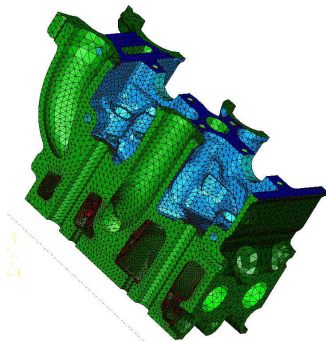


Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis



© PSA Peugeot Citroën

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html

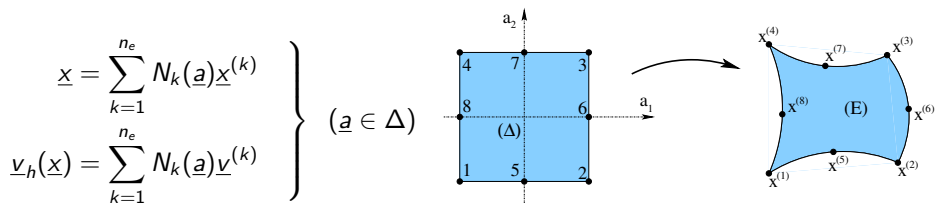
Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

Retour sur amphi 2 : représentation locale des déplacements

Maillage : Éléments et noeuds

- ▶ Représentation paramétrique et élément de référence ;
- ▶ Conformité aux interfaces entre éléments
- ▶ Jacobien de signe constant

Interpolation isoparamétrique : représentation des déplacements à l'aide des **mêmes** fonctions de forme que la géométrie :



Notations (commode pour la programmation) :

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = [N(\underline{a})] \{ \underline{V}_e \}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{v}_h](\underline{x}) = [B(\underline{a})] \{ \underline{V}_e \}$$

$$\{ \underline{V}_e \} = \{ v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_D^{(n_e)} \}^T$$

$$\{ \underline{\underline{\epsilon}} \} = \{ \epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ 2\epsilon_{12} \ 2\epsilon_{13} \ 2\epsilon_{23} \}^T$$

Plan du cours

Concepts fondamentaux et leur application en élasticité linéaire statique

- ▶ Amphi 1 – Résolution approchée de problèmes d'équilibre en élasticité
- ▶ Amphi 2 – La notion d'élément fini isoparamétrique
- ▶ **Amphi 3 – La méthode des éléments finis en élasticité linéaire**
- ▶ Amphi 4 – Application à la mécanique linéaire de la rupture

Régime non-linéaire quasistatique, application aux solides élastoplastiques

- ▶ Amphi 5 – Calcul de solides à comportement non-linéaire
- ▶ Amphi 6 – Calcul de solides élastoplastiques : aspects locaux
- ▶ Amphi 7 – Calcul de solides élastoplastiques : aspects globaux

Régime linéaire, avec évolution temporelle

- ▶ Amphi 8 – Evolution thermique et thermoélasticité linéaire quasistatique
- ▶ Amphi 9 – Analyse dynamique des structures élastiques

Amphi 3 – La méthode des éléments finis en élasticité linéaire

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbb{K}]$

Résolution directe de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par factorisation de $[\mathbb{K}]$

Résolution de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Plan

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbf{K}]$

Résolution directe de $[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$ par factorisation de $[\mathbf{K}]$

Résolution de $[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

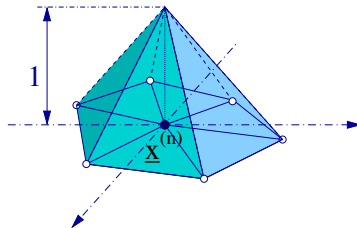
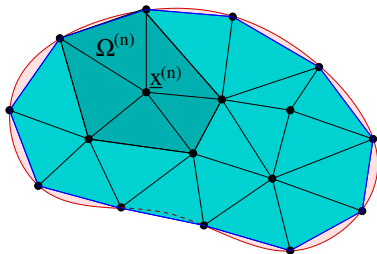
Principe : méthode de Galerkin. Base de fonctions construite par éléments finis (amphi 2) appliquée à la formulation faible (amphi 1).

Interpolation globale du déplacement inconnu $\underline{u} \in \mathcal{C}_h(S_u)$ (amphi 2) :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{\text{dof}(n,j)>0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^{(n)} \underline{e}_j + \sum_{\text{dof}(n,j)\leq 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^D(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j = \underbrace{[\tilde{N}(\underline{x})]\{\mathbf{U}\}}_{\underline{u}_h^{(0)}(\underline{x})} + \underline{u}_h^{(D)}(\underline{x})$$

Champs virtuels associés $\underline{w} \in \mathcal{C}_h(\underline{0})$:

$$\underline{w}(\underline{x}) = \sum_{\text{dof}(n,j)>0} \tilde{N}_n(\underline{x}) w_j^{(n)} \underline{e}_j = [\tilde{N}(\underline{x})]\{\mathbf{W}\}$$



Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

Principe : méthode de Galerkin. Base de fonctions construite par éléments finis (amphi 2) appliquée à la formulation faible (amphi 1).

