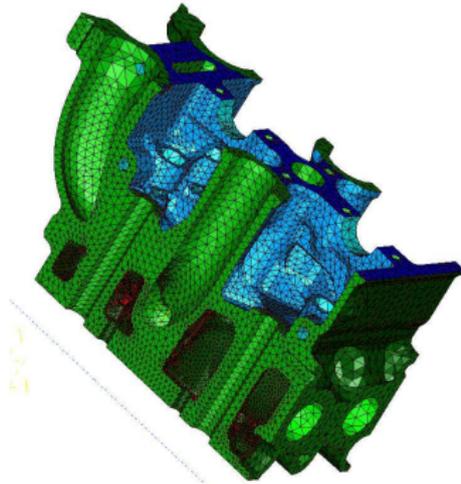


# Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis



© PSA Peugeot Citroën

[www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html](http://www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html)

Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

## Plan du cours

### Concepts fondamentaux et leur application en élasticité linéaire statique

- ▶ Amphi 1 – Résolution approchée de problèmes d'équilibre en élasticité
- ▶ Amphi 2 – La notion d'élément fini isoparamétrique
- ▶ Amphi 3 – La méthode des éléments finis en élasticité linéaire
- ▶ Amphi 4 – Application à la mécanique linéaire de la rupture

### Régime non-linéaire quasistatique, application aux solides élastoplastiques

- ▶ **Amphi 5 – Calcul de solides à comportement non-linéaire**
- ▶ Amphi 6 – Calcul de solides élastoplastiques : aspects locaux
- ▶ Amphi 7 – Calcul de solides élastoplastiques : aspects globaux

### Régime linéaire, avec évolution temporelle

- ▶ Amphi 8 – Evolution thermique et thermoélasticité linéaire quasistatique
- ▶ Amphi 9 – Analyse dynamique des structures élastiques

## Amphi 5 – Calcul de solides à comportement non-linéaire

### 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

Contact unilatéral

Propagation de fissure

Endommagement

Matériaux à comportements non-linéaires

Transformations finies (non-linéarités géométriques)

Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

### 2. Méthodes de résolution numérique

Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire

Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)

# Plan

## 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

Contact unilatéral

Propagation de fissure

Endommagement

Matériaux à comportements non-linéaires

Transformations finies (non-linéarités géométriques)

Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

## 2. Méthodes de résolution numérique

Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire

Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)

## Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

- ▶ **Parfois susceptibles d'apparaître en association avec solides élastiques linéaires HPP** (non-linéarités d'origine superficielle) :
  - Contact unilatéral (avec ou sans frottement)
  - Propagation de fissures ;
  - Usure...
- ▶ **Modèles de comportement non-linéaires de matériaux :**
  - Endommagement ;
  - Plasticité...
- ▶ **Comportements géométriquement non-linéaires de structures** (transformations finies, flambage...)

# Plan

## 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

- Contact unilatéral

- Propagation de fissure

- Endommagement

- Matériaux à comportements non-linéaires

- Transformations finies (non-linéarités géométriques)

- Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

## 2. Méthodes de résolution numérique

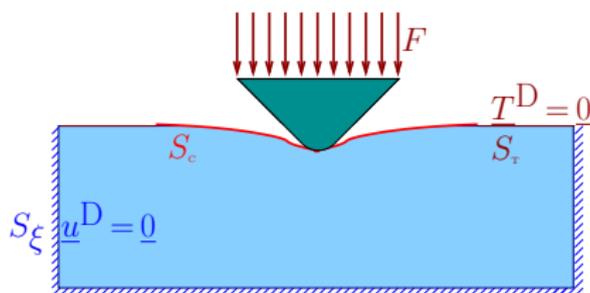
- Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

- Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

- Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire

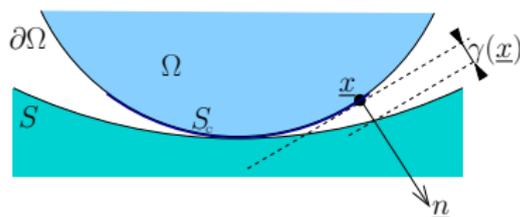
- Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)

## Contact unilatéral



### ► Contact unilatéral sans frottement : conditions aux limites

$$\begin{aligned}
 \underline{T} - T_n \underline{n} &= \underline{0} \\
 T_n &\leq 0 \\
 u_n - \gamma &\leq 0 \\
 (u_n - \gamma) T_n &= 0
 \end{aligned}
 \quad (\text{sur } S_C)$$

