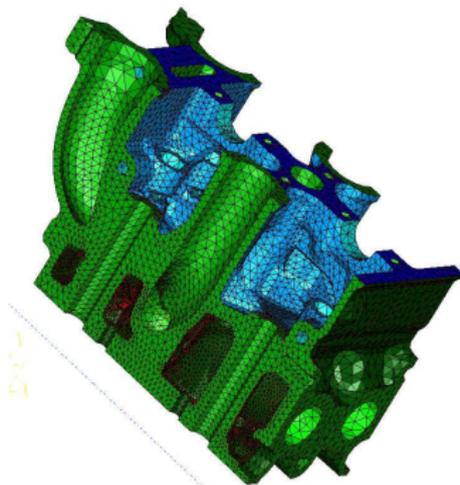


# Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis



© PSA Peugeot Citroën

[www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html](http://www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html)

Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2008–2009

## Plan du cours

### Concepts fondamentaux et leur application en élasticité linéaire statique

- ▶ Amphi 1 – Résolution approchée de problèmes d'équilibre en élasticité
- ▶ **Amphi 2 – La notion d'élément fini isoparamétrique**
- ▶ Amphi 3 – La méthode des éléments finis en élasticité linéaire
- ▶ Amphi 4 – Application à la mécanique linéaire de la rupture

### Régime non-linéaire quasistatique, application aux solides élastoplastiques

- ▶ Amphi 5 – Calcul de solides à comportement non-linéaire
- ▶ Amphi 6 – Calcul de solides élastoplastiques : aspects locaux
- ▶ Amphi 7 – Calcul de solides élastoplastiques : aspects globaux

### Régime linéaire, avec évolution temporelle

- ▶ Amphi 8 – Evolution thermique et thermoélasticité linéaire quasistatique
- ▶ Amphi 9 – Analyse dynamique des structures élastiques

## Retour sur l'amphi 1 : méthode de Galerkin

Equation de stationnarité de  $\mathcal{P}(\underline{v})$ , ou formulation faible des éq. locales :

trouver  $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$  tel que

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

Représentation de l'inconnue et des champs virtuels :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K(\underline{x}), \quad \underline{w}(\underline{x}) = \sum_{K=1}^N \alpha_K^* \underline{\varphi}^K(\underline{x})$$

Système d'équations

$$[\mathbb{K}]\{\alpha\} = \{\mathbb{F}\}$$

Fonctions de base  $\underline{\varphi}^K$  à support local ( $[\mathbb{K}]$  creuse, intégrations plus rapides)

## Amphi 2 – La notion d'élément fini isoparamétrique

### 1. Exemple : déformations planes et éléments triangulaires linéaires

Maillage

Interpolation linéaire du déplacement

Construction du problème approché

### 2. Le concept d'élément fini isoparamétrique

Maillage

Représentation de la géométrie approchée

Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Gradient et tenseur de déformation du déplacement interpolé

# Plan

## 1. Exemple : déformations planes et éléments triangulaires linéaires

Maillage

Interpolation linéaire du déplacement

Construction du problème approché

## 2. Le concept d'élément fini isoparamétrique

Maillage

Représentation de la géométrie approchée

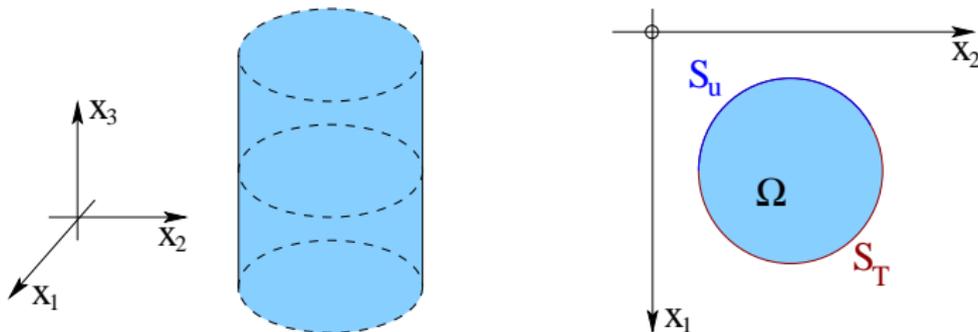
Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Gradient et tenseur de déformation du déplacement interpolé

## Hypothèses pour cette situation particulière

Invariance par translation selon  $x_3$  :



Hypothèse des déformations planes :

$$\underline{u}(x_1, x_2, x_3) = \xi_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + \xi_2(x_1, x_2)\underline{e}_2$$

# Plan

## 1. Exemple : déformations planes et éléments triangulaires linéaires

### Maillage

Interpolation linéaire du déplacement

Construction du problème approché

## 2. Le concept d'élément fini isoparamétrique

### Maillage

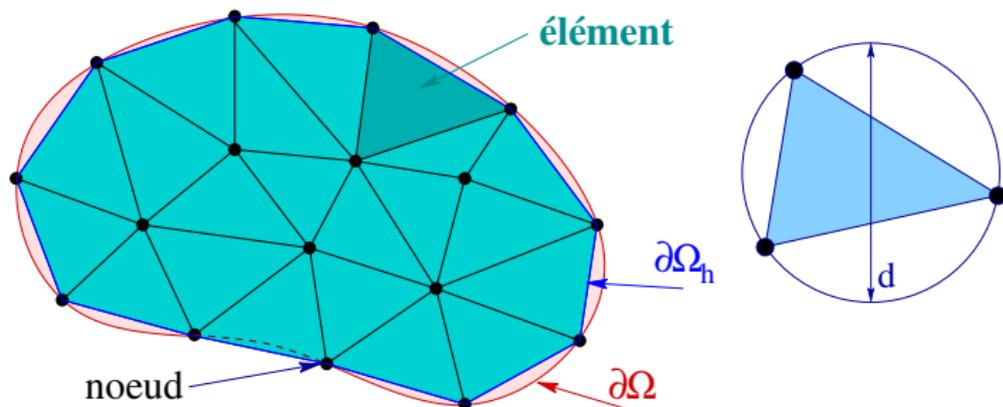
Représentation de la géométrie approchée

Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Gradient et tenseur de déformation du déplacement interpolé

# Maillage



$$h = \max_{\text{éléments}} d$$

- (i) «  $\Omega_h$  tend vers  $\Omega$  » quand  $h \rightarrow 0$  ;
- (ii)  $\Omega_h = \Omega$  si  $\Omega$  est un polygone (côtés rectilignes).