Interpolation globale du déplacement inconnu $\underline{u} \in \mathcal{C}_h(S_u)$ (amphi 2) :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = [\tilde{N}(\underline{x})]\{\mathbf{U}\} + \underline{u}_h^{(D)}(\underline{x})$$

Champs virtuels associés $\underline{w} \in \mathcal{C}_h(0)$:

$$\underline{w}(\underline{x}) = [\tilde{N}(\underline{x})]\{\mathbf{W}\}$$

Insertion dans la formulation faible :

$$\{\mathbb{F}^{\text{int}}\} + \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\} = \{0\} \quad (\text{amphi 1})$$

$$\{\mathbf{W}\}^T \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\} = \int_{\Omega_h} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_{T,h}} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

$$\{\mathbf{W}\}^T \{\mathbb{F}^{\text{int}}\} = - \int_{\Omega_h} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(0)} + \underline{u}_h^{(D)}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}](\underline{x}) \, dV = \{\mathbf{W}\}^T \left(-[\mathbb{K}]\{\mathbf{U}\} + \{\mathbb{F}^u\} \right)$$

Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

En pratique, fonctions de forme globales \tilde{N}_n **non utilisées explicitement** :

- ▶ **Traitement élément par élément, assemblage**

Repose sur l'**additivité par rapport aux éléments** des composants de l'écriture matricielle du problème approché :

$$[\mathbb{K}]\{U\} = \{F^u\} + \{F^{\text{ext}}\}$$

$$\{W\}^T [\mathbb{K}]\{U\} = \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[u_h^{(0)}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[w](x) dV$$

$$\{W\}^T \{F^u\} = - \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[u_h^{(D)}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[w](x) dV$$

$$\{W\}^T \{F^{\text{ext}}\} = \sum_{e=1}^{N_E} \left\{ \int_{E_e} \rho f \cdot \underline{w} dV + \int_{\Gamma_T^e} T^D \cdot \underline{w} dS \right\} \quad (\Gamma_T^e = S_T \cap E_e)$$

- ▶ **Calcul d'intégrales sur chaque élément fini ;**
- ▶ **Assemblage des contributions de chaque élément dans $[\mathbb{K}]$ et $\{F\}$**

Plan

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbb{K}]$

Résolution directe de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par factorisation de $[\mathbb{K}]$

Résolution de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Plan

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbf{K}]$

Résolution directe de $[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$ par factorisation de $[\mathbf{K}]$

Résolution de $[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Matrice de rigidité élémentaire

Contribution d'un élément fini aux efforts intérieurs généralisés :

$$\{\mathbb{W}_e\}^T \{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\} = \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV$$

- ▶ Passage sur l'élément de référence : $\underline{x} \in E_e \rightarrow \underline{a} \in \Delta_e$, $dV = J(\underline{a}) dV(\underline{a})$
- ▶ Densité de puissance des efforts intérieurs (amphi 2)

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] = \{\varepsilon[\underline{w}]\}^T [A] \{\varepsilon[\underline{u}_h]\} = \{\mathbb{W}_e\}^T [B(\underline{a})]^T [A] [B(\underline{a})] \{\mathbb{U}_e\}$$

- ▶ Matrice de rigidité élémentaire :

$$\int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \{\mathbb{W}_e\}^T \left\{ \int_{\Delta_e} [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] J_e(\underline{a}) dV(\underline{a}) \right\} \{\mathbb{U}_e\}$$

soit

$$\int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \{\mathbb{W}_e\}^T [\mathbb{K}_e] \{\mathbb{U}_e\} \quad \text{i.e.} \quad \{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\} = [\mathbb{K}_e] \{\mathbb{U}_e\}$$

$$[\mathbb{K}_e] = \int_{\Delta_e} [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] J_e(\underline{a}) dV(\underline{a})$$

A ce stade, déplacements imposés sur E_e non pris en compte (à suivre)

Forces nodales élémentaires associées aux efforts extérieurs

$$\int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{\Gamma_e^e} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS = \{\mathbb{W}_e\}^T \{\mathbb{F}_e^{\text{vol}} + \mathbb{F}_e^{\text{surf}}\} = \{\mathbb{W}_e\}^T \{\mathbb{F}_e^{\text{ext}}\}$$

Prise en compte de forces imposées dans le volume $\longrightarrow \{\mathbb{F}_e^{\text{vol}}\}$

$$\int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV = \{\mathbb{W}_e\}^T \left\{ \int_{\Delta_e} [N(\underline{a})]^T \{ \underline{f}(\underline{x}(\underline{a})) \} J_e(\underline{a}) \, dV(\underline{a}) \right\} = \{\mathbb{W}_e\}^T \{\mathbb{F}_e^{\text{vol}}\}$$

Prise en compte de forces imposées sur la frontière $\longrightarrow \{\mathbb{F}_e^{\text{surf}}\}$

Voir détails dans livre, section 3.2.2

Intégrales élémentaires : récapitulation

► Matrice de rigidité élémentaire

$$[\mathbb{K}_e] = \int_{\Delta_e} [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] J_e(\underline{a}) dV(\underline{a})$$

