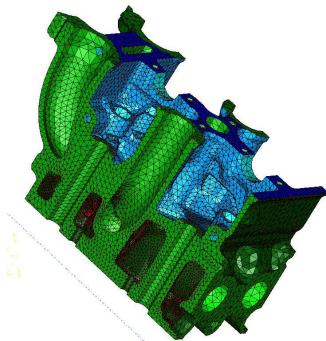


Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis



© PSA Peugeot Citroën

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html

Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

Plan du cours

Concepts fondamentaux et leur application en élasticité linéaire statique

- ▶ Amphi 1 – Résolution approchée de problèmes d'équilibre en élasticité
- ▶ Amphi 2 – La notion d'élément fini isoparamétrique
- ▶ Amphi 3 – La méthode des éléments finis en élasticité linéaires
- ▶ **Amphi 4 – Application à la mécanique linéaire de la rupture**

Régime non-linéaire quasistatique, application aux solides élastoplastiques

- ▶ Amphi 5 – Calcul de solides à comportement non-linéaire
- ▶ Amphi 6 – Calcul de solides élastoplastiques : aspects locaux
- ▶ Amphi 7 – Calcul de solides élastoplastiques : aspects globaux

Régime linéaire, avec évolution temporelle

- ▶ Amphi 8 – Evolution thermique et thermoélasticité linéaire quasistatique
- ▶ Amphi 9 – Analyse dynamique des structures élastiques

Amphi 4 – Application à la mécanique linéaire de la rupture

1. Notions essentielles en mécanique linéaire de la rupture

2. Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes

La méthode des éléments finis pour les structures fissurées

Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 1 – extrapolation

Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 2 – éléments spéciaux

3. Calcul numérique du taux de restitution d'énergie

Plan

1. Notions essentielles en mécanique linéaire de la rupture

2. Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes

La méthode des éléments finis pour les structures fissurées

Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 1 – extrapolation

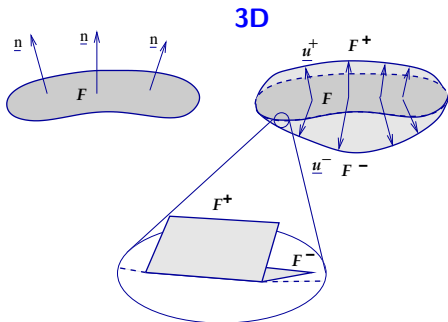
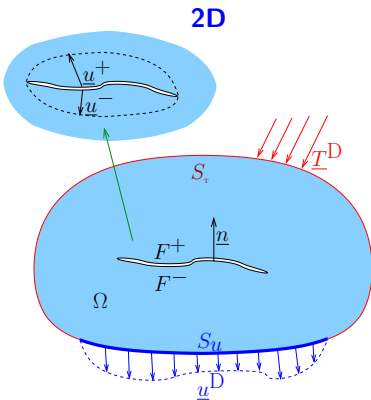
Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 2 – éléments spéciaux

3. Calcul numérique du taux de restitution d'énergie

Fissure, modes d'ouverture

Cadre : **Elasticité linéaire, HPP** (« mécanique linéaire de la rupture », MLR)
Problèmes plans (surtout déformations planes) **Cours MEC 551**

Dans le cadre de la MLR, **une fissure est une entaille d'épaisseur nulle (au repos) dans un solide élastique.**



Equilibre d'un solide fissuré

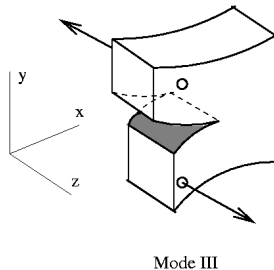
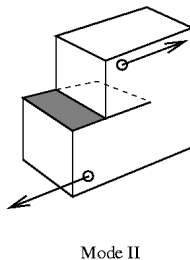
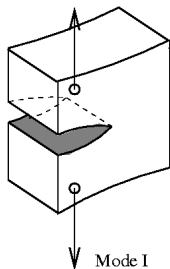
Eqs. de champ : $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{\underline{u}}) / 2$ dans $\Omega(F)$

C.L. externes : $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}^D$ sur S_u , $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{T}}^D$ sur S_T

C.L. sur la fissure : $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}$ sur $F^+ \cup F^-$

Modes d'ouverture d'une fissure :

- ▶ Le mode I (ouverture) ;
- ▶ Le mode II (cisaillement plan) ;
- ▶ Le mode III (cisaillement antiplan).



Notion de taux de restitution d'énergie

Bilan énergétique associé à la propagation (quasistatique) d'une fissure

$$P_e = \dot{W} + D, \quad D \geq 0$$

\dot{W} : variation d'énergie de déformation élastique

D : puissance dissipée par avancement de fissure

Lien entre puissance dissipée et dérivée de l'énergie potentielle à l'équilibre

$$D = - \left\langle \frac{\partial P}{\partial F}(F; \underline{u}^D, \underline{T}^D), \dot{F} \right\rangle$$

« dérivée par rapport au domaine » à $\underline{u}^D, \underline{T}^D$ fixés

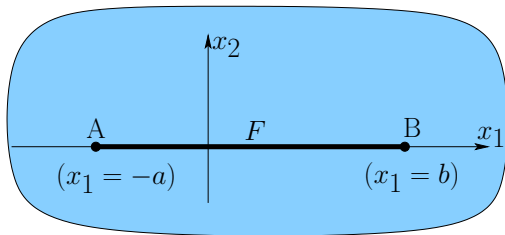
avec

$$P(F; \underline{u}^D, \underline{T}^D) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(F)} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] \, dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{u} \, dS \quad \underline{u} : \text{solution}$$