# Plan

## 1. Exemple : déformations planes et éléments triangulaires linéaires

Maillage

Interpolation linéaire du déplacement

Construction du problème approché

## 2. Le concept d'élément fini isoparamétrique

Maillage

Représentation de la géométrie approchée

Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Gradient et tenseur de déformation du déplacement interpolé

## Interpolation linéaire du déplacement

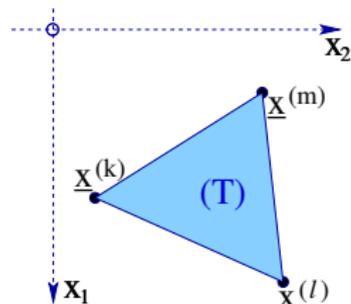
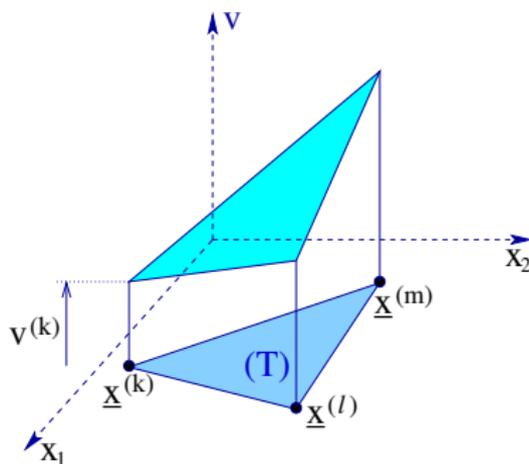
- ▶ Déplacement approché **continu et linéaire sur chaque triangle** ;
- ▶ **Interpolation linéaire** des déplacements aux **nœuds** .

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = N_k(x_1, x_2)\underline{v}^{(k)} + N_\ell(x_1, x_2)\underline{v}^{(\ell)} + N_m(x_1, x_2)\underline{v}^{(m)} \quad (\underline{x} \in T)$$

$N_k$ ,  $N_\ell$  et  $N_m$  : **fonctions d'interpolation, ou fonctions de forme**

(i) Affines en  $(x_1, x_2)$  ;

(ii) Vérifient  $N_k(\underline{x}^{(\ell)}) = \delta_{k\ell}$



## Interpolation linéaire du déplacement

- ▶ Déplacement approché **continu et linéaire sur chaque triangle** ;
- ▶ **Interpolation linéaire** des déplacements aux **nœuds**

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = N_k(x_1, x_2)\underline{v}^{(k)} + N_\ell(x_1, x_2)\underline{v}^{(\ell)} + N_m(x_1, x_2)\underline{v}^{(m)} \quad (\underline{x} \in T)$$

$N_k$ ,  $N_\ell$  et  $N_m$  : **fonctions d'interpolation**, ou **fonctions de forme**

(i) Affines en  $(x_1, x_2)$  ;

(ii) Vérifient  $N_k(\underline{x}^{(\ell)}) = \delta_{k\ell}$

Ces conditions conduisent à :

$$N_p(x_1, x_2) = c_0^{(p)} + c_1^{(p)}x_1 + c_2^{(p)}x_2 \quad (p = k, \ell, m)$$

$c_0^{(p)}$ ,  $c_1^{(p)}$ ,  $c_2^{(p)}$  : connus en fonction des coordonnées nodales  $x_{1,2}^{(q)}$   
( $p, q = k, \ell, m$ ).

**Conséquence de ce choix d'interpolation :**

Le tenseur de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}_h]$  associée à  $\underline{v}_h$  est **constant** sur  $T$

*Détails, mise en oeuvre (Matlab) : PCs 2-3*

# Plan

## 1. Exemple : déformations planes et éléments triangulaires linéaires

Maillage

Interpolation linéaire du déplacement

Construction du problème approché

## 2. Le concept d'élément fini isoparamétrique

Maillage

Représentation de la géométrie approchée

Représentation locale des déplacements

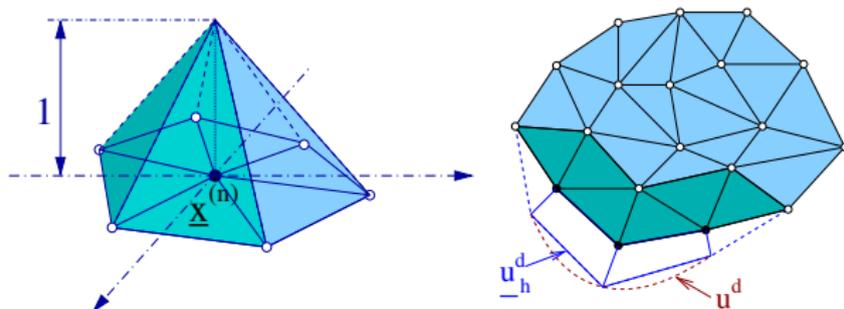
Représentation globale des déplacements

Gradient et tenseur de déformation du déplacement interpolé

## Construction du problème approché

Approximation globale : **forme particulière de la méthode de Galerkin**, avec

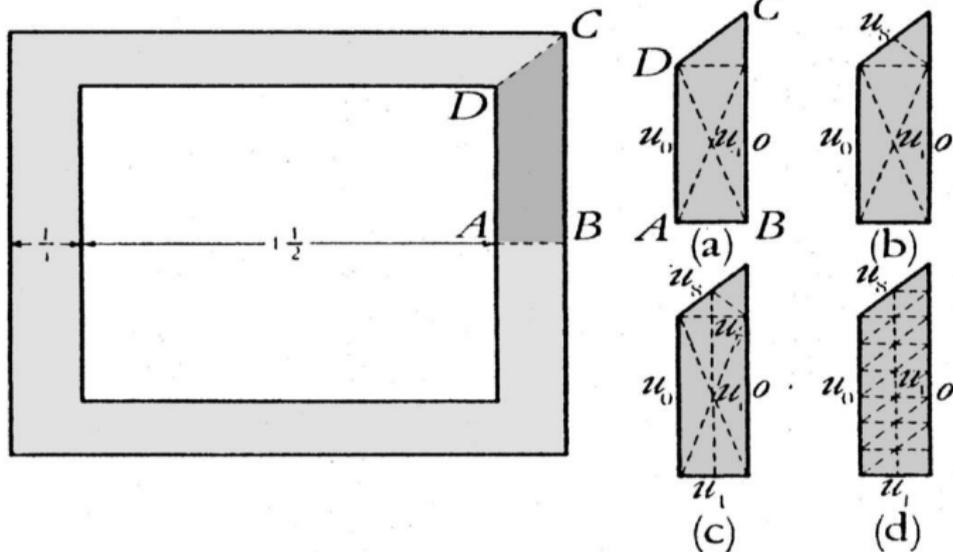
$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)} = \underbrace{\sum_{n | \underline{x}^{(n)} \in S_\xi} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{u}^D(\underline{x}^{(n)})}_{\substack{\underline{u}_h^{(D)} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \\ \text{interpolation des} \\ \text{déplacements } \mathbf{donn\acute{e}s}}} + \underbrace{\sum_{n | \underline{x}^{(n)} \notin S_\xi} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)}}_{\substack{\alpha_K = v_j^{(n)}, \varphi^K(\underline{x}) = \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j \\ \text{interpolation des} \\ \text{déplacements } \mathbf{inconnus}}}$$



- ▶ support géométrique : domaine **approché**  $\Omega_h$  ;
- ▶  $\underline{v}_h^{(D)} \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^D)$  : admissibilité **au sens de l'approximation éléments finis**