► Forces nodales élémentaires associées aux efforts extérieurs

$$\{\mathbb{F}_e^{\text{vol}}\} = \left\{ \int_{\Delta_e} [N(\underline{a})]^T \{ \underline{f}(\underline{x}(\underline{a})) \} J_e(\underline{a}) dV(\underline{a}) \right\}$$

$$\{\mathbb{F}_e^{\text{surf}}\} = \left\{ \int_{\Sigma_e} [N(\underline{b})]^T \{ \underline{T}^D(\underline{x}(\underline{b})) \} \hat{J}(\underline{b}) db_1 db_2 \right\} \quad (\text{cf. livre, section 3.2.2})$$

- Intégrales élémentaires systématiquement écrites sous forme « normalisée », sur l'**élément de référence** ou sa frontière ;
- Nécessité d'une méthode **systématique** pour leur calcul **numérique**.

Plan

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbb{K}]$

Résolution directe de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par factorisation de $[\mathbb{K}]$

Résolution de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Intégration numérique par points de Gauss


(a) Intégrales unidimensionnelles

$$\int_{-1}^1 f(a) da \approx \sum_{g=1}^G w_g f(a_g) \quad (a_g : \text{« points de Gauss »}, w_g : \text{« poids »})$$


Formule à G points de Gauss : exacte pour $f(a)$ polynôme qq. de degré $\leq 2G$

- ▶ $-1 < a_g < 1$ ($1 \leq g \leq G$) pour toute formule à G points ;
- ▶ Symétrie : si (a_g, w_g) est point de Gauss, alors $(-a_g, w_g)$ aussi.

Exemple ($G = 2$, degré 3) : $\int_{-1}^1 f(a) da \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.



Exemple ($G = 3$, degré 5) : $\int_{-1}^1 f(a) da \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.



Intégration numérique par points de Gauss

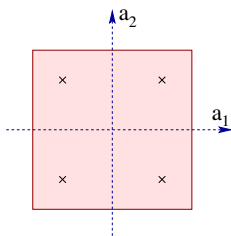
(a) Intégrales unidimensionnelles

(b) Intégrales sur des carrés ou des cubes

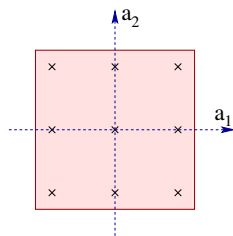
Produit cartésien de formules 1D

$$\int_{C^2} f(a_1, a_2) da_1 da_2 \approx \sum_{g_1=1}^G \sum_{g_2=1}^G w_{g_1} w_{g_2} f(a_{g_1}, a_{g_2})$$

$$\int_{C^3} f(a_1, a_2, a_3) da_1 da_2 da_3 \approx \sum_{g_1=1}^G \sum_{g_2=1}^G \sum_{g_3=1}^G w_{g_1} w_{g_2} w_{g_3} f(a_{g_1}, a_{g_2}, a_{g_3})$$



$G = 2$



$G = 3$

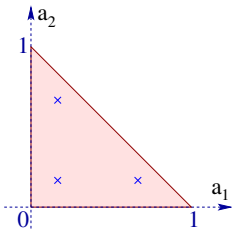
Intégration numérique par points de Gauss

- (a) Intégrales unidimensionnelles
- (b) Intégrales sur des carrés ou des cubes
- (c) Intégrales sur des triangles ou tétraèdres**

Formules **spécifiques**, non construites à partir de formules 1D :

$$\int_{T^2} f(\underline{a}) da_1 da_2 \approx \sum_{g=1}^G w_g f(\underline{a}_g)$$

Exemple (triangle, $G = 3$) :



$$\int_{T^2} f(\underline{a}) da_1 da_2 \approx \frac{1}{6} \left[f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \right]$$

Plan

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbb{K}]$

Résolution directe de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par factorisation de $[\mathbb{K}]$

Résolution de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Assemblage

Formellement, l'assemblage de $[\mathbb{K}]$ et $\{\mathbb{F}\}$ revient à exploiter la relation

$$\{\mathbb{W}\}^T ([\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} - \{\mathbb{F}^u\} - \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\}) = \sum_{e=1}^{N_E} \{\mathbb{W}_e\}^T ([\mathbb{K}_e]\{\mathbb{U}_e\} - \{\mathbb{F}_e^{\text{ext}}\})$$

- ▶ $[\mathbb{K}_e], \{\mathbb{F}_e^{\text{ext}}\}, \{\mathbb{U}_e\}, \{\mathbb{W}_e\}$: **numérotation locale**
- ▶ $[\mathbb{K}], \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\}, \{\mathbb{U}\}, \{\mathbb{W}\}$: **numérotation globale**

Procédure d'assemblage de $[\mathbb{K}]$ et $\{\mathbb{F}\}$:

- ▶ Calcul de matrices et forces généralisées **élémentaires** $[\mathbb{K}_e], \{\mathbb{F}_e^{\text{ext}}\}$;
Distinction **sur chaque élément** entre déplacements donnés et inconnus
 \implies contributions de $[\mathbb{K}_e]$ à $[\mathbb{K}]$ et $\{\mathbb{F}^u\}$;
- ▶ Affectation des coefficients dans $[\mathbb{K}], \{\mathbb{F}^u\}$ et $\{\mathbb{F}^{\text{ext}}\}$:
utilise correspondance entre numérotations locale et globale (connectivité)

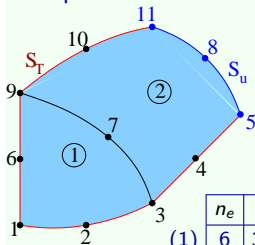
Distinction sur chaque élément entre DDLs donnés et inconnus

Partition des degrés de liberté sur l'élément :

$$\{\mathbf{U}_e\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_e^{(0)} \\ \mathbf{U}_e^{(D)} \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{W}_e\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_e^{(0)} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad [\mathbb{K}_e] = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_e^{(00)} & \mathbb{K}_e^{(0D)} \\ \mathbb{K}_e^{(D0)} & \mathbb{K}_e^{(DD)} \end{bmatrix}$$

- ▶ $[\mathbb{K}_e^{(00)}]$: contribution de l'élément à $[\mathbb{K}]$;
- ▶ $-\mathbb{K}_e^{(0D)}\{\mathbf{U}_e^{(D)}\}$: contribution de l'élément à $\{\mathbf{F}^u\}$;

Exemple :



n_e	noeuds								
(1)	6	3	9	1	7	6	2	×	×
(2)	8	3	5	11	9	4	8	10	7

Element 1 : $[\mathbb{K}_e^{(00)}] = [\mathbb{K}_e]$;

Element 2 : $[\mathbb{K}_e^{(00)}] = \mathbb{K}_e(\mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(0)})$,
 $[\mathbb{K}_e^{(0D)}] = \mathbb{K}_e(\mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(D)})$

avec $\mathcal{L}^{(0)} = \{1, 4, 5, 7, 8\}$
 $\mathcal{L}^{(D)} = \{2, 3, 6\}$

Assemblage de $[\mathbb{K}]$ et $\{\mathbb{F}^u\}$

Initialisation : $[\mathbb{K}] = [0]$ (matrice $N \times N$), $\{\mathbb{F}^u\} = \{0\}$ (N -vecteur).

Boucle sur les éléments : pour $1 \leq e \leq N_E$:

- ▶ Nombre de nœuds de E_e ;

$$n_e = \text{connec}(e, 0)$$

Liste des numéros globaux des nœuds de E_e :

$$\text{nodes}(k) = \text{connec}(e, k) \quad (1 \leq k \leq n_e)$$

Coordonnées des nœuds :

$$\underline{x}^{(k)} = \text{coor}(\text{nodes}(k), :) \quad (1 \leq k \leq n_e);$$

Restriction à E_e de la table des inconnues :

$$\text{dofe} = \{\text{dof}(n, j)\}, \quad j = 1, \dots, D \text{ et } n \in \text{nodes}$$

(la liste dofe est 1D, dof étant parcourue ligne à ligne) ;

- ▶ Calcul de $[\mathbb{K}_e]$;

- ▶ Contribution de $[\mathbb{K}_e]$ à $[\mathbb{K}]$ et $\{\mathbb{F}^u\}$:

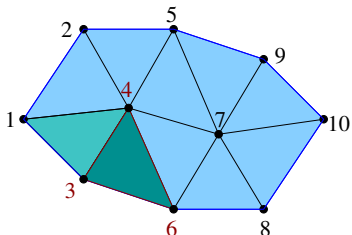
pour $1 \leq p, q \leq Dn_e$:

$$\mathbb{K}_{IJ} = \mathbb{K}_{IJ} + \mathbb{K}_{e,pq} \quad I = \text{dofe}(p) > 0, \quad J = \text{dofe}(q) > 0$$

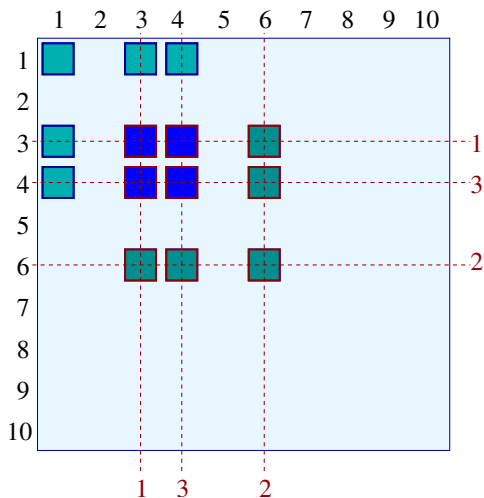
$$\mathbb{F}_I^u = \mathbb{F}_I^u - \mathbb{K}_{e,pq} \mathbb{U}_{e,q}^{(D)} \quad I = \text{dofe}(p) > 0, \quad \text{dofe}(q) < 0$$