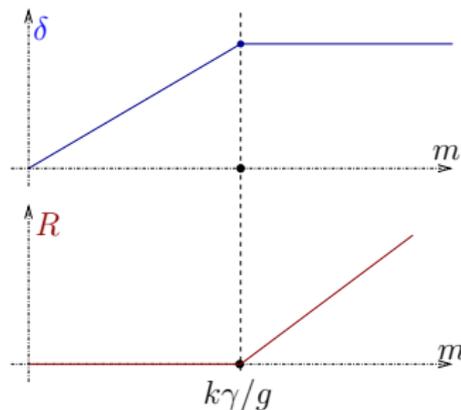
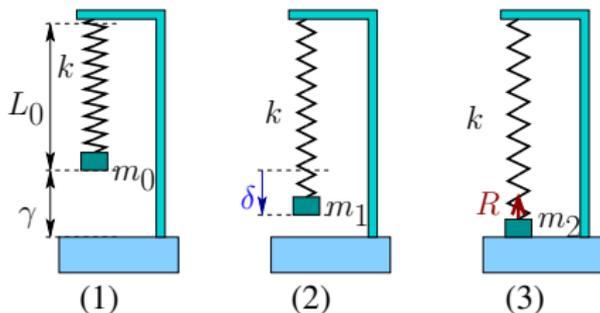


La réponse d'un système de solides (l'un au moins étant déformable) en contact unilatéral est une fonction **non linéaire** de la sollicitation, **même si chaque solide est élastique linéaire**.

## Contact unilatéral

La réponse d'un système de solides (l'un au moins étant déformable) en contact unilatéral est une fonction **non linéaire** de la sollicitation, **même si chaque solide est élastique linéaire**.

- Exemple : système masse-ressort suspendu au-dessus d'un support plan



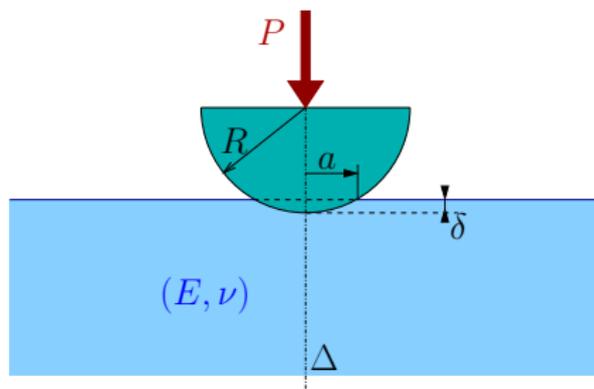
(1)  $m = 0$       (2)  $m < k\gamma/g$       (3)  $m > k\gamma/g$

Il y a contact pour  $m \geq k\gamma/g$ , avec développement d'une réaction

$$R = mg - k\gamma$$

## Contact unilatéral

- ▶ Exemple : poinçonnement d'un massif infini plan (solution de Hertz, 1882)



Rayon de zone de contact  $a$  et profondeur d'indentation  $\delta$  :  
fonctions **non linéaires** de la force de poinçonnement  $P$  :

$$a = \left( \frac{3R(1 - \nu^2)}{4E} \right)^{1/3} P^{1/3} \quad \delta = \left( \frac{3(1 - \nu^2)}{4E\sqrt{R}} \right)^{2/3} P^{2/3}$$

## Contact unilatéral

- **Frottement : exemple de la loi de Coulomb.** En tout point  $\underline{x} \in \mathcal{S}_C^{\text{eff}}$  :

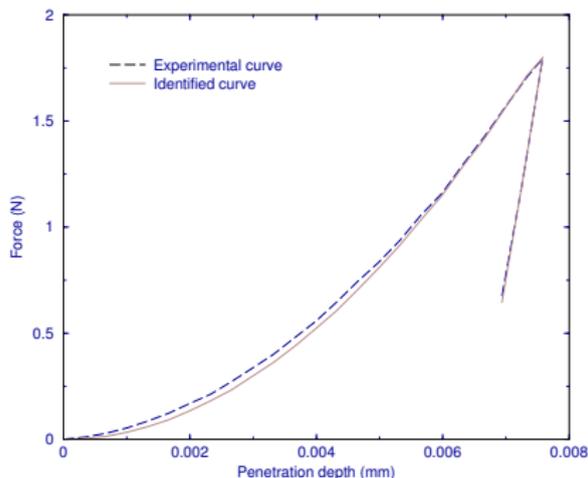
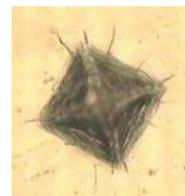
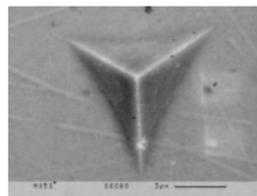
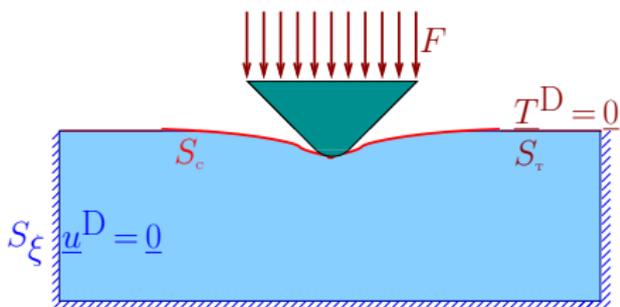
Si  $T_t < fT_n$ , il y a adhérence en  $\underline{x}$

Si  $T_t = fT_n$ , il y a glissement en  $\underline{x}$

$$T_t = \|\underline{T} - T_n \underline{n}\|$$

$f$  : coefficient de frottement

## Exemple : caractérisation de matériaux par indentation



Courbe d'indentation mesurée (pointillé)  
 Courbe d'indentation calculée (plein)  
 pour les paramètres matériau **identifiés**.