*Détails et mise en oeuvre (Matlab) : PCs 2-3*

## La première apparition de la notion d'élément fini triangulaire ?



Torsion d'un tube :  $\Delta\varphi = 0$  ( $\varphi(x_1, x_2)$  : fonction de gauchissement, cf. MEC 431)

**Courant R.**, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration, *Bull. Amer. Mathem. Soc.*, 49 :1–23 (1943).

# Plan

## 1. Exemple : déformations planes et éléments triangulaires linéaires

Maillage

Interpolation linéaire du déplacement

Construction du problème approché

## 2. Le concept d'élément fini isoparamétrique

Maillage

Représentation de la géométrie approchée

Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Gradient et tenseur de déformation du déplacement interpolé

## Le concept d'élément fini isoparamétrique

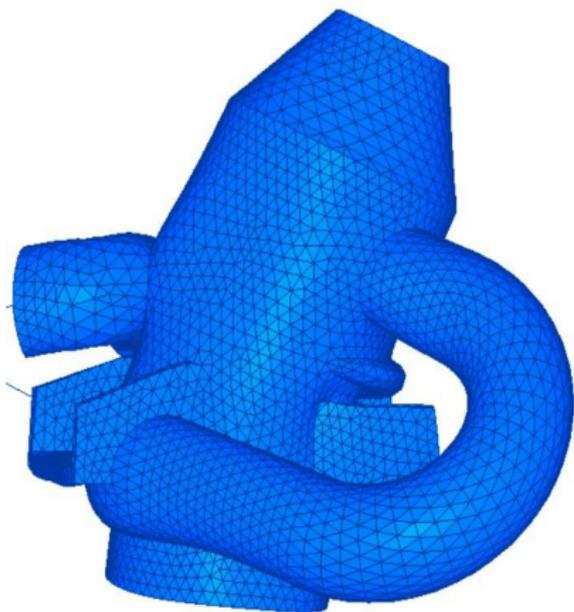
Approche précédente

- ▶ ne convient que pour les problèmes **plans** ;
- ▶ conduit à une représentation de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  (et  $\underline{\underline{\sigma}}$ ) **constante par élément** (triangle).

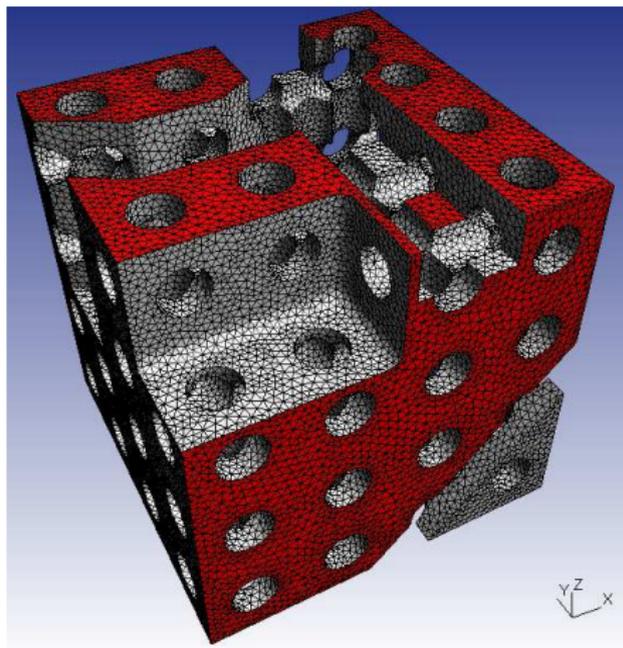
Généralisation nécessaire, permettant

- Eléments finis **volumiques** (situations **3D**) ;
- Représentation de  $\underline{u}$  par polynômes de **degré plus élevé** ;
- Meilleure approximation de **frontières courbes**.

Une réponse à ces objectifs : **le concept d'élément fini isoparamétrique**.



© Electricité de France  
(<http://www.code-aster.org/>)



© <http://www.geuz.org/gmsh/> (mailleur)

# Plan

## 1. Exemple : déformations planes et éléments triangulaires linéaires

Maillage

Interpolation linéaire du déplacement

Construction du problème approché

## 2. Le concept d'élément fini isoparamétrique

Maillage

Représentation de la géométrie approchée

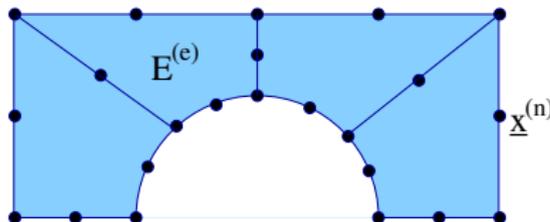
Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Gradient et tenseur de déformation du déplacement interpolé

## Maillage

Cadre général  $\Omega \subset \mathbb{R}^D$  ( $D=3$ ;  $D=2$  en déformations planes ou contraintes planes).



- ▶  $\Omega$  est divisé en  $N_E$  régions  $E^{(e)}$  ( $1 \leq e \leq N_E$ ) de forme simple :
  - triangles ou quadrangles (2D) ;
  - parallélépipèdes, prismes ou tétraèdres (3D) ;
 Chaque  $E^{(e)}$  est le support géométrique d'un **élément fini**.
- ▶ Choix de  $N_N$  points  $\underline{x}^{(n)}$  ( $1 \leq n \leq N_N$ ) de  $\Omega$ , appelés **noeuds**.
  - Tout sommet d'élément est un noeud

Un maillage de  $\Omega$  est défini par l'ensemble des éléments et des noeuds ainsi choisis.

Pour un découpage donné de  $\Omega$  en éléments, le choix des noeuds n'est pas arbitraire (correspond à des familles de fonctions d'interpolation).

## Structuration des données relatives au maillage en deux tables :

- ▶ Table des coordonnées nodales, notée `coor` ( $N_N$  lignes,  $D$  colonnes) :

$$\text{coor}(n, j) = x_j^{(n)}$$

- ▶ La table de connectivité, notée `convec` ( $N_E$  lignes,  $1 + \max_e n_e$  colonnes) :

$$\text{convec}(e, 0) = n_e \quad (\text{nombre de noeuds de } E^{(e)})$$

$$\text{convec}(e, 1 : n_e) \quad (\text{liste des numéros globaux des noeuds de } E^{(e)})$$

`convec` donne la correspondance entre numéros **locaux** et **globaux** des noeuds d'un élément :

$$\text{convec}(e, k) = n$$

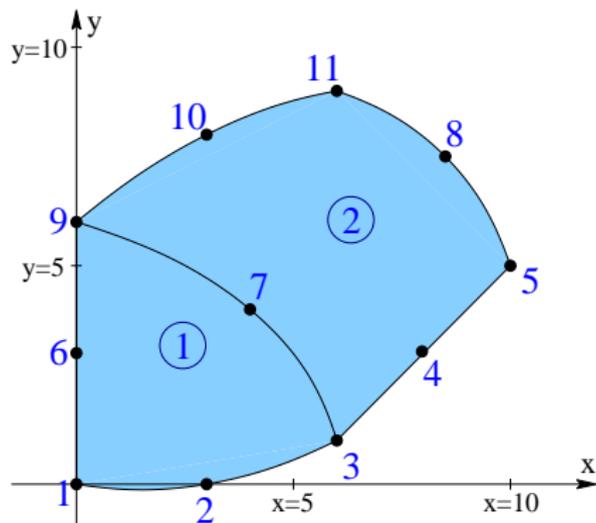
Association des éléments et des noeuds : support permettant de définir