Exemple

Problème scalaire (une inconnue par nœud)



Maillage



Matrice de rigidité $[\mathbb{K}]$

Plan

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbb{K}]$

Résolution directe de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par factorisation de $[\mathbb{K}]$

Résolution de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Plan

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbb{K}]$

Résolution directe de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par factorisation de $[\mathbb{K}]$

Résolution de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Propriétés de $[\mathbb{K}]$

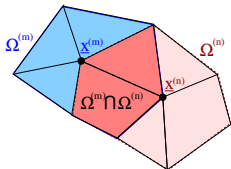
- ▶ $[\mathbb{K}]$ est symétrique et définie positive :

$$[\mathbb{K}] = [\mathbb{K}]^T, \quad \{U\}^T [\mathbb{K}] \{U\} > 0 \text{ si mouvement rigide impossible}$$

- ▶ $[\mathbb{K}]$ est creuse :

$$\mathbb{K}_{IJ} = \int_{\Omega^{(m)} \cap \Omega^{(n)}} \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{N}_m(\underline{x})\underline{e}_i] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{N}_n(\underline{x})\underline{e}_j] dV(\underline{x})$$

$$(I = \text{dof}(m, i) > 0, J = \text{dof}(n, j) > 0)$$



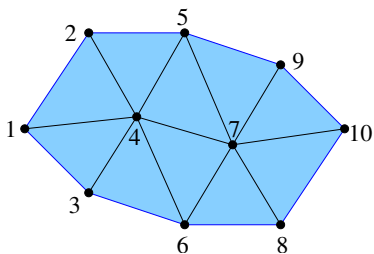
- ▶ Structure « bande » de $[\mathbb{K}]$ et largeur de bande L_B :

$$|I - J| > L_B \Rightarrow \mathbb{K}_{IJ} = 0 \quad \text{avec} \quad L_B/N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

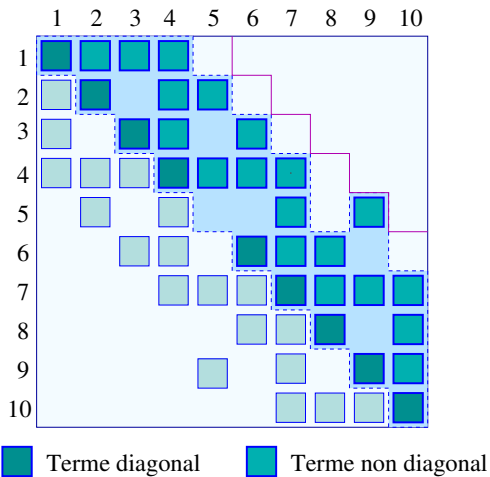
- ▶ Structure « profil » de $[\mathbb{K}]$: la largeur de bande n'est pas uniforme.

$$L(J) = \min\{I \mid \mathbb{K}_{IJ} \neq 0\} \quad (\text{Profil de } [\mathbb{K}])$$

Exemple



J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L(J)$	1	1	1	1	2	3	4	6	5	7



$$L_B = 4$$

Plan

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbb{K}]$

Résolution directe de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par factorisation de $[\mathbb{K}]$

Résolution de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Résolution directe par factorisation de $[\mathbb{K}]$

► Factorisation

$$[\mathbb{K}] = [\mathbb{L}][\mathbb{D}][\mathbb{L}]^T$$

- $[\mathbb{D}]$: matrice diagonale définie positive ($D_{II} > 0$ pour tout I);
- $[\mathbb{L}]$: matrice triangulaire inférieure à diagonale unité ($L_{II} = 1$ pour tout I).

► Résolution du système linéaire :

$$[\mathbb{L}][\mathbb{D}][\mathbb{L}]^T \{U\} = \{F\} \implies \begin{cases} [\mathbb{L}] \{Z\} = \{F\} \\ [\mathbb{L}]^T \{U\} = [\mathbb{D}]^{-1} \{Z\} \end{cases}$$

Calcul de la décomposition $[K] = [L][D][L]^T$: méthode de Choleski

Les coefficients de $[K]$ (**connus**) sont reliés à ceux de $[D]$, $[L]$ (**inconnus**) par

$$\mathbb{K}_{JJ} = \mathbb{D}_{JJ} + \sum_{K=1}^{J-1} \mathbb{L}_{JK}^2 \mathbb{D}_{KK} \quad (1 \leq J \leq N) \quad (a)$$

$$\mathbb{K}_{IJ} = \mathbb{L}_{JI} \mathbb{D}_{II} + \sum_{K=1}^{I-1} \mathbb{L}_{IK} \mathbb{L}_{JK} \mathbb{D}_{KK} \quad (1 \leq I \leq J-1, 2 \leq J \leq N) \quad (b)$$