[Constantinescu, A. et Tardieu, N., 2001]

# Plan

## 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

Contact unilatéral

Propagation de fissure

Endommagement

Matériaux à comportements non-linéaires

Transformations finies (non-linéarités géométriques)

Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

## 2. Méthodes de résolution numérique

Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire

Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)

## Propagation de fissure

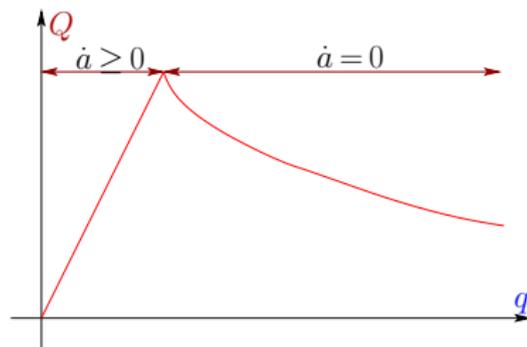
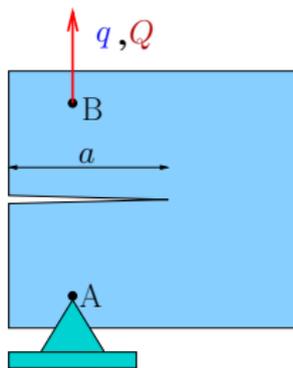
- ▶ Amphi 4 : outils numériques pour la mécanique linéaire de la rupture, HPP, élasticité linéaire, **fissure fixe** : **régime linéaire**
- ▶ Si le chargement est évolutif

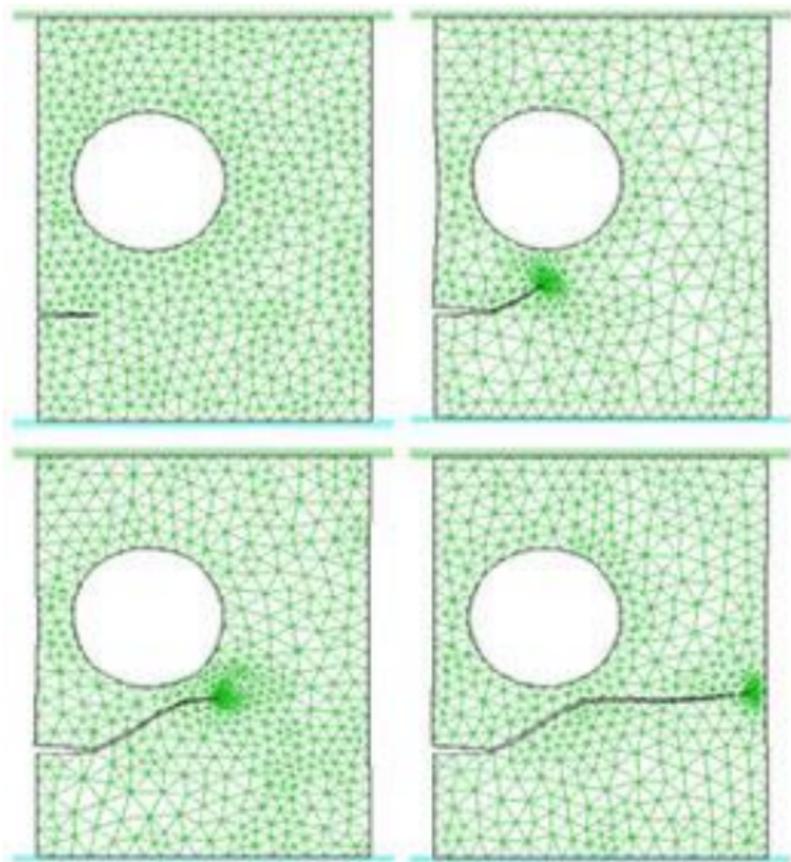
$$\underline{u} = \underline{u}^D(\underline{x}, t) \quad (\underline{x} \in S_\xi, t \in [0, T])$$

$$\underline{T} = \underline{T}^D(\underline{x}, t) \quad (\underline{x} \in S_T, t \in [0, T])$$

la fissure  $F$  peut se **propager** : **régime non-linéaire**

- $F = F(t) \implies \Omega(F(t))$
- Tout le reste étant fixé, la réponse élastique de  $\Omega(F)$  dépend de  $F$
- $F(t)$  pas connu *a priori* (longueur, direction) : **approche incrémentale**