- approximation  $\Omega_h$  de  $\Omega$  (calcul des intégrales de la formulation faible).
- approximation  $\underline{v}_h$  (à support  $\Omega_h$ ) des champs de déplacement sur  $\Omega$  ;

## Exemple

(noeud 1)	0	0
(noeud 2)	3	0
(noeud 3)	6	1
(noeud 4)	8	3
(noeud 5)	10	5
(noeud 6)	0	3
(noeud 7)	4	4
(noeud 8)	8,5	7,5
(noeud 9)	0	6
(noeud 10)	3	8
(noeud 11)	6	9

coor



(élément 1)

(élément 2)

$n_e$	noeuds								
(élément 1)	6	3	9	1	7	6	2	×	×
(élément 2)	8	3	5	11	9	4	8	10	7

connec

# Plan

## 1. Exemple : déformations planes et éléments triangulaires linéaires

Maillage

Interpolation linéaire du déplacement

Construction du problème approché

## 2. Le concept d'élément fini isoparamétrique

Maillage

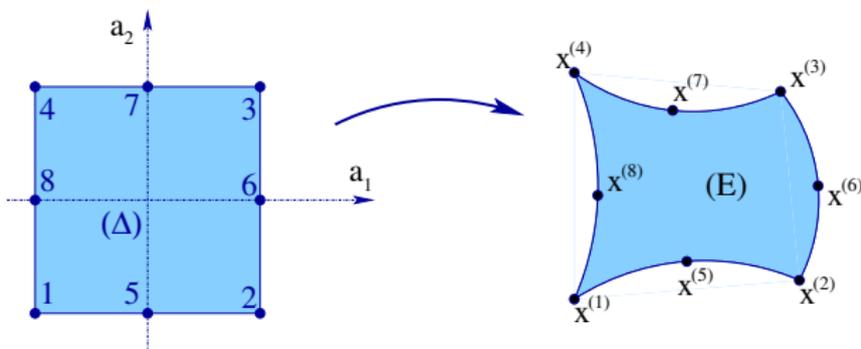
Représentation de la géométrie approchée

Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Gradient et tenseur de déformation du déplacement interpolé

## Représentation de la géométrie approchée



- représentation paramétrique et élément de référence  $\Delta$  :

$$E \ni \underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad (\underline{a} \in \Delta)$$

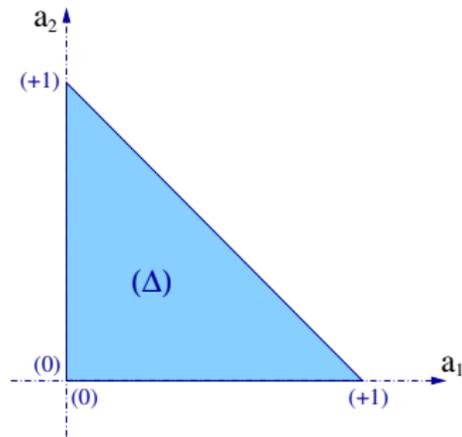
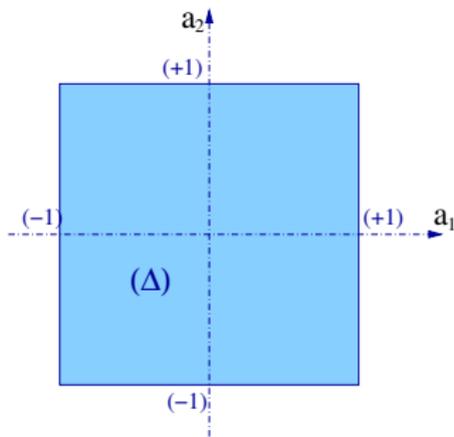
$N_k(\underline{a})$  : fonctions de forme polynômiales.

- Représentation paramétrique vraie aux noeuds et **pour tout choix des  $n_e$  noeuds** :

Il faut  $\underline{x}^{(\ell)} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}^{(\ell)}) \underline{x}^{(k)} \implies N_k(\underline{a}^{(\ell)}) = \delta_{k\ell} \quad (1 \leq k, \ell \leq n_e)$

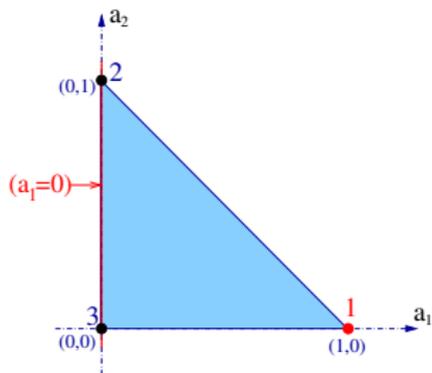
## Eléments de référence couramment utilisés :

- ▶ **carré unité** ( $D=2$ ) :  $\Delta = \{(a_1, a_2) \mid -1 \leq a_1, a_2 \leq 1\}$ ;
- ▶ **triangle unité** ( $D=2$ ) :  $\Delta = \{(a_1, a_2) \mid (a_1, a_2) \geq (0, 0), 1 - a_1 - a_2 \geq 0\}$ ;

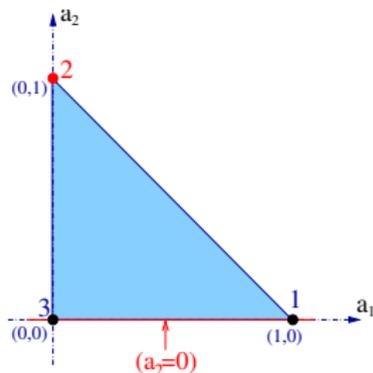


- ▶ **cube unité** ( $D=3$ ) :  $\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) \mid -1 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1\}$ ;
- ▶ **tétraèdre unité** ( $D=3$ ) :  
 $\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) \mid (a_1, a_2, a_3) \geq (0, 0, 0), 1 - a_1 - a_2 - a_3 \geq 0\}$ .
- ▶ **prisme unité** ( $D=3$ ) :  
 $\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) \mid (a_1, a_2) \geq (0, 0), 1 - a_1 - a_2 \geq 0, -1 \leq a_3 \leq 1\}$ .