- ▶ $J = 1$ (initialisation) : la relation (a) donne \mathbb{D}_{11} explicitement :

$$\mathbb{D}_{11} = \mathbb{K}_{11}$$

- ▶ $J = 2, \dots, N$: la relation (b) écrite pour chaque I ($1 \leq I \leq J-1$) donne \mathbb{L}_{JI} :

$$\mathbb{L}_{JI} = \frac{1}{\mathbb{D}_{II}} \left[\mathbb{K}_{IJ} - \sum_{K=1}^{I-1} \mathbb{L}_{IK} \mathbb{L}_{JK} \mathbb{D}_{KK} \right] \quad (1 \leq I \leq J-1)$$

La relation (a) donne ensuite \mathbb{D}_{JJ} en fonction de quantités connues :

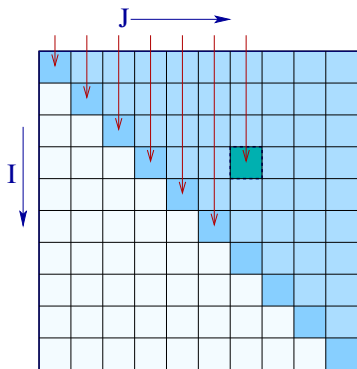
$$\mathbb{D}_{JJ} = \mathbb{K}_{JJ} - \sum_{K=1}^{J-1} \mathbb{L}_{JK}^2 \mathbb{D}_{KK}$$

Calcul de la décomposition $[K] = [L][D][L]^T$: méthode de Choleski

Les coefficients de $[K]$ (**connus**) sont reliés à ceux de $[D]$, $[L]$ (**inconnus**) par

$$K_{JJ} = D_{JJ} + \sum_{K=1}^{J-1} L_{JK}^2 D_{KK} \quad (1 \leq J \leq N) \quad (a)$$

$$K_{IJ} = L_{JI} D_{II} + \sum_{K=1}^{I-1} L_{IK} L_{JK} D_{KK} \quad (1 \leq I \leq J-1, 2 \leq J \leq N) \quad (b)$$



Note : Factorisation LDL^T invisible dans programmes Matlab (cachée dans opérateur « \ »)

Stockage en mémoire de $[\mathbb{K}]$

Préservation par Choleski des structures « bande » et « profil » :

- ▶ Si $[\mathbb{K}]$ a un profil défini par $L(J)$, alors $[\mathbb{L}]^T$ l'a aussi ;
- ▶ Si $[\mathbb{K}]$ a une demi-largeur de bande L_B , alors $[\mathbb{L}]^T$ l'a aussi.

En revanche, $\mathbb{K}_{IJ} = 0 (L(J) \leq I \leq J) \not\Rightarrow \mathbb{L}_{IJ} = 0$.

Stockage intégral en mémoire de $[\mathbb{K}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$: inutile et à éviter

Stockage en mémoire de la matrice de rigidité

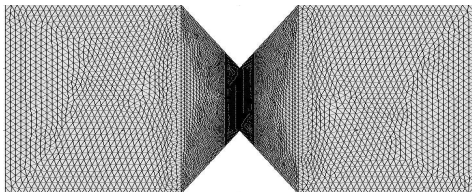
Stockage intégral en mémoire de $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$: inutile et à éviter

- ▶ \mathbb{K} est **symétrique** : $N(N+1)/2$ coefficients indépendants au maximum ;
- ▶ \mathbb{K} est **bande** : $N(L_B + 1)$ coefficients, $L_B \ll N$ en général ;
- ▶ \mathbb{K} est **profil** : ne stocker \mathbb{K}_{IJ} que pour $J - L_B \leq L(J) \leq I \leq J$
(partie de la bande située à l'intérieur du profil) ;
- ▶ Si utilisation de solveur **direct** (type $[L][D][L]^T$) :
stockage minimal = profil (y compris zéros situés en-dessous),
écraser \mathbb{K} par $[L], [D]$.
- ▶ Si utilisation de solveur **itératif** (voir *infra*) : **ne stocker que les $\mathbb{K}_{IJ} \neq 0$**
« Stockage Morse » (du triangle inférieur)
[activé par la déclaration Matlab `sparse`].
- ▶ **Réduction de la largeur de bande de \mathbb{K}** : renumérotation des noeuds par
l'algorithme de Cuthill-McKee (Matlab : `symrcm`)

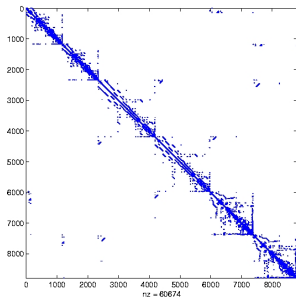
$$\max_e (\max \text{conec}(e, :) - \min \text{conec}(e, :)) \longrightarrow \min$$

Exemple de réduction de largeur de bande

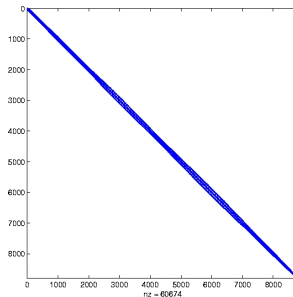
Renumérotation des noeuds du maillage par l'algorithme de Cuthill-McKee



17150 éléments T3
8762 noeuds.



