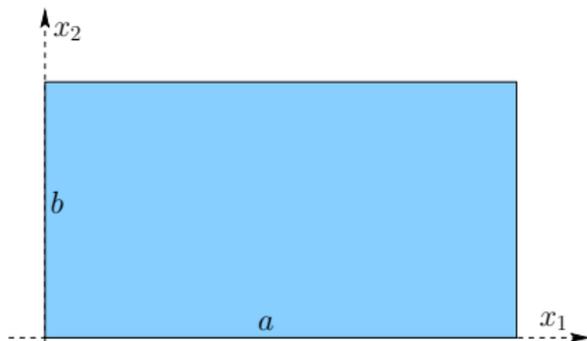
En général, ne s'intègre pas en un déplacement compatible.

Discussion

- ▶ **Méthode de Galerkin en déplacements :**
Construction de bases $(\underline{\varphi}^K)$ **cinématiquement admissibles**, **assez facile** (régularité, énergie finie).
- ▶ **Méthode de Galerkin en contraintes :**
Construction de bases $(\underline{\tau}^K)$ **statiquement admissibles**, **plus difficile** ($\text{div } \underline{\tau}^K = \underline{0}$).
- ▶ **Cas où les 2 approches sont possibles : évaluation de la qualité de la solution approchée par**

$$\frac{|P(\{\alpha^{\min}\}) + P^*(\{\beta^{\min}\})|}{|P(\{\alpha^{\min}\})| + |P^*(\{\beta^{\min}\})|}$$

Fonctions de base définies sur Ω entier : méthodes « spectrales »



Exemples :

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}^j(\underline{x}) &= (a) P_m(x_1)P_n(x_2)\underline{e}_j \\ &= (b) \sin\left(2\pi m \frac{x_1}{a}\right) \sin\left(2\pi n \frac{x_2}{b}\right)\underline{e}_j \\ &= \dots \\ &\text{(séparation de variables)} \end{aligned}$$

- ▶ **Convergence rapide** (exponentielle en N) de $\|\underline{u} - \underline{u}_N\|$ si \underline{u} très régulier ;
- ▶ **Peu adapté aux géométries complexes et aux problèmes à faible régularité** (jonctions, composites, forces concentrées, fissuration ou endommagement...);
- ▶ **Peu utilisées en mécanique des structures**, mais utiles dans d'autres domaines, ex. mécanique des fluides.

Support local vs. support global des $\underline{\varphi}^K$: notion d'élément fini

► Difficultés entraînées par la méthode spectrale :

- (a) Coefficients de $[\mathbb{K}]$ et $[\mathbb{F}]$ résultant de **calculs d'intégrales sur tout Ω**
Gênant pour des configurations géométriques complexes
(difficulté de mise en œuvre, coût de calcul) ;
- (b) $[\mathbb{K}]$ **est pleine** : $K_{IJ} \neq 0$ ($\forall I, J$).
Résolution de $[\mathbb{K}]\{U\} = [\mathbb{F}]$ plus rapide si $[\mathbb{K}]$ peut être rendue **creuse**.

► Principe de base de la méthode des éléments finis (en déplacements) : méthode de Galerkin avec fonctions de base $\underline{\varphi}^J$ à support « petit » :

$$\underline{\varphi}^J = \underline{0} \quad \text{dans } \Omega \setminus \Omega_J$$

- (a) Intégrales sur des « petites » régions :
 K_{IJ} **obtenu par intégration sur $\Omega_I \cap \Omega_J$** .
- (b) $\Omega_I \cap \Omega_J = \emptyset \Rightarrow K_{IJ} = 0$: $[\mathbb{K}]$ **est creuse**.

Conclusion

- ▶ **Formes intégrales des équations :**
 - ▶ Formulation variationnelle (si principe du minimum)
 - ▶ Formulation faible
- ▶ **La méthode de Galerkin : un cadre systématique et général pour la recherche de solutions approchées**

- ▶ **La méthode des éléments finis :**
 - ▶ Galerkin avec construction de bases à support local.
 - ▶ Objectif : généralité des configurations, et donc flexibilité

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html