Calcul mécanique incrémental permettant de suivre l'évolution d'une fissure à l'aide d'un remaillleur automatique avec raffinement du fond de fissure [Centre de mise en forme des matériaux (CEMEF), Ecole des Mines de Paris]

# Plan

## 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

Contact unilatéral

Propagation de fissure

**Endommagement**

Matériaux à comportements non-linéaires

Transformations finies (non-linéarités géométriques)

Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

## 2. Méthodes de résolution numérique

Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire

Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)

## Endommagement

Représentation à l'échelle macroscopique de l'effet de la présence dans un matériau de **microdéfauts** (fissures...) **évolutifs**.

Exemple : modèles d'endommagement fragile :

- ▶ **Les microdéfauts modifient les propriétés macroscopiques d'élasticité :**

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\alpha)$$

$\alpha$  : variable (scalaire ou tensorielle) d'endommagement

Exemple :  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0(1 - \alpha)$ .

- ▶ **L'endommagement est irréversible et évolue selon une loi à seuil :**

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{A}(\alpha) : \underline{\underline{\varepsilon}} < w_{\text{critique}} & \dot{\alpha} = 0 \\ \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{A}(\alpha) : \underline{\underline{\varepsilon}} = w_{\text{critique}} & \dot{\alpha} \geq 0 \end{cases}$$

- ▶ **Pour un solide : notion de champ d'endommagement  $\alpha(\underline{x})$ .**

# Plan

## 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

Contact unilatéral

Propagation de fissure

Endommagement

**Matériaux à comportements non-linéaires**

Transformations finies (non-linéarités géométriques)

Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

## 2. Méthodes de résolution numérique

Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

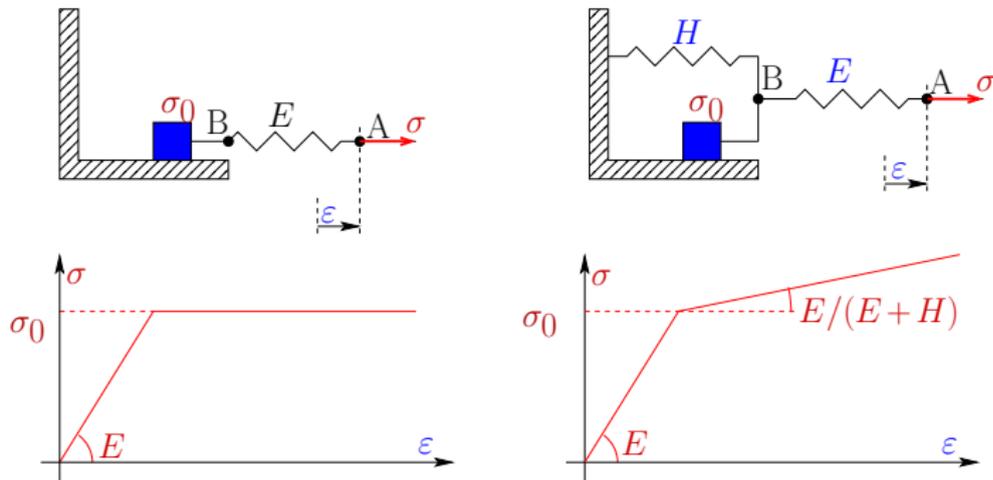
Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire

Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)

# Comportements non-linéaires de matériaux (non-linéarités physiques)

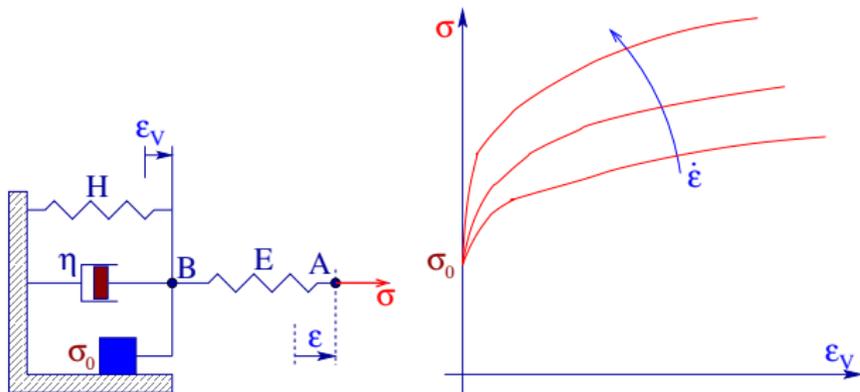
## ► Comportement élastoplastique (voir MEC 551)



Traitement numérique de l'élastoplasticité : **amphis 6 et 7**

# Comportements non-linéaires de matériaux (non-linéarités physiques)

## ► Comportement viscoplastique



$$\eta \dot{\varepsilon}_V = \max(0, |\sigma - H\varepsilon_V| - \sigma_0) \text{signe}(\sigma - H\varepsilon_V)$$

- ... et bien d'autres modèles de comportement (avec, par exemple, de l'endommagement)...