Dérivée par rapport au domaine pour une extension de fissure : comparaison des valeurs prises par P pour deux configurations de fissure voisines F et $F + \delta F$.

$$\delta P = P(F + \delta F; \underline{u}^D, \underline{T}^D) - P(F; \underline{u}^D, \underline{T}^D) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \frac{\partial P}{\partial F}(F, \underline{u}^D, \underline{T}^D), \delta F \right\rangle$$

Notion de taux de restitution d'énergie : cas d'une fissure droite



$$D = -\frac{\partial P}{\partial a}(a, b, \underline{u}^D, \underline{T}^D)\dot{a} - \frac{\partial P}{\partial b}(a, b, \underline{u}^D, \underline{T}^D)\dot{b}$$

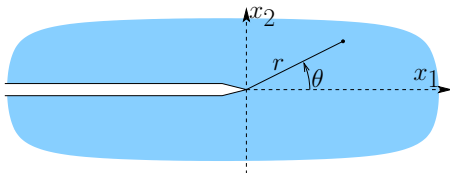
Taux de restitution d'énergie G_A, G_B associés à des extensions des pointes A, B :

$$G_A = -\frac{\partial P}{\partial a}(a, b, \underline{u}^D, \underline{T}^D), \quad G_B = -\frac{\partial P}{\partial b}(a, b, \underline{u}^D, \underline{T}^D)$$

soit

$$D = G_A\dot{a} + G_B\dot{b}$$

Elasticité linéaire : singularité des contraintes en pointe de fissure



$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[K_I \underline{\underline{F}}_I(\theta) + K_{II} \underline{\underline{F}}_{II}(\theta) + K_{III} \underline{\underline{F}}_{III}(\theta) \right] + O(1) \quad (\underline{\underline{F}}_I, \underline{\underline{F}}_{II}, \underline{\underline{F}}_{III} \text{ fonctions connues et universelles})$$

- ▶ **Singularité $O(1/\sqrt{r})$ des déformations et des contraintes**
- ▶ K_I, K_{II}, K_{III} : **facteurs d'intensité des contraintes** associés aux trois modes de rupture
 - dépendent linéairement de $(\underline{\underline{u}}^D, \underline{\underline{T}}^D)$,
 - également fonctions de $\Omega(F)$ et ν .
- ▶ **Forme asymptotique du saut de déplacement :**

$$\llbracket \underline{\underline{u}} \rrbracket = \frac{8(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ (1-\nu)[K_I \underline{\underline{e}}_2 + K_{II} \underline{\underline{e}}_1] + K_{III} \underline{\underline{e}}_3 \right\} + O(r)$$

Taux de restitution d'énergie critique, ténacité

Modélisation de la résistance des matériaux à la fissuration par des **lois à seuil**

► **Taux de restitution d'énergie critique**

$$\begin{cases} \text{si } G_A < G_c & \text{alors } \dot{a} = 0, \\ \text{si } G_A = G_c & \text{alors } \dot{a} \geq 0 \end{cases}$$

► **Ténacité** (Irwin 1957), notion basée sur le fait que le mode I est habituellement le plus dangereux

$$\begin{cases} \text{si } K_I < K_{Ic} & \text{alors } \dot{a} = 0, \\ \text{si } K_I = K_{Ic} & \text{alors } \dot{a} \geq 0 \end{cases}$$

Notion problématique sur le plan théorique (contraintes infinies en pointe de fissure) mais validée expérimentalement.

Lien entre description énergétique (globale) et singularité (locale)

► Formule d'Irwin :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2$$

► Lien entre ténacité K_{Ic} et taux de restitution d'énergie critique G_c (rupture en mode I (ouverture) pur) :

$$G_c = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{Ic}^2$$

Résultats valables seulement dans le cadre de la MLR (élasticité linéaire)

Rupture par fatigue

Fatigue : propagation de fissures sous l'effet de chargements **sous-critiques, répétés** (parfois des millions de fois).

Exemples : vibrations, roulements, cycles démarrage-arrêts des moteurs...

Forme typique d'une loi de fatigue (Paris et Erdogan) :

$$\frac{d\ell}{dn} = C[\Delta K(\ell)]^m$$

- ▶ n : nombre de cycles (joue le rôle du temps) ;
- ▶ $\ell = \ell(n)$: longueur de fissure ;
- ▶ C, m : paramètres matériau (et facteurs externes), à déterminer expérimentalement.
- ▶ $\Delta K(\ell)$: amplitude de facteur d'intensité de contrainte (entre chargements min et max de chaque cycle de chargement)

Objet du calcul numérique en mécanique de la rupture

Permet l'analyse de la nocivité de fissures dans des structures complexes :

- ▶ **Rupture critique** : comparaison avec valeurs caractéristiques du matériau G_c, K_{Ic} .
⇒ Détermination de chargements limites (fissure donnée)
de taille critique de défaut (chargement donné)
- ▶ **Rupture sous-critique par fatigue** : simulation par mise en oeuvre de lois de fatigue
⇒ Estimation de durée de vie (nombre de cycles n avant rupture).

Toutes ces analyses reposent sur la capacité d'évaluer précisément les grandeurs caractéristiques de rupture (G ou K_I, K_{II}, K_{III}).