Avant



Après ($L_B/N = 0.0137$)

Plan

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbb{K}]$

Résolution directe de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par factorisation de $[\mathbb{K}]$

Résolution de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Alternative : résolution de $[\mathbb{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$ par méthode itérative

- ▶ Si N grand : stockage de $[\mathbb{K}]$ problématique, même sous forme « profil » ;
- ▶ Alternative : méthode **itérative** de résolution :

$$\{\mathbf{U}^{(k)}\} \quad (k \geq 0), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \{\mathbf{U}^{(k)}\} = \{\mathbf{U}\}$$

- ▶ Stockage de $[\mathbb{K}]$ remplacé par évaluation de la suite des résidus

$$\{\mathbf{R}^{(k)}\} = \{\mathbf{F}\} - [\mathbb{K}]\{\mathbf{U}^{(k)}\} \quad (k \geq 0)$$

- ▶ Point de vue de la minimisation de l'énergie potentielle : algorithme du **gradient conjugué** pour le problème de minimisation

$$\boxed{\{\mathbf{U}\} = \arg \min_{\{\mathbf{V}\}} P(\{\mathbf{V}\})}, \quad P(\{\mathbf{V}\}) = \frac{1}{2}\{\mathbf{V}\}[\mathbb{K}]\{\mathbf{V}\} - \{\mathbf{V}\}^T\{\mathbf{F}\} + \text{Cste}$$

(voir chapitre 3 pour détails algorithmes)

Plan

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbb{K}]$

Résolution directe de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par factorisation de $[\mathbb{K}]$

Résolution de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Post-traitement de la solution en déplacement

- Calcul des déformations et contraintes aux points de Gauss de chaque élément

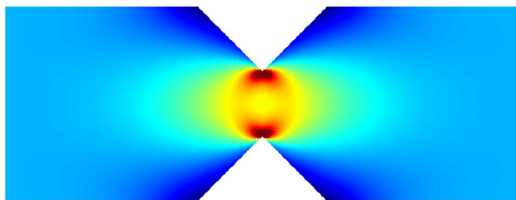
$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h](x_g) = [B_e(\underline{a}_g)]\{U_e\}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_g) = [A][B_e(\underline{a}_g)]\{U_e\}$$

aux points de Gauss de l'élément E_e

(Réutilisation des valeurs $[B_e(\underline{a}_g)]$ précédemment utilisées pour calculer $[\mathbb{K}_e]$)

- Pour tracés graphiques (cartes d'isovaleurs,...) :



Éprouvette entaillée sous traction simple : carte de σ_{xx} .

- Recherche du champ $\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_h$ ou $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_h$ défini par interpolation de valeurs nodales « le plus proche » des valeurs de $\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h]$ ou $\underline{\underline{\sigma}}$ aux points de Gauss ;
- Tracé de cartes à l'aide de $\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_h$ ou $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_h$.

Plan

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbb{K}]$

Résolution directe de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par factorisation de $[\mathbb{K}]$

Résolution de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Formulation faible : forme faisant intervenir les réactions (cf. amphi 1)

trouver $(\underline{u}, \underline{T}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'(S_u)$ tel que

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV - \int_{S_u} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{w} \, dS = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

$$\int_{S_u} \underline{u} \cdot \underline{T}' \, dS = \int_{S_u} \underline{u}^D \cdot \underline{T}' \, dS \quad \forall \underline{T}' \in \mathcal{C}'(S_u)$$

Utile par ex. en mécanique du contact (formulation loi de frottement), cf. amphi 5

► Construction du système linéaire d'équations.

Interpoler \underline{u} et \underline{w} sans distinguer DDLs libres et imposés :

$$\begin{aligned} \underline{u}_h(\underline{x}) &= \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{u}^{(n)} & \underline{w}(\underline{x}) &= \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{w}^{(n)} \\ &= [\tilde{\mathbf{N}}(\underline{x})]\{\mathbf{U}\} & &= [\tilde{\mathbf{N}}(\underline{x})]\{\mathbf{W}\} \end{aligned}$$

Ici, $\{\mathbf{U}\}, \{\mathbf{W}\}$ définis par rapport à **tous** les noeuds du maillage,

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Formulation faible : forme faisant intervenir les réactions (cf. amphi 1)

trouver $(\underline{u}, \underline{T}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'(S_u)$ tel que

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV - \int_{S_u} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{w} \, dS = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

$$\int_{S_u} \underline{u} \cdot \underline{T}' \, dS = \int_{S_u} \underline{u}^D \cdot \underline{T}' \, dS \quad \forall \underline{T}' \in \mathcal{C}'(S_u)$$

► Construction du système linéaire d'équations.