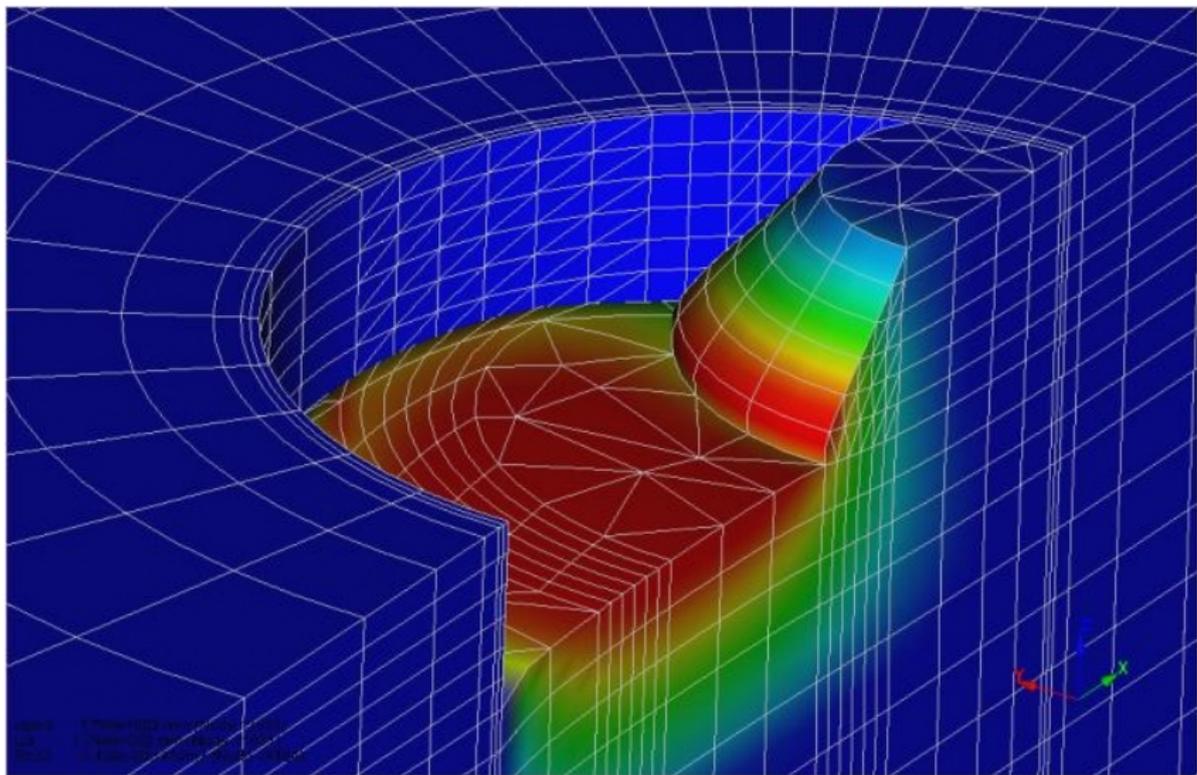
## Exemple (élastoplasticité) : fouille circulaire (Nantes)

[Laboratoire Central des Ponts et chaussées, 2003]

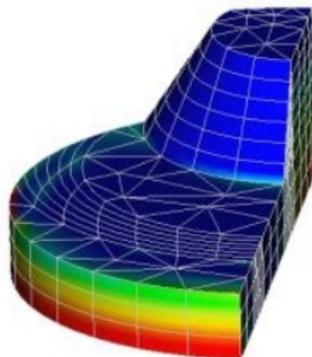


- ▶ Sol : comportement élastoplastique ;
- ▶ Paroi cylindrique : comportement élastique ;
- ▶ **Excavation réalisée en plusieurs phases**

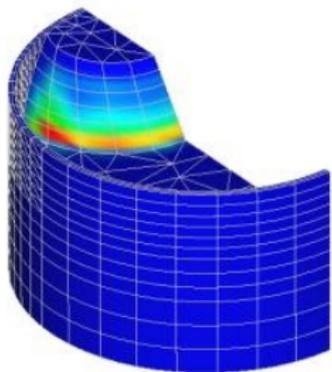
## Exemple (élastoplasticité) : fouille circulaire (Nantes)



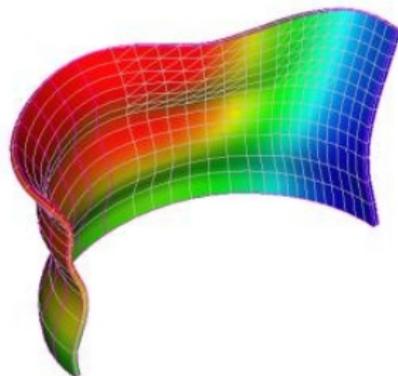
Maillage excavation + paroi + sol extérieur à paroi, avec déplacement vertical (coule