Plan

1. Notions essentielles en mécanique linéaire de la rupture

2. Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes

La méthode des éléments finis pour les structures fissurées

Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 1 – extrapolation

Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 2 – éléments spéciaux

3. Calcul numérique du taux de restitution d'énergie

Plan

1. Notions essentielles en mécanique linéaire de la rupture

2. Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes

La méthode des éléments finis pour les structures fissurées

Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 1 – extrapolation

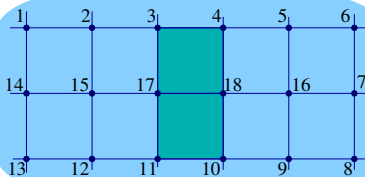
Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 2 – éléments spéciaux

3. Calcul numérique du taux de restitution d'énergie

La méthode des éléments finis pour les structures fissurées

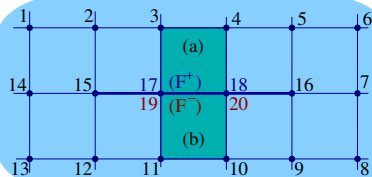
Reprend une grande partie des notions introduites pour les solides non fissurés...
avec quelques différences et nouveautés

- **Modélisation du saut de déplacement à travers la fissure** : fissure traitée comme une cavité d'épaisseur nulle ; notion de **noeud double**



Sans fissure

(a)	17	18	4	3
(b)	11	10	18	17



Avec fissure

(a)	17	18	4	3
(b)	11	10	20	19

La méthode des éléments finis pour les structures fissurées

- ▶ **Dégradation des propriétés de convergence** par rapport à la finesse de maillage :
 - **Sans fissure** : $\|\underline{u} - \underline{u}_h\|_E = O(h^p)$ (\underline{u} supposé de régularité $H^{p+1}(\Omega)$)
En pratique, $p = 1$ habituellement.
 - **Avec fissure** : $\|\underline{u} - \underline{u}_h\|_E = O(h^{1/2-\eta})$ ($\eta > 0$)
- ▶ Nécessité de mettre en oeuvre des **approches spécifiques**, telles que :
 - (a) **Maillage très raffiné** au voisinage des pointes de fissures (meilleure représentation des champs singuliers à l'aide des fonctions de base usuelles de la MEF) ;
 - (b) Création d'**éléments finis spéciaux**, permettant la représentation de champs $\underline{\underline{\varepsilon}} = O(1/\sqrt{r})$ en pointe de fissure.

Plan

1. Notions essentielles en mécanique linéaire de la rupture

2. Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes

La méthode des éléments finis pour les structures fissurées

Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 1 – extrapolation

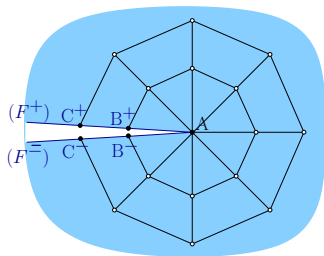
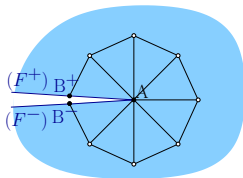
Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 2 – éléments spéciaux

3. Calcul numérique du taux de restitution d'énergie

Evaluation des facteurs d'intensité 1 – extrapolation

- ▶ C'est la méthode la plus simple (mais la moins précise !)
- ▶ Principe : comparaison entre valeurs nodales aux noeuds adjacents à la pointe et expression asymptotique du saut de déplacement :

$$\llbracket u \rrbracket = \frac{8(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ (1-\nu)[K_{\perp} \underline{e}_2 + K_{\parallel} \underline{e}_1] + K_{III} \underline{e}_3 \right\} + O(r)$$



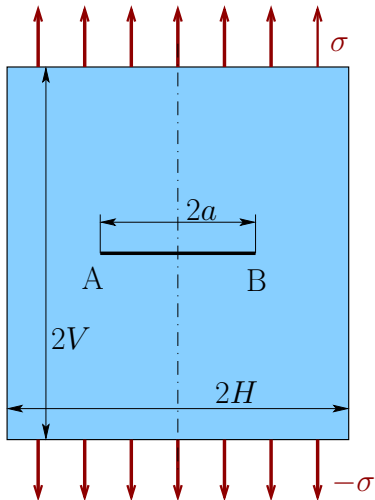
$$K_{\perp} \approx \frac{C}{\sqrt{d}} \llbracket u(\underline{B}) \rrbracket \cdot \underline{n},$$

$$K_{\parallel} \approx \frac{C}{\sqrt{d}} \llbracket u(\underline{B}) \rrbracket \cdot \underline{t}$$

$$\text{avec } C = \frac{E\sqrt{2\pi}}{8(1-\nu^2)}$$

Exemple : plaque rectangulaire avec fissure droite (i)

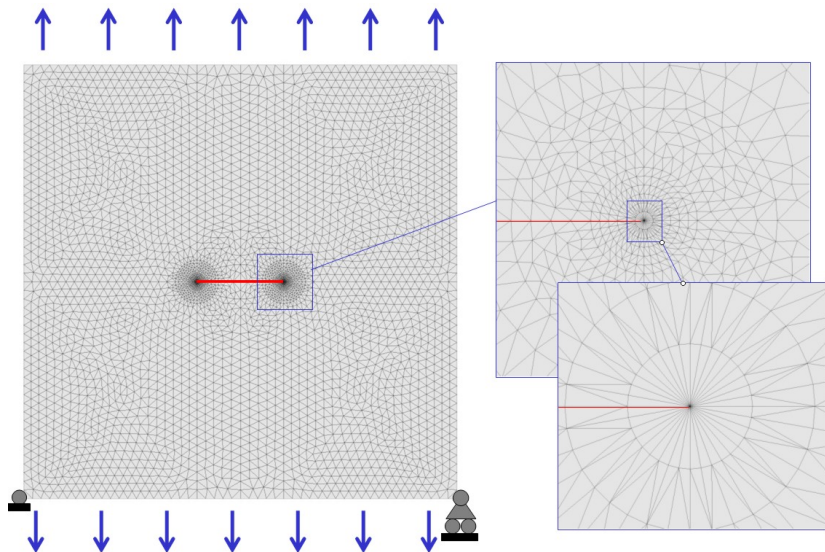
(réalisé avec les codes Matlab associés à ce cours)