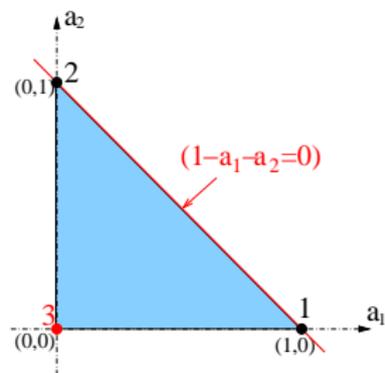
## Exemple de construction des fonctions de forme : (i) élément triangulaire linéaire



$$N_1(a_1, a_2) = a_1$$

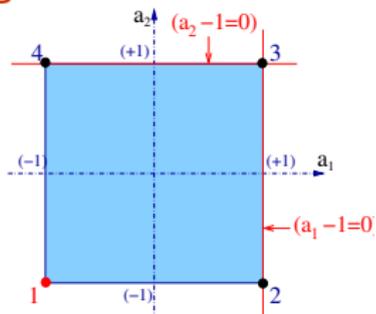


$$N_2(a_1, a_2) = a_2$$

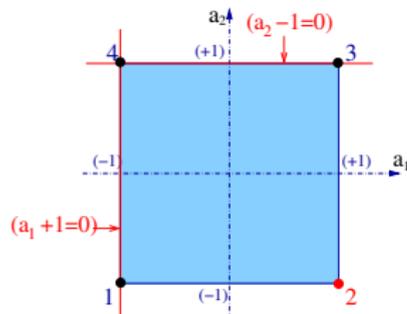


$$N_3(a_1, a_2) = 1 - a_1 - a_2$$

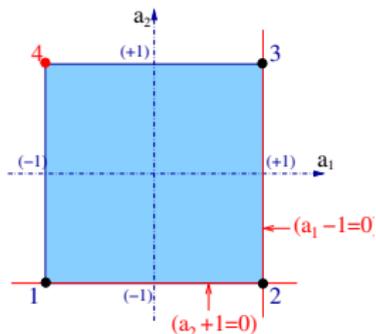
## Exemple de construction des fonctions de forme : (ii) élément quadrangulaire bilinéaire



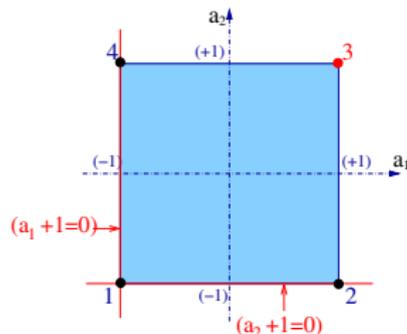
$$N_1(a_1, a_2) = (1 - a_1)(1 - a_2)/4$$



$$N_2(a_1, a_2) = (1 + a_1)(1 - a_2)/4$$

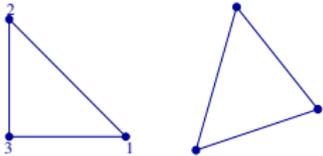
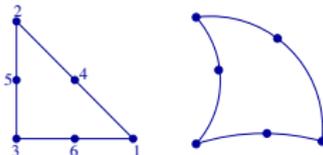


$$N_4(a_1, a_2) = (1 - a_1)(1 + a_2)/4$$

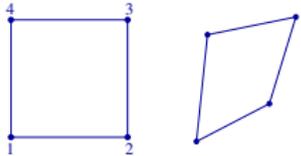
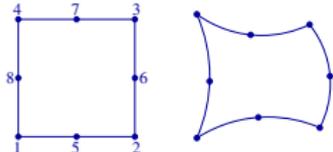


$$N_3(a_1, a_2) = (1 + a_1)(1 + a_2)/4$$

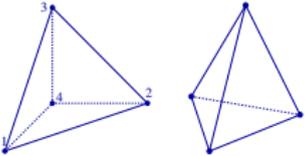
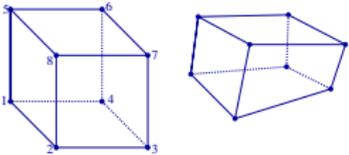
## Exemples de fonctions de forme courantes (i)

Type (référence) (déformé)	Degré partiel / total	Fonctions de forme
	1 / 1	$N_1(a_1, a_2) = a_1$ $N_2(a_1, a_2) = a_2$ $N_3(a_1, a_2) = 1 - a_1 - a_2$
	2 / 2	$N_1(a_1, a_2) = a_1(2a_1 - 1)$ $N_2(a_1, a_2) = a_2(2a_2 - 1)$ $N_3(a_1, a_2) = (1 - a_1 - a_2)(1 - 2a_1 - 2a_2)$ $N_4(a_1, a_2) = 4a_1a_2$ $N_5(a_1, a_2) = 4a_2(1 - a_1 - a_2)$ $N_6(a_1, a_2) = 4a_1(1 - a_1 - a_2)$

## Exemples de fonctions de forme courantes (ii)

Type (référence) (déformé)	Degré part. / tot.	Fonctions de forme
	1 / 2	$N_1(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 - a_1)(1 - a_2)$ $N_3(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 + a_1)(1 + a_2)$ $N_2(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 + a_1)(1 - a_2)$ $N_4(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 - a_1)(1 + a_2)$
	2 / 3	$N_1(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 - a_1)(1 - a_2)(-1 - a_1 - a_2)$ $N_2(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 + a_1)(1 - a_2)(-1 + a_1 - a_2)$ $N_3(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 + a_1)(1 + a_2)(-1 + a_1 + a_2)$ $N_4(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 - a_1)(1 + a_2)(-1 - a_1 + a_2)$ $N_5(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(1 - a_1^2)(1 - a_2)$ $N_6(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(1 - a_2^2)(1 + a_1)$ $N_7(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(1 - a_1^2)(1 + a_2)$ $N_8(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(1 - a_2^2)(1 - a_1)$

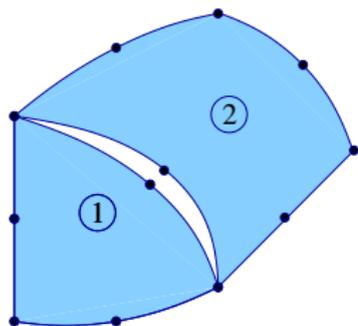
## Exemples de fonctions de forme courantes (iii)

Type (référence) (déformé)	Degré part. / tot.	Fonctions de forme
	1 / 1	$N_1(a_1, a_2, a_3) = a_1$ $N_2(a_1, a_2, a_3) = a_2$ $N_3(a_1, a_2, a_3) = a_3$ $N_4(a_1, a_2, a_3) = 1 - a_1 - a_2 - a_3$
	1 / 3	$N_1(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3)$ $N_2(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 + a_1)(1 - a_2)(1 - a_3)$ $N_3(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 + a_1)(1 + a_2)(1 - a_3)$ $N_4(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 - a_1)(1 + a_2)(1 - a_3)$ $N_5(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 - a_1)(1 - a_2)(1 + a_3)$ $N_6(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 - a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)$ $N_7(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)$ $N_8(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 + a_1)(1 - a_2)(1 + a_3)$

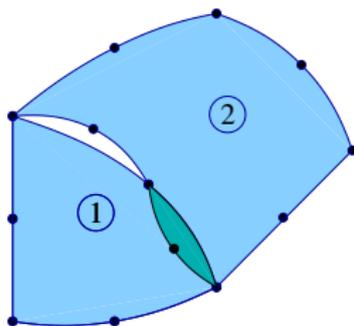
## Notion de conformité

**Conformité d'un maillage** : deux éléments contigus doivent se raccorder sans recouvrement ni trou. Pour ce faire :

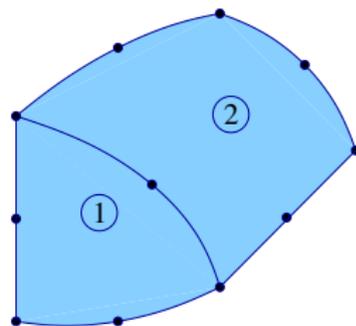
- ▶ la position d'un point  $\underline{x}$  situé sur une face (arête) de  $E$  ne doit dépendre que des noeuds  $\underline{x}^{(k)}$  situés sur la même face (arête).