Contrainte équivalente de von Mises  $\sigma_{eq} = \sqrt{3/2} \|\underline{\underline{\sigma}} - \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}/3)\underline{\underline{1}}\|$  (sol)



Déformation plastique cumulée (sol)



Déformée finale (paroi)

# Plan

## 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

Contact unilatéral

Propagation de fissure

Endommagement

Matériaux à comportements non-linéaires

**Transformations finies (non-linéarités géométriques)**

Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

## 2. Méthodes de résolution numérique

Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire

Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)

## Transformations finies (non-linéarités géométriques)

### HPP : base de la linéarisation géométrique,

- Permet de confondre configurations  $\Omega(0)$  (non déformée) et  $\Omega(t)$  (déformée) ;
- Erreur résultant de  $\Omega(t) \approx \Omega(0)$  : du second ordre en  $\nabla \underline{u}$ .

### Si HPP n'est pas satisfaite, l'analyse devient nécessairement non linéaire

- Il faut utiliser le tenseur de déformation  $\underline{\underline{e}}$  de Green-Lagrange, non-linéaire en  $\nabla \underline{u}$  :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u} + \nabla^T \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) \neq \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u})$$

- Forme faible de l'équilibre (PPV) écrite **sur  $\Omega(t)$  et  $\partial\Omega(t)$ , en général inconnus a priori**, et non sur  $\Omega(0)$  et  $\partial\Omega(0)$ .

**Instabilités** (par ex. flambement) susceptibles d'apparaître.

Voir – cours *Modélisation et calcul des structures élancées* (P. Ballard, MEC553)  
 – PC5 : flambage d'une poutre (exemple d'algorithme numérique).

# Plan

## 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

Contact unilatéral

Propagation de fissure

Endommagement

Matériaux à comportements non-linéaires

Transformations finies (non-linéarités géométriques)

Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

## 2. Méthodes de résolution numérique

Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

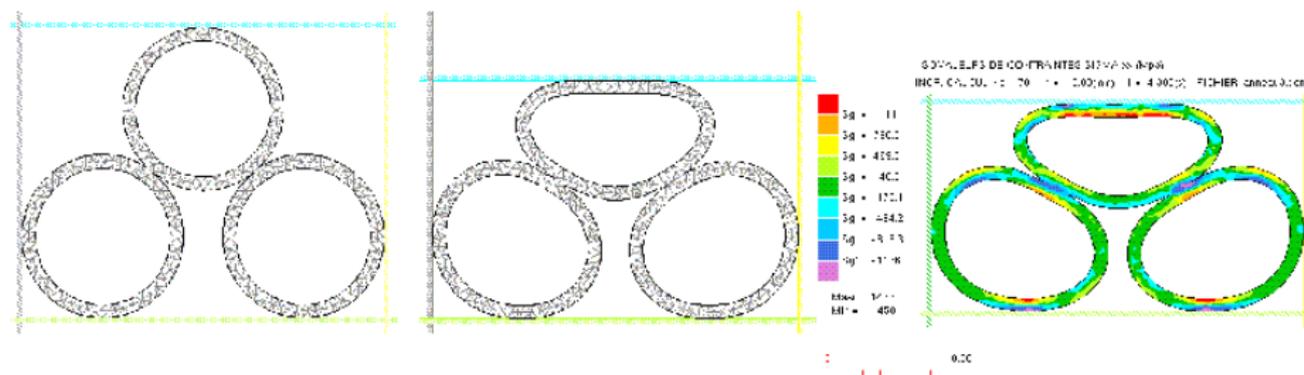
Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire

Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)

## Exemple : modélisation d'un essai de compactage de coques

(transformations finies + contact)

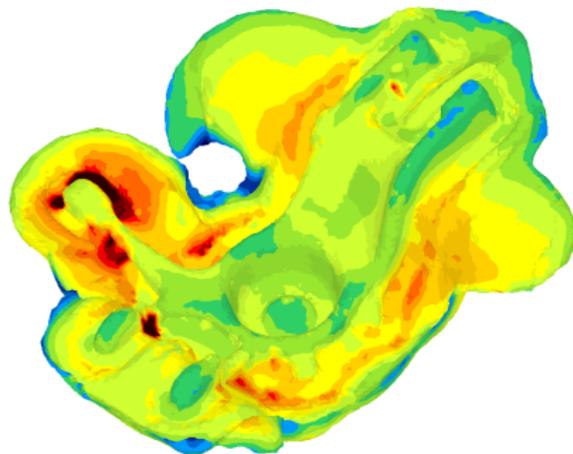
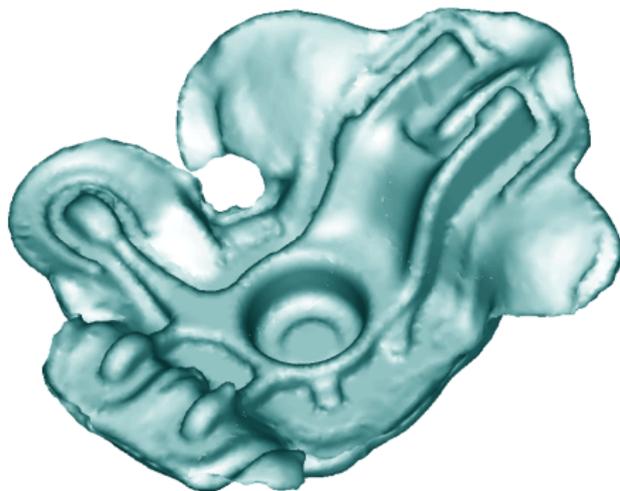