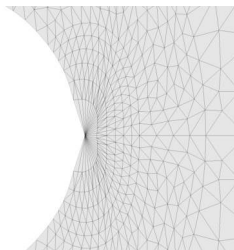
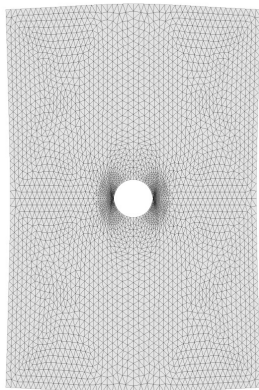
Solution exacte pour une plaque de hauteur infinie $V = \infty$ et de largeur H :

$$K_I^H = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2H}}$$

Exemple : plaque rectangulaire avec fissure droite (i)



Exemple : plaque rectangulaire avec fissure droite (i)



Zoom sur voisinage de pointe de fissure

Solution exacte : déformée à tangente verticale

$$[[u]] \approx C \sqrt{a^2 - x_1^2}$$

Déformée (exagérée!)

► **Résultats numériques obtenus par extrapolation, éléments T3**

exact	numérique		
$K_I (V = \infty)$	$K_I (V = 5a)$	$K_I (V = 9a)$	$K_I (V = 13a)$
1.8175	1.6527	1.6058	1.6016

($H = 5a$)

Plan

1. Notions essentielles en mécanique linéaire de la rupture

2. Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes

La méthode des éléments finis pour les structures fissurées

Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 1 – extrapolation

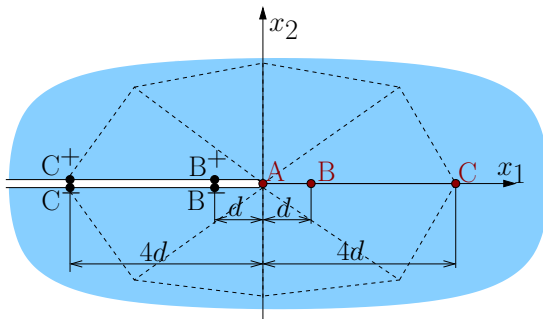
Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 2 – éléments spéciaux

3. Calcul numérique du taux de restitution d'énergie

Evaluation des facteurs d'intensité 2 – éléments spéciaux

- **Idee générale** : définir **fonctions d'interpolation** et/ou **géométrie** de l'élément de sorte que $\underline{\underline{\varepsilon}}[v_h]$ présente le comportement singulier prévu par la théorie.

(a) Interpolation unidimensionnelle avec « noeud au quart »



$$x_1 = N_1(a)x_A + N_2(a)x_B + N_3(a)x_C \quad (a \in \Delta = [-1, 1])$$

$$N_1(a) = a(a-1)/2, \quad N_2(a) = 1 - a^2, \quad N_3(a) = a(a+1)/2$$

Interpolation unidimensionnelle avec « noeud au quart »

- Interpolation géométrique (voir amphi 2) :

$$x_1 = N_1(a)x_A + N_2(a)x_B + N_3(a)x_C \quad (a \in \Delta = [-1, 1])$$

$$N_1(a) = a(a-1)/2, \quad N_2(a) = 1 - a^2, \quad N_3(a) = a(a+1)/2$$



On prend $x_A = 0, x_B = d, x_C = 4d$. Cela donne

$$x_1 = d(a+1)^2, \quad a = \sqrt{x_1/d} - 1 \quad (0 \leq x_1 \leq 4d)$$

- Interpolation du déplacement :

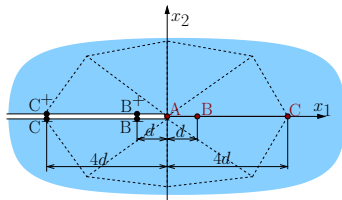
$$\begin{aligned} \underline{u}_h &= N_A(a)\underline{u}_A + N_B(a)\underline{u}_B + N_C(a)\underline{u}_C \\ &= \frac{1}{2}(\underline{u}_A - 2\underline{u}_B + \underline{u}_C)a^2 + \frac{1}{2}(\underline{u}_C - \underline{u}_A)a + \underline{u}_B \end{aligned}$$

soit, en exprimant a en fonction de x_1 :

$$\underline{u}_h(x_1) = \underline{u}_A + \left[2(\underline{u}_B - \underline{u}_A) - \frac{1}{2}(\underline{u}_C - \underline{u}_A) \right] \sqrt{\frac{x_1}{d}} + \left[\frac{1}{2}(\underline{u}_C - \underline{u}_A) - (\underline{u}_B - \underline{u}_A) \right] \frac{x_1}{d}$$

$$\underline{u}_h(x_1) = \underline{u}_A + \left[2(\underline{u}_B - \underline{u}_A) - \frac{1}{2}(\underline{u}_C - \underline{u}_A) \right] \sqrt{\frac{x_1}{d}} + \left[\frac{1}{2}(\underline{u}_C - \underline{u}_A) - (\underline{u}_B - \underline{u}_A) \right] \frac{x_1}{d}$$

L'élément 1D avec noeud au quart définit un déplacement interpolé de gradient singulier comme $1/\sqrt{x_1}$ au voisinage de la pointe de fissure



- ▶ Interpolation de $[[u]]$: élément (AB'C') avec noeud au quart B'