Non conforme



Non conforme



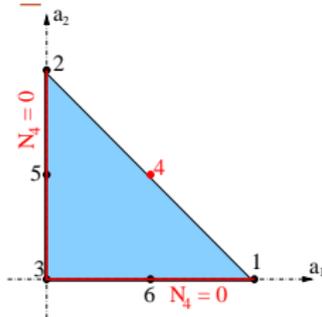
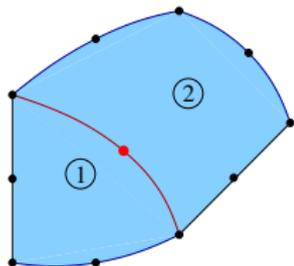
Conforme

## Notion de conformité

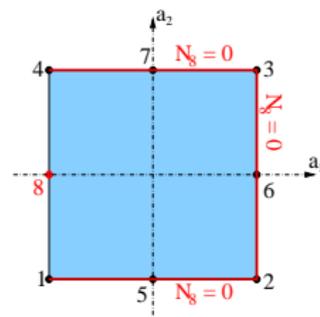
**Conformité d'un maillage** : deux éléments contigus doivent se raccorder sans recouvrement ni trou. Pour ce faire :

- ▶ la position d'un point  $\underline{x}$  situé sur une face (arête) de  $E$  ne doit dépendre que des noeuds  $\underline{x}^{(k)}$  situés sur la même face (arête).

Exigence satisfaite si **chaque**  $N_k(\underline{a})$  s'annule sur toute face et toute arête de  $E$  ne contenant pas le noeud  $\underline{x}^{(k)}$



$$N_4 = 4a_1a_2$$

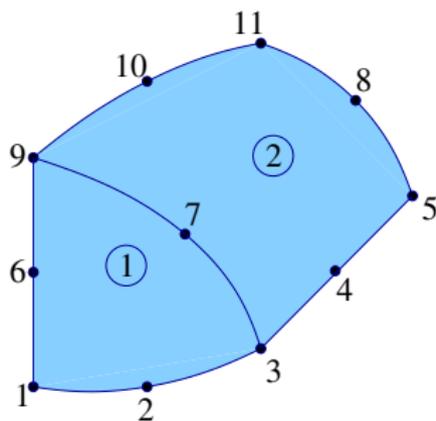


$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - a_2^2)(1 - a_1)$$

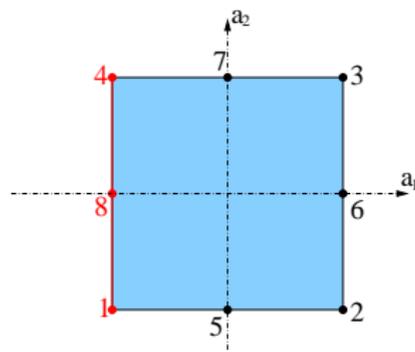
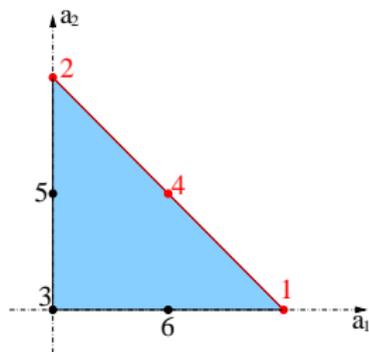
De plus :

- ▶ Les traces des fonctions de forme sur l'interface commune sont égales (habituellement : même nombre de noeuds sur l'interface commune) ;
- ▶ Les noeuds situés sur l'interface commune sont confondus

## Exemple : raccord conforme d'un triangle à 6 noeuds et d'un quadrangle à 8 noeuds (1/3)



## Exemple : raccord conforme d'un triangle à 6 noeuds et d'un quadrangle à 8 noeuds (2/3)



$$N_1(\underline{a}) = a_1(2a_1 - 1)$$

$$N_2(\underline{a}) = a_2(2a_2 - 1)$$

$$N_3(\underline{a}) = (1 - a_1 - a_2)(1 - 2a_1 - 2a_2)$$

$$N_4(\underline{a}) = 4a_1a_2$$

$$N_5(\underline{a}) = 4a_2(1 - a_1 - a_2)$$

$$N_6(\underline{a}) = 4a_1(1 - a_1 - a_2)$$

$$(\underline{a} = (a_1, a_2))$$

$$N_1(\underline{a}) = (1 - a_1)(1 - a_2)(-1 - a_1 - a_2) / 4$$

$$N_2(\underline{a}) = (1 + a_1)(1 - a_2)(-1 + a_1 - a_2) / 4$$

$$N_3(\underline{a}) = (1 + a_1)(1 + a_2)(-1 + a_1 + a_2) / 4$$

$$N_4(\underline{a}) = (1 - a_1)(1 + a_2)(-1 - a_1 + a_2) / 4$$

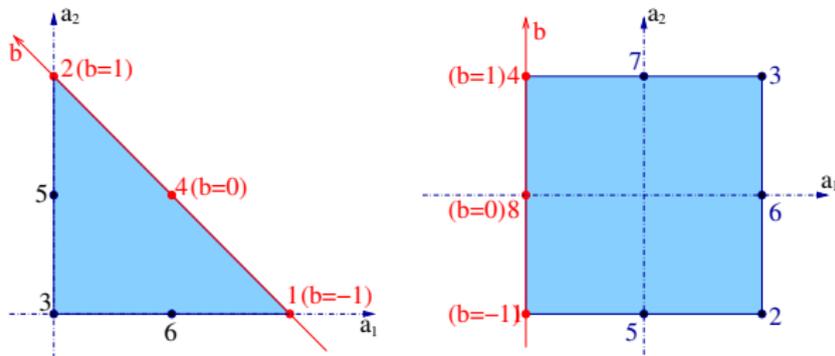
$$N_5(\underline{a}) = (1 - a_1^2)(1 - a_2) / 2$$

$$N_6(\underline{a}) = (1 - a_2^2)(1 + a_1) / 2$$

$$N_7(\underline{a}) = (1 - a_1^2)(1 + a_2) / 2$$

$$N_8(\underline{a}) = (1 - a_2^2)(1 - a_1) / 2$$

## Exemple : raccord conforme d'un triangle à 6 noeuds et d'un quadrangle à 8 noeuds (3/3)



Restriction des fonctions de forme sur le bord partagé (paramétré sur les deux éléments en regard par  $-1 \leq b \leq 1$ ) :

$$\hat{N}_1(b) = b(b-1)/2, \quad \hat{N}_4(b) = 1 - b^2, \quad \hat{N}_2(b) = b(b+1)/2, \quad \text{autres} = 0 \quad (\Delta_1)$$

$$\hat{N}_1(b) = b(b-1)/2, \quad \hat{N}_8(b) = 1 - b^2, \quad \hat{N}_4(b) = b(b+1)/2, \quad \text{autres} = 0 \quad (\Delta_2)$$

Elles sont égales, ce qui garantit un raccord exact, i.e. conforme.