## Modélisation de l'essai, et visualisation du champ de contraintes

[Centre de mise en forme des matériaux (CEMEF), Ecole des Mines de Paris]

## Exemple : mise en forme

(Plasticité + transformations finies + contact)



**Forgeage à chaud d'un pivot de fusée pour automobile. Simulation avec Forge3. Forme finale de la pièce et distribution de la déformation plastique**  
[Centre de mise en forme des matériaux (CEMEF), Ecole des Mines de Paris]

# Plan

## 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

Contact unilatéral

Propagation de fissure

Endommagement

Matériaux à comportements non-linéaires

Transformations finies (non-linéarités géométriques)

Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

## 2. Méthodes de résolution numérique

Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire

Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)

# Plan

## 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

Contact unilatéral

Propagation de fissure

Endommagement

Matériaux à comportements non-linéaires

Transformations finies (non-linéarités géométriques)

Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

## 2. Méthodes de résolution numérique

Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

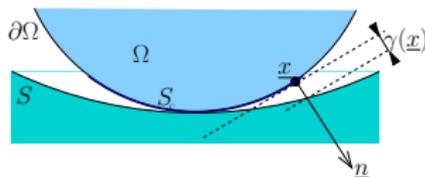
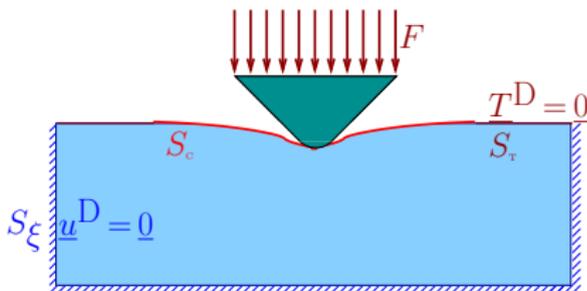
Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire

Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)

## Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

- Conditions à satisfaire sur la surface de contact potentiel  $S_C$  :

$$\begin{aligned} \underline{T} - T_n \underline{n} &= \underline{0} \\ T_n &\leq 0 \\ u_n - \gamma &\leq 0 \\ (u_n - \gamma) T_n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{sur } S_C)$$



- Surface de contact effectif :  $S_C^{\text{eff}} \subseteq S_C = \{x \in S_C \mid u_n - \gamma = 0\}$

**Difficulté** : la surface de contact effectif  $S_C^{\text{eff}}$  n'est pas connue a priori

## Algorithme itératif portant sur la recherche de $S_C^{\text{eff}}$

**Principe** : ajustement **itératif** de la surface de contact effectif  $S_C^{\text{eff}}$

- ▶ Après chaque itération  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), estimation  $S_C^{(k+1)}$  de  $S_C^{\text{eff}}$ .
- ▶ Estimation initiale  $S_C^{(0)}$  choisie arbitrairement (par exemple  $S_C^{(0)} = S_C$ )
- ▶ Itération  $k$  : problème d'élasticité linéaire avec les conditions sur  $S_C^{(k)}$  :

$$\begin{aligned} u_n(\underline{x}) &= \gamma(\underline{x}) & \underline{T}(\underline{x}) - T_n(\underline{x})\underline{n}(\underline{x}) &= \underline{0} & (\text{sur } S_C^{(k)}) \\ \underline{T}(\underline{x}) &= \underline{0} & & & (\text{sur } S_C \setminus S_C^{(k)}) \end{aligned}$$

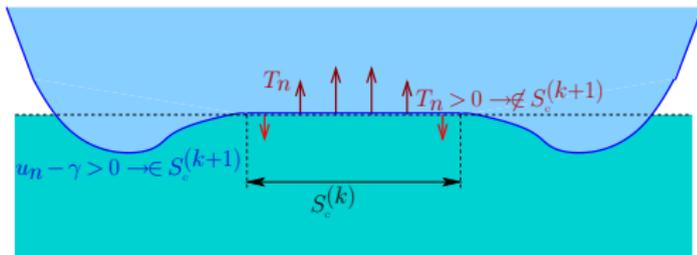
- ▶ Nécessité d'utiliser une **formulation donnant  $T_n$  sur  $S_C^{(k)}$**  (amphi 1) :
- ▶ **Approximation éléments finis** : conduit au système linéaire (amphi 3)