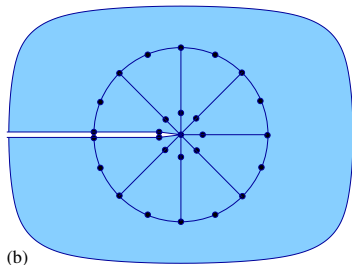
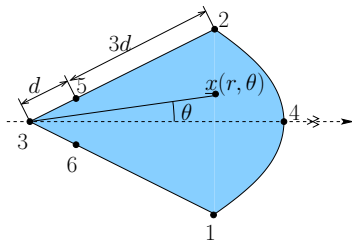
$$[[u_h]](x_1) = \left[2[[u_{B'}]] - \frac{1}{2}[[u_{C'}]] \right] \sqrt{\frac{x_1}{d}} + \left[\frac{1}{2}[[u_{C'}]] - [[u_{B'}]] \right] \frac{x_1}{d}$$

- ▶ Evaluation des K par comparaison avec forme asymptotique de $[[u]]$:

$$K_I \approx \frac{C}{\sqrt{d}} \left[2[[u_{B'}]] - \frac{1}{2}[[u_{C'}]] \right] \cdot \underline{n}, \quad K_{II} \approx \frac{C}{\sqrt{d}} \left[2[[u_{B'}]] - \frac{1}{2}[[u_{C'}]] \right] \cdot \underline{t} \quad C = \frac{E\sqrt{2\pi}}{8(1-\nu^2)}$$

Interpolation multidimensionnelle avec noeud au quart

- ▶ **Principe** : adaptation de la notion 1D de noeud au quart à des éléments plans ou volumiques.
- ▶ **Exemple** : élément triangulaire spécial



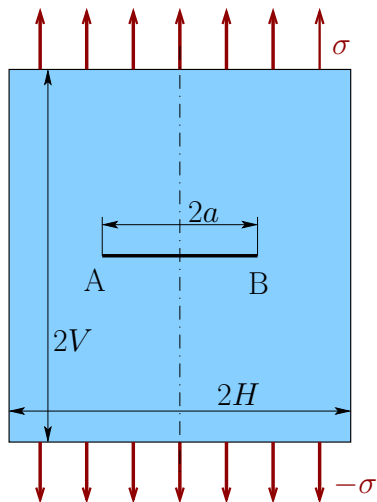
On montre que
l'élément

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \underline{v}_0(\theta) + \underline{v}_1(\theta)\sqrt{r} + \underline{v}_2(\theta)r$$

uniformément sur

- ▶ Il existe beaucoup de variations 2D et 3D (non développées ici) sur cette idée
- ▶ En 3D, contraintes sur le maillage (faces latérales d'éléments \perp au front de fissure)

Exemple : plaque rectangulaire avec fissure droite (ii)

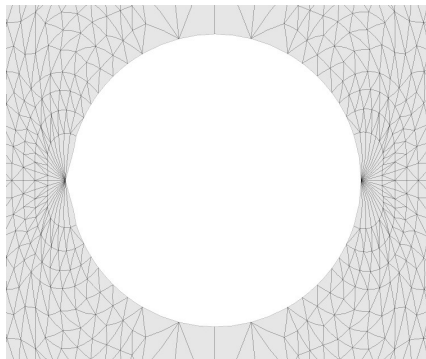


Solution exacte pour une plaque de hauteur infinie $V = \infty$ et de largeur H :

$$K_I^H = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2H}}$$

Exemple : plaque rectangulaire avec fissure droite (ii)

Triangle à 6 noeuds (T6) ; comparaison sans/avec noeud au quart



sans | avec
élément spécial

Plan

1. Notions essentielles en mécanique linéaire de la rupture

2. Calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes

La méthode des éléments finis pour les structures fissurées

Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 1 – extrapolation

Evaluation des facteurs d'intensité des contraintes 2 – éléments spéciaux

3. Calcul numérique du taux de restitution d'énergie

Calcul numérique du taux de restitution d'énergie G

- ▶ **Utilité** : critère énergétique de propagation de fissure

$$G = G_c \quad (\text{ou une forme généralisée } g(G, G_c) = 0)$$

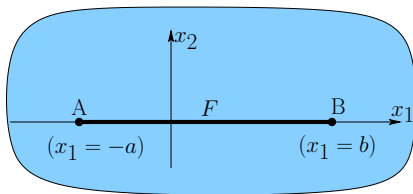
- ▶ **En élasticité** : possibilité application formule d'Irwin à partir des K_I, K_{II}, K_{III} :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2$$

- ▶ **Inconvénients de passer par les K_I, K_{II}, K_{III}** : calcul de nature **locale** (valeurs des champs au voisinage de la pointe de fissure)
 - Éléments finis ordinaires : valeurs peu précises ;
 - Éléments finis spéciaux : résultats meilleurs mais mise en oeuvre et préparation des maillages plus délicate
- ▶ **Nature globale** (énergétique) de G : calcul numérique **évitant** la singularité en pointe de fissure
- ▶ **Plus grande généralité** de G (élasticité mais aussi plasticité,...)