## Régularité de la représentation paramétrique

$$E \ni \underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad (\underline{a} \in \Delta)$$

doit réaliser une **bijection** entre  $\Delta$  et  $E$ .

- ▶ Matrice jacobienne :

$$\underline{J}(\underline{a}) = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right]_{1 \leq i, j \leq D}$$

$$\text{avec } \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial N_k}{\partial a_j}(\underline{a}) x_i^{(k)}$$

- ▶ **Condition : le jacobien  $J = \text{Det} \underline{J}$ , continu, ne s'annule pas sur  $\Delta$ .**
- ▶ Pour un type choisi d'élément, la condition  $J \neq 0$  sur  $\Delta$ 
  - restreint les combinaisons de noeuds admissibles
  - signale les maillages **déficients** (trop grandes distortions), ou **problématiques** (inversion de noeuds, auto-pénétration ou auto-recouvrement)
- ▶ Représentation paramétrique : **représentation lagrangienne abstraite.**

**Element différentiel de volume.**

$$dV(\underline{x}) = J(\underline{a}) dV(\underline{a})$$

Note :  $J(\underline{a})$  est un polynôme de  $\underline{a}$ .

## Exemple : interpolation de trois noeuds alignés.

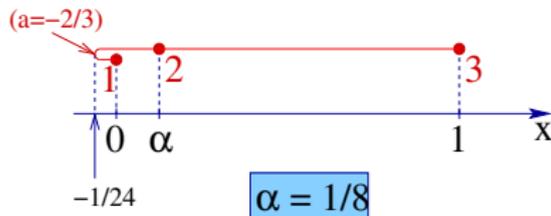
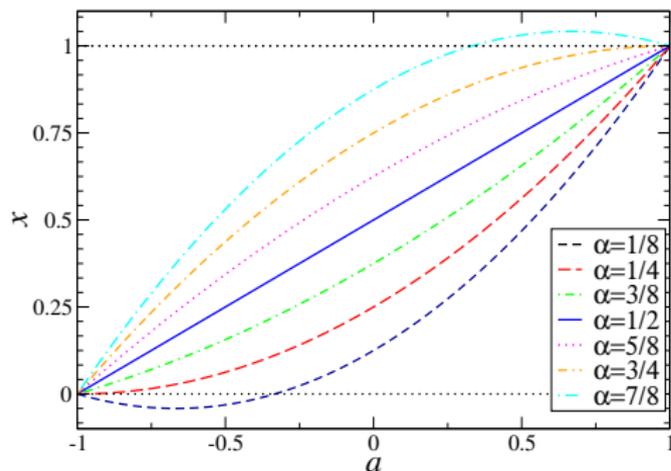


$$x = \hat{N}_1(a) \times 0 + \hat{N}_2(a) \times \alpha + \hat{N}_3(a) \times 1 \quad (a \in \Delta = [-1, 1])$$

$$\hat{N}_1(a) = a(a-1)/2, \quad \hat{N}_2(a) = 1 - a^2, \quad \hat{N}_3(a) = a(a+1)/2$$

( $\hat{N}_1, \hat{N}_2, \hat{N}_3$  : polynômes d'interpolation de Lagrange pour abscisses  $a = -1, 0, 1$ )

Jacobien :  $J(a) = dx/da = (1 - 2\alpha)a + 1/2$ , de signe constant si  $1/4 < \alpha < 3/4$ .



# Plan

## 1. Exemple : déformations planes et éléments triangulaires linéaires

Maillage

Interpolation linéaire du déplacement

Construction du problème approché

## 2. Le concept d'élément fini isoparamétrique

Maillage

Représentation de la géométrie approchée

**Représentation locale des déplacements**

Représentation globale des déplacements

Gradient et tenseur de déformation du déplacement interpolé

## Représentation locale des déplacements

« **Interpolation isoparamétrique** » : représentation des déplacements à l'aide des **mêmes** fonctions de forme que la géométrie :

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}_h(\underline{x}) &= \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{v}^{(k)} \\ \underline{x} &= \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \end{aligned} \right\} (\underline{a} \in \Delta)$$

Autre notation (commode pour la programmation) :

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = [N(\underline{a})] \{\mathbb{V}_e\}$$

$$\{\mathbb{V}_e\} = \{\underline{v}^1, \dots, \underline{v}^{n_e}\}^T = \{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_D^{(n_e)}\}^T$$

$$[N(\underline{a})] = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(\underline{a}) & 0 & 0 & N_{n_e}(\underline{a}) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\underline{a}) & 0 & \dots & 0 & N_{n_e}(\underline{a}) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\underline{a}) & 0 & 0 & 0 & N_{n_e}(\underline{a}) \end{bmatrix}}_{D(=3) \times n_e \text{ colonnes}} \quad (D(=3) \text{ lignes})$$

## Condition nécessaire de convergence

Maillage infiniment fin ( $h \rightarrow 0$ ) : déformation **approximativement constante** sur chaque élément.

- ▶ **Condition nécessaire de convergence** : l'interpolation doit représenter de façon exacte tous les déplacements spatialement affines :
  - Mouvements rigidifiants ( $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}}$ );
  - Mouvements à déformation constante.

Champ de déplacement  $\underline{v}(\underline{x})$  fonction affine des coordonnées :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + \underline{b}$$

Valeurs nodales de ce champ sur un élément :

$$\underline{v}^{(k)}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{b}$$

## Condition nécessaire de convergence

Approximation de  $\underline{v}$  obtenue par l'interpolation :

$$\begin{aligned}\underline{v}_h(\underline{x}) &= \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \{ \underline{A} \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{b} \} = \underline{A} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \right\} \underline{b} \\ &= \underline{A} \cdot \underline{x} + \left\{ \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \right\} \underline{b}\end{aligned}$$

Pour garantir  $\underline{v}^{(k)}(\underline{x}) = \underline{A} \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{b} \implies \underline{v}_h(\underline{x}) = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b}$

il faut et il suffit que les fonctions de forme vérifient

$$\sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) = 1 \quad \text{pour tout } \underline{a} \in \Delta$$

Cette condition est vérifiée par toutes les fonctions de forme courantes.