Champs inconnu et virtuel interpolés **sans** distinguer DDLs libres et imposés :

Intégrales sur S_u : définition de $\{\underline{\underline{T}}\}$ et $\{\underline{T}'\}$ par dualité :

$$\int_{S_u} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{w} \, dS = \{\underline{\underline{W}}\}^T [\underline{\underline{A}}] \{\underline{\underline{T}}\}$$

$$\int_{S_u} \underline{u} \cdot \underline{T}' \, dS = \{\underline{T}'\}^T [\underline{\underline{A}}]^T \{\underline{U}\}, \quad \int_{S_u} \underline{u}^D \cdot \underline{T}' \, dS = \{\underline{T}'\}^T \{\underline{U}^d\}$$

où $[\underline{\underline{A}}]^T \{\underline{U}\}$ est la restriction de $\{\underline{U}\}$ aux nœuds de S_u et

$$T_K = \int_{S_u} \tilde{N}_m(\underline{x}) T_i(\underline{x}) \, dS_x \quad T'_K = \int_{S_u} \tilde{N}_m(\underline{x}) T'_i(\underline{x}) \, dS_x \quad (K = \text{dof}(m, i))$$

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

► Système linéaire :

trouver $\{U\}, \{T\}$ tels que

$$\begin{aligned} \{W\}^T [K] \{U\} - \{W\}^T [A] \{T\} &= \{W\}^T \{F\} & \forall \{W\} \\ \{T'\}^T [A]^T \{U\} &= \{T'\}^T \{U^d\} & \forall \{T'\} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{bmatrix} K & -A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -U \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ -U^d \end{Bmatrix}$$

La matrice $\begin{bmatrix} K & -A \\ -A^T & 0 \end{bmatrix}$ est inversible mais pas définie positive

► Point de vue de la minimisation de $\mathcal{P}(\underline{v})$ sous contraintes : lagrangien $\mathcal{L}(\underline{v}, \underline{T})$:

$$\mathcal{L}(\underline{v}, \underline{T}) = \mathcal{P}(\underline{v}) + \int_{S_u} (\underline{v} - \underline{u}^D) \cdot \underline{T} \, dS \quad (\underline{v} \in \mathcal{C}, \underline{T} \in \mathcal{C}'(S_u))$$

Réaction \underline{T} : **multiplicateurs de Lagrange.**

Plan

1. Problème d'élasticité approché par éléments isoparamétriques

2. Matrices élémentaires

Définition et calcul des matrices élémentaires

Intégration numérique : points de Gauss

3. Assemblage

4. Système d'équations $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ et sa résolution numérique

Propriétés de $[\mathbb{K}]$

Résolution directe de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par factorisation de $[\mathbb{K}]$

Résolution de $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$ par méthode itérative

Post-traitement de la solution en déplacement

Autre formulation, permettant le calcul des réactions

Convergence

Convergence

- ▶ **Heuristiquement** : si les éléments finis représentent exactement tout déplacement polynômial de degré p , alors sur chaque élément :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}(\underline{x}^0) + \underline{\nabla} \underline{u}(\underline{x}^0) \cdot [\underline{x} - \underline{x}^0] + \nabla \nabla \underline{u}(\underline{x}^0) : [(\underline{x} - \underline{x}^0) \otimes (\underline{x} - \underline{x}^0)] + \dots + O(\|\underline{x} - \underline{x}^0\|^{p+1}) \quad (\underline{x}, \underline{x}^0 \in E_e)$$

Erreurs commises :

$$\begin{aligned} \|\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}_h(\underline{x})\| &= O(h^{p+1}) \\ \|\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}](\underline{x}) - \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h](\underline{x})\| &= O(h^p), \quad \|\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) - \underline{\underline{\sigma}}_h(\underline{x})\| = O(h^p) \end{aligned} \quad (\underline{x} \in E_e)$$

- ▶ **Rigoureusement**, il est prouvé (notamment !) que

Si $\|\underline{u}\|_{\mathbf{E}} < +\infty$, alors $\|\underline{u} - \underline{u}_h\|_{\mathbf{E}} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$ (convergence) ;

Si $\|\underline{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)} < +\infty$ avec $p+1 > D/2$ et si l'interpolation peut représenter sur chaque E_e tout polynôme de degré $\leq p$ on a

$$\|\underline{u} - \underline{u}_h\|_{\mathbf{E}} \leq Ch^p \|\underline{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)}$$

Semi-normes :

$$\|\underline{u}\|_{\mathbf{E}}^2 = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] \, dV \quad \|\underline{u}\|_{H^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \|\nabla^{(k)} \underline{u}\|^2 \, dV$$

Conclusion

- ▶ **Intégration numérique locale** sur chaque élément
Passage $E_e \rightarrow \Delta^{(e)}$; intégrales sur des domaines paramétriques simples ;
Intégration numérique par points de Gauss.
- ▶ **Assemblage** : contributions **locales** incorporées dans la formulation **globale**
- ▶ **Structure de $[\mathbb{K}]$** : symétrie, population (bande/profil), caractère creux
- ▶ **Résolution** : choix entre méthodes **directes** (LDL^T) et **itératives**
- ▶ **Post-traitement** : points de Gauss comme support naturel du calcul de $\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}}$
- ▶ **Convergence par rapport à la taille d'élément**

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html