Intérêt de procédures de calcul de taux de restitution d'énergie qui soient de nature **globale** (post-traitement de la solution sur l'ensemble du solide)

Taux de restitution d'énergie pour une fissure droite, cadre MLR



- Taux de restitution d'énergie associé aux pointes de fissure (rappel)

$$G_A = -\frac{\partial P}{\partial a}(a, b, \underline{u}^D, \underline{T}^D), \quad G_B = -\frac{\partial P}{\partial b}(a, b, \underline{u}^D, \underline{T}^D)$$

$$P(a, b; \underline{u}^D, \underline{T}^D) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(F)} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] \, dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{u} \, dS$$

- Solution \underline{u} du problème d'équilibre : définie par

$$\text{trouver } \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \text{ t.q. } \int_{\Omega(F)} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

La méthode exposée dans la suite est **généralisable** (3D, comportement non-linéaire)

► **Difficulté d'évaluer** $\partial P/\partial a$ et $\partial P/\partial b$:

$$P(a, b; \underline{u}^D, \underline{T}^D) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(F)} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{u} dS$$

- (a) Dépendance **explicite** : $\Omega(F)$ dépend de $F = [a, b]$;
 (b) Dépendance **implicite** : la solution \underline{u} dépend de $F = [a, b]$.

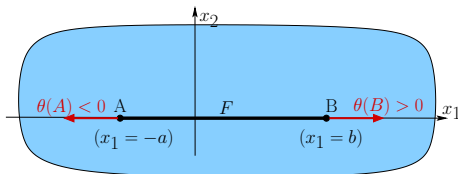
► **Idée essentielle : raisonner en termes de transformations du domaine fissuré :**

$$\underline{y} = \Phi(\underline{x}, \tau) = \underline{x} + \tau \underline{\theta}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega(F)$$

τ : temps fictif ($\Omega(F)$ correspond par convention à $\tau = 0$)

$\underline{\theta}(\underline{x})$: vitesse de transformation

Description lagrangienne d'une transformation **fictive** de $\Omega(F)$ telle qu'un point initialement en \underline{x} ait à tout instant $\tau > 0$ une vitesse $\underline{\theta}(\underline{x})$.



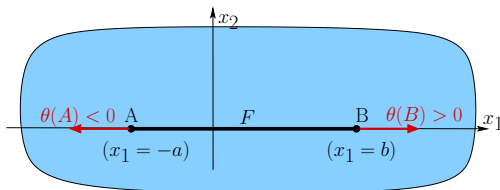
- **Idée essentielle : raisonner en termes de transformations du domaine fissuré :**

$$\underline{y} = \Phi(\underline{x}, \tau) = \underline{x} + \tau \underline{\theta}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega(F)$$

τ : temps fictif ($\Omega(F)$ correspond par convention à $\tau = 0$)

$\underline{\theta}(\underline{x})$: vitesse de transformation

- **La transformation doit décrire une extension de fissure :**



$$\underline{\theta}(\underline{x}) = \underline{0} \quad (\underline{x} \in S_u \cup S_T) \quad (a)$$

(Frontière extérieure fixe)

$$\underline{\theta}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_2 = 0 \quad (\underline{x} \in F) \quad (b)$$

(Partie existante de fissure)

$$\dot{a} = -\underline{\theta}(A) \cdot \underline{e}_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \dot{b} = \underline{\theta}(B) \cdot \underline{e}_1 \geq 0 \quad (c)$$

(Extension de fissure)

- **Evolution virtuelle de fissure :**

$$a(\tau) = a - \theta_1(A)\tau, \quad b(\tau) = b + \theta_1(B)\tau$$

La « méthode $G - \theta$ » : dérivation lagrangienne de P

► Principe :

$$\dot{P} = \frac{d}{d\tau} P(a(\tau), b(\tau); \underline{u}^D, \underline{T}^D) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial P}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial P}{\partial b} \dot{b} = G_A \theta_1(\underline{A}) - G_B \theta_1(\underline{B})$$

Méthode : identifier G_A, G_B à partir de $\frac{dP}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = G_A \theta_1(\underline{A}) - G_B \theta_1(\underline{B})$

► Outils : (cf. Cinématique des milieux continus, cours MEC431)

- Dérivée lagrangienne initiale \dot{g} d'un champ $g(\underline{y}, \tau)$:

$$\dot{g}(\underline{x}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [g(\underline{x} + \tau \underline{\theta}(\underline{x}), \tau) - g(\underline{x}, 0)] = \frac{\partial g}{\partial \tau}(\underline{x}, 0) + \underline{\nabla} g(\underline{x}, 0) \cdot \underline{\theta}(\underline{x})$$

- Dérivée lagrangienne initiale d'un champ de gradient :

$$\overbrace{(\underline{\nabla} u)}(\underline{x}) = \underline{\nabla} \dot{u}(\underline{x}) - \underline{\nabla} u(\underline{x}, 0) \cdot \underline{\nabla} \theta(\underline{x})$$

- Dérivée lagrangienne d'une intégrale de domaine :

$$I(\tau) = \int_{\Omega(\tau)} g(\underline{y}, \tau) dV_y \quad \frac{dI}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \int_{\Omega} \{ \dot{g}(\underline{x}) + g(\underline{x}) \operatorname{div} \theta(\underline{x}) \} dV_x$$

Dérivée de l'énergie potentielle à l'équilibre dans la transformation

- ▶ Dérivée de l'énergie de déformation d'un champ de déplacement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{1}{2} \int_{\Omega(\tau)} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] dV \Big|_{\tau=0} \\ = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\dot{\underline{v}}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] dV + \mathcal{D}(\underline{v}; \underline{\theta}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{0}) \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{D}(\underline{v}; \underline{\theta}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}\underline{v} : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\nabla}}\underline{v}) \operatorname{div} \underline{\theta} - \underline{\underline{\nabla}}\underline{v} : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : (\underline{\underline{\nabla}}\underline{v}, \underline{\underline{\nabla}}\underline{\theta}) \right\} dV$$