La condition de somme unité assure que :

$$\underline{\underline{\epsilon}} \left[ [N(\underline{a})] \{ \nabla_e \} \right] \rightarrow \underline{\underline{\epsilon}} [\underline{v}] \quad (h \rightarrow 0) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\epsilon}} \left[ [N(\underline{a})] \{ \nabla_e^{\text{rigide}} \} \right] = \underline{\underline{0}}$$

# Plan

## 1. Exemple : déformations planes et éléments triangulaires linéaires

Maillage

Interpolation linéaire du déplacement

Construction du problème approché

## 2. Le concept d'élément fini isoparamétrique

Maillage

Représentation de la géométrie approchée

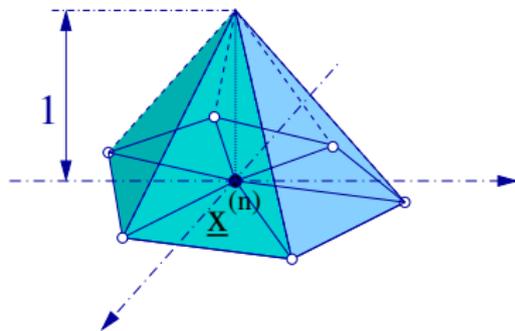
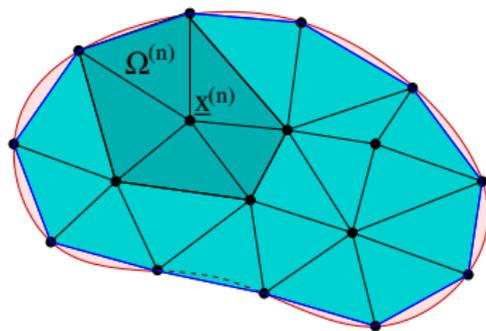
Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Gradient et tenseur de déformation du déplacement interpolé

## Représentation globale des déplacements

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)} \quad (\underline{x} \in \Omega_h)$$



- (a) Le *support* de  $\tilde{N}_n(\underline{x})$  est  $\Omega^{(n)}$  (i.e.  $\tilde{N}_n(\underline{x}) = 0$  pour  $\underline{x} \notin \Omega^{(n)}$ ).
- (b) Si  $E^{(e)} \subset \Omega^{(n)}$ , alors  $\tilde{N}_n(\underline{x}) = N_k(\underline{a})$  avec  $n = \text{convec}(e, k)$  et  $\underline{x} = \underline{x}(\underline{a})$ .

- (c) Propriété de somme unité :

$$\sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) = 1 \quad (\underline{x} \in \Omega_h)$$

## Prise en compte des déplacements imposés

**Table des inconnues** dof : attribue un numéro d'inconnue à chaque déplacement nodal

$$I = \text{dof}(n, j) > 0 \quad (v_j^{(n)} \text{ libre}),$$

$$I = \text{dof}(n, j) \leq 0 \quad (v_j^{(n)} \text{ imposé}).$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_h(\underline{x}) &= \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)} \\ &= \underbrace{\sum_{(n,j) \mid \text{dof}(n,j) \leq 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^D(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j}_{\substack{\underline{u}_h^{(D)} \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^D) \\ \text{interpolation des} \\ \text{déplacements } \mathbf{donnés}}} + \underbrace{\sum_{(n,j) \mid \text{dof}(n,j) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) v_j^{(n)} \underline{e}_j}_{\substack{\underline{v}_h \in \mathcal{C}_h(\mathbf{0}) \\ \text{interpolation des} \\ \text{déplacements } \mathbf{inconnus}}} \\ &= \underline{u}_h^{(D)} + \underline{v}_h^{(0)} \quad (\underline{v}_h \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^D), \underline{v}_h^{(0)} \in \mathcal{C}_h(\mathbf{0})) \end{aligned}$$

**Forme particulière de représentation de Galerkin, avec**

$$\underline{\varphi}^I(\underline{x}) = \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j \text{ et } \alpha_I = v_j^{(n)} \quad \text{avec } I = \text{dof}(n, j)$$



# Plan

## 1. Exemple : déformations planes et éléments triangulaires linéaires

Maillage

Interpolation linéaire du déplacement

Construction du problème approché

## 2. Le concept d'élément fini isoparamétrique

Maillage

Représentation de la géométrie approchée

Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Gradient et tenseur de déformation du déplacement interpolé

## Gradient et tenseur de déformation du déplacement interpolé

### Nécessaires pour la mise en oeuvre de la MEF (calcul de la matrice de rigidité)

- ▶ Définition du gradient de  $\underline{v}_h$  :

$$\underline{d}\underline{v}_h = \underline{\nabla}\underline{v}_h \cdot \underline{d}\underline{x}$$

- ▶ Passage en coordonnées paramétriques  $\underline{a}$  :

$$\underline{d}\underline{x} = \underline{J} \cdot \underline{d}\underline{a}$$

$$\underline{d}\underline{v}_h = \underline{H} \cdot \underline{d}\underline{a} = \underline{H} \cdot \underline{J}^{-1} \cdot \underline{d}\underline{x} \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} \partial u_i \\ \partial a_j \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial N_k}{\partial a_j}(\underline{a}) u_i^{(k)}$$

On obtient :

$$\underline{\nabla}\underline{v}_h(\underline{x}) = \underline{H}(\underline{a}) \cdot \underline{J}^{-1}(\underline{a}) ,$$

$$2\underline{\varepsilon}[\underline{v}_h](\underline{x}) = \underline{H}(\underline{a}) \cdot \underline{J}^{-1}(\underline{a}) + \underline{J}^{-T}(\underline{a}) \cdot \underline{H}^T(\underline{a})$$

## « Notation ingénieur » (ou « notation de Voigt »)

Notation utile (et utilisée) pour la programmation, reposant sur la convention :

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23}\}^T \\ \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}\}^T \end{aligned}$$

- Relation déformation-déplacement :

$$\{\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}_h](\underline{x})\} = [B_e(\underline{a})]\{\mathbb{V}_e\}$$

- Relation contrainte-déformation (élasticité linéaire) :

$$\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\} \quad \text{avec} \quad [A] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{si isotrope !})$$

- Densité d'énergie de déformation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \{\varepsilon\}^T [A] \{\varepsilon\} = \{\mathbb{V}_e\}^T [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] \{\mathbb{V}_e\}$$

## Conclusion

### Notion d'interpolation isoparamétrique :

- ▶ Notion d'interpolation isoparamétrique : fondation pour construire l'approximation de problèmes de mécanique ;
- ▶ Cadre unifié et systématique pour accommoder diversité et complexité des configurations géométriques ;
- ▶ Permet le développement de logiciels de simulation à haut degré de généralité et de flexibilité requis par l'immense variété des applications industrielles.
  - (a) **Forme simple des éléments** ;
  - (b) **Conformité géométrique** assurée simplement (coincidence des noeuds aux interfaces) ;
  - (c) faculté de choisir le **degré polynômial** d'interpolation :
    - ▶ Permet distorsions géométriques, représentation de frontières courbes...
    - ▶ Compromis offerts entre précision et simplicité

[www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html](http://www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html)