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K} & -\mathbb{A}^{(k)} \\ -\mathbb{A}^{(k)\text{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{(k)} \\ \mathbf{T}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ -\gamma^{(k)} \end{Bmatrix}$$

## Algorithme itératif portant sur la recherche de $S_C^{\text{eff}}$

- ▶ Actualisation de  $S_C^{\text{eff}}$  par vérification des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \underline{T} - T_n \underline{n} &= \underline{0} \\ T_n &\leq 0 \\ u_n - \gamma &\leq 0 \\ (u_n - \gamma) T_n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{sur } S_C)$$



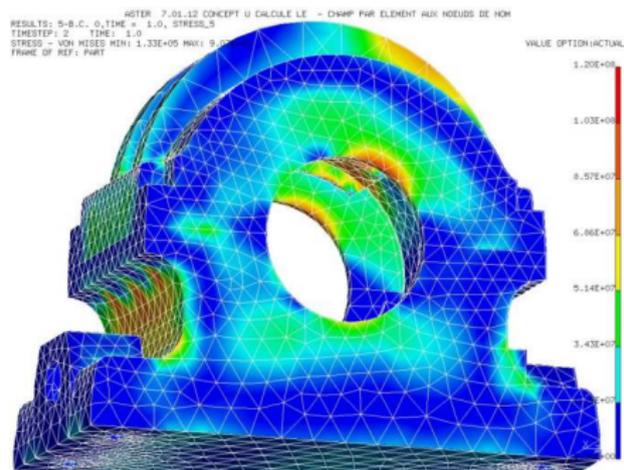
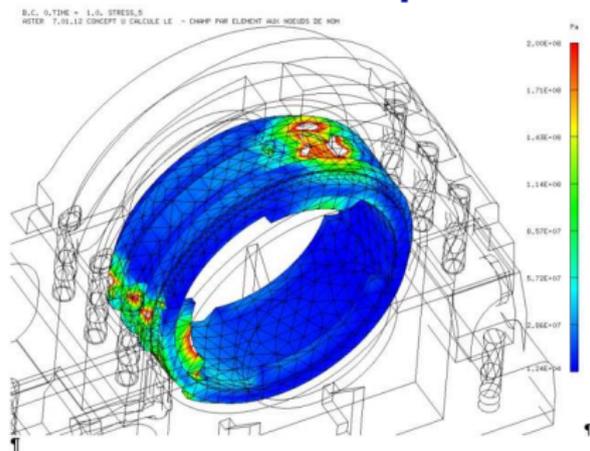
Actualisation  $S_C^{(k)} \longrightarrow S_C^{(k+1)}$  de la surface de contact déterminée par :

$$\begin{aligned} \text{Si } \underline{x}^{(n)} \in S_C^{(k)} \text{ et } T^{(k)}(\underline{x}^{(n)}) > 0 & \quad \text{alors } \underline{x}^{(n)} \notin S_C^{(k+1)} \\ \text{Si } \underline{x}^{(n)} \notin S_C^{(k)} \text{ et } u_n^{(k)}(\underline{x}^{(n)}) - \gamma(\underline{x}^{(n)}) > 0 & \quad \text{alors } \underline{x}^{(n)} \in S_C^{(k+1)} \end{aligned}$$

**Convergence** si  $S_C^{(k+1)} = S_C^{(k)}$ , on a alors  $S_C^{\text{eff}} = S_C^{(k+1)} = S_C^{(k)}$

## Exemple : palier d'arbre

[EDF R et D, Code\_Aster]



Distribution de contrainte équivalente de Mises  
 Calcul élastique avec contact unilatéral entre composants du palier

# Plan

## 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

Contact unilatéral

Propagation de fissure

Endommagement

Matériaux à comportements non-linéaires

Transformations finies (non-linéarités géométriques)

Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

## 2. Méthodes de résolution numérique

Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire

Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)

## Motivation

- ▶ L'analyse de structures à comportement non linéaire mène fréquemment à un **système d'équations non linéaires** :

$$\{\mathbb{R}(\mathbf{U})\} = \{\mathbf{0}\}$$

(typiquement : expression par PPV de l'équilibre + comportement)  
Cf. exemple de l'élasticité non linéaire ci-après.

- ▶ Dans le cas élastique linéaire (amphis 1 à 4), on aurait

$$\{\mathbb{R}(\mathbf{U})\} = [\mathbb{K}]\{\mathbf{U}\} - \{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{0}\}$$

**Algorithmes de type Newton** : méthodes **itératives** pour la résolution numérique de systèmes d'équations non linéaires.

## Résolution numérique d'une équation scalaire non-linéaire