- ▶ Dérivée de l'énergie potentielle à l'équilibre

$$P(a(\tau), b(\tau); \underline{u}^D, \underline{T}^D) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{u} dS \quad (\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D))$$

$$\frac{d}{d\tau} P(a(\tau), b(\tau); \underline{u}^D, \underline{T}^D) \Big|_{\tau=0} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\dot{\underline{u}}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \dot{\underline{u}} dS + \mathcal{D}(\underline{u}; \underline{\theta})$$

Dérivée de l'énergie potentielle à l'équilibre dans la transformation

$$\left. \frac{d}{d\tau} P(a(\tau), b(\tau); \underline{u}^D, \underline{T}^D) \right|_{\tau=0} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\dot{u}}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] \, dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{\dot{u}} \, dS + \mathcal{D}(\underline{u}; \underline{\theta})$$

- **Elimination** de $\underline{\dot{u}}$ (dérivée lagrangienne de la solution), en exploitant

$$\forall \tau, \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \implies \underline{\dot{u}} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

et donc (forme faible de l'équilibre avec champ virtuel $\underline{\dot{u}}$, symétrie de $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$) :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\dot{u}}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] \, dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{\dot{u}} \, dS = 0$$

- **Dérivation de l'énergie potentielle à l'équilibre : résultat**

$$\left. \frac{d}{d\tau} P(a(\tau), b(\tau); \underline{u}^D, \underline{T}^D) \right|_{\tau=0} = \mathcal{D}(\underline{u}; \underline{\theta})$$

Calcul effectif de G en A et B

$$\left. \frac{d}{d\tau} P(a(\tau), b(\tau); \underline{u}^D, \underline{T}^D) \right|_{\tau=0} = \mathcal{D}(\underline{u}; \underline{\theta})$$

- Cette expression ne dépend du champ $\underline{\theta}$ qu'à travers les **vitesse d'extension** $\theta_1(\underline{A}), \theta_1(\underline{B})$ (admis) :

$$\forall \underline{\theta}'(\underline{x}), \underline{\theta}''(\underline{x}) \text{ tels que } \begin{cases} \theta'_1(\underline{A}) = \theta''_1(\underline{A}) \\ \theta'_1(\underline{B}) = \theta''_1(\underline{B}) \\ \theta'_2(\underline{x}) = \theta''_2(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in F) \end{cases}, \text{ on a } \left. \frac{dP}{d\tau} \right|_{\underline{\theta}'} = \left. \frac{dP}{d\tau} \right|_{\underline{\theta}''}$$

- **Calcul de G_A et G_B** : il repose sur deux champs indépendants $\underline{\theta}_A$ et $\underline{\theta}_B$ tels que

$$\begin{aligned} \underline{\theta}_{A,B}(\underline{x}) &= \underline{0} \quad (\underline{x} \in S_u \cup S_T) & \text{(a)} \\ \underline{\theta}_{A,B}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_2 &= 0 \quad (\underline{x} \in F) & \text{(b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\theta}_A(\underline{A}) &= -\underline{e}_1 & \underline{\theta}_A(\underline{B}) &= \underline{0} \\ \underline{\theta}_B(\underline{A}) &= \underline{0} & \underline{\theta}_B(\underline{B}) &= \underline{e}_1 \end{aligned}$$

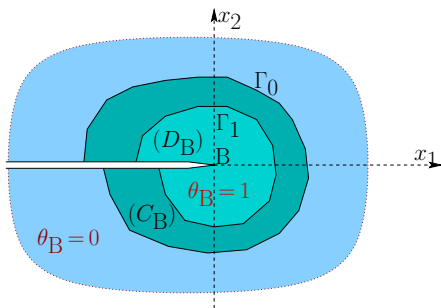
Les valeurs de G_A et G_B sont alors

$$G_A = -\mathcal{D}(\underline{u}, \underline{\theta}_A), \quad G_B = -\mathcal{D}(\underline{u}; \underline{\theta}_B)$$

► Un procédé de construction de champs $\underline{\theta}_A, \underline{\theta}_B$:

$$\underline{\theta}_B(\underline{x}) = \theta_B(\underline{x})\underline{e}_1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta_B(\underline{x}) = 1 & (\underline{x} \in D_B) \\ \theta_B(\underline{x}) = 0 & (\underline{x} \in \Omega \setminus (C_B \cup D_B)) \\ \theta_B(\underline{x}) \text{ continue sur } \Omega \end{cases}$$

et de même pour $\underline{\theta}_A$.



Par exemple :

- C_B couronne circulaire comprise entre rayons r_0, r_1 :

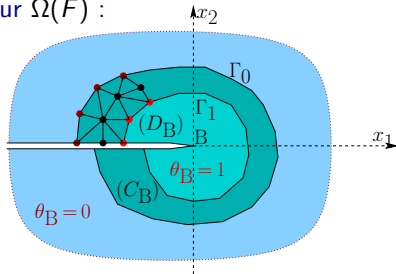
$$\theta_B(\underline{x}) = \frac{r - r_1}{r_0 - r_1}$$

- C_B couronne quelconque : θ_B construit par interpolation de valeurs nodales sur les éléments finis situés dans C_B .

- **Expression obtenue de G_B** (et expression similaire pour G_A) : donne une valeur **indépendante du choix de C_B et de la définition de $\underline{\theta}_B$ sur C_B**

$$G_B = -\mathcal{D}(\underline{u}; \underline{\theta}_B) = \int_{C_B} \left\{ (\underline{\nabla} \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{\theta}_B) : \mathcal{A} : \underline{\nabla} \underline{u} - \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} : \mathcal{A} : \underline{\nabla} \underline{u}) \operatorname{div} \underline{\theta}_B \right\} dV$$

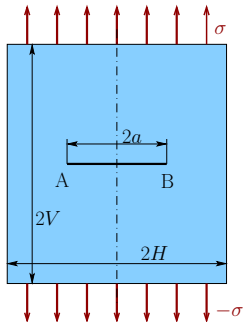
- **Mise en oeuvre numérique de la méthode $G - \theta$** : post-traitement de la solution élastique pour $\Omega(F)$:



$$G_B \approx \sum_{E_e \in C_B} \int_{E_e} \left\{ (\underline{\nabla} \underline{u}_h \cdot \underline{\nabla} \underline{\theta}_B) : \mathcal{A} : \underline{\nabla} \underline{u}_h - \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u}_h : \mathcal{A} : \underline{\nabla} \underline{u}_h) \operatorname{div} \underline{\theta}_B \right\} dV$$

Calcul de chaque intégrale élémentaire : points de Gauss utilisés pour calculer $[\mathbb{K}_e]$.

Exemple : plaque rectangulaire avec fissure droite (iii)



Solution exacte pour plaque de hauteur infinie $V = \infty$ et de largeur H :

$$K_I^H = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2H}}$$

Relation entre K_I et G (rappel) :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2$$

► Résultats numériques obtenus par méthode $G - \theta$, éléments T3

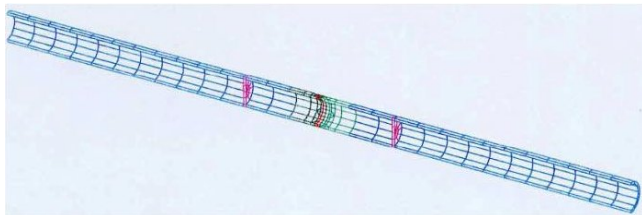
exact	numérique		
$K_I (V = \infty)$	$K_I (V = 5a)$	$K_I (V = 9a)$	$K_I (V = 13a)$
1.8175	1.8561	1.8037	1.7991

($H = 5a$)

Amélioration considérable de la précision des résultats sur K_I !

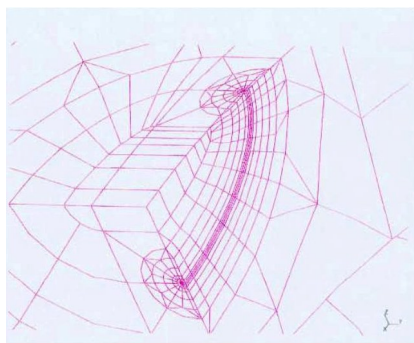
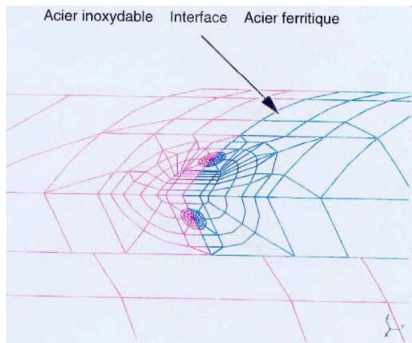
Exemple 3D : fissure dans une liaison bimétallique de canalisation

- ▶ Fissures dans (ou au voisinage de) jonctions soudées de gros composants de circuits primaires de centrales nucléaires.

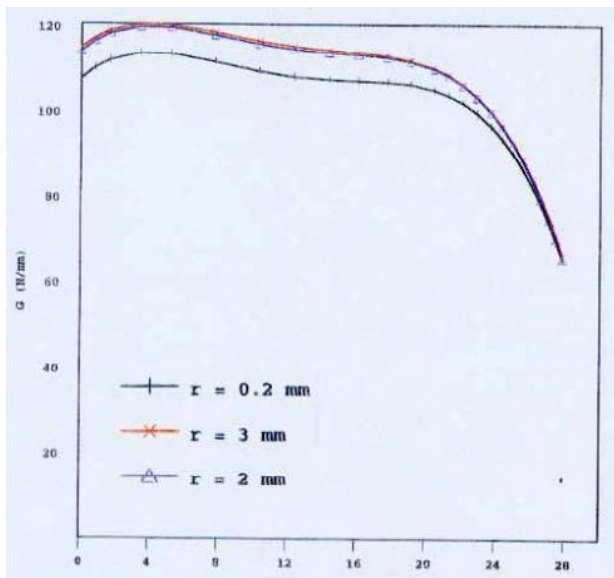


- ▶ Etude réalisée à EDF R et D, **Code_Aster**
- ▶ **La méthode $G - \theta$ s'étend aux problèmes 3D**

Exemple : fissure dans une liaison bimétallique de canalisation



Exemple : fissure dans une liaison bimétallique de canalisation



Conclusion

► Mécanique de la rupture linéaire

- Taux de restitution d'énergie, critère énergétique de propagation ;
- Singularité des déformations et contraintes en pointe de fissure (MLR) ;
- Dégradation des propriétés de convergence $h \rightarrow 0$ de la MEF causée par la fissure.

► Méthodes numériques utilisant les grandeurs locales en pointe de fissure

- Calcul de K_I, K_{II}, K_{III} par extrapolation : simple, peu précis.
- Calcul de K_I, K_{II}, K_{III} par élément spécial : précis, surcroît de programmation, contraintes de maillage.

► Méthode numérique $G - \theta$ utilisant la solution globale

- Conceptuellement et informatiquement plus délicat ;
- Très précis avec des éléments finis « ordinaires » (non spéciaux) ;
- Concept de taux de restitution d'énergie applicable dans un cadre plus large que la MLR.
- Implantée dans les codes éléments finis :
Code_Aster EDF, Cast3M (opérateur GTHETA), entre autres.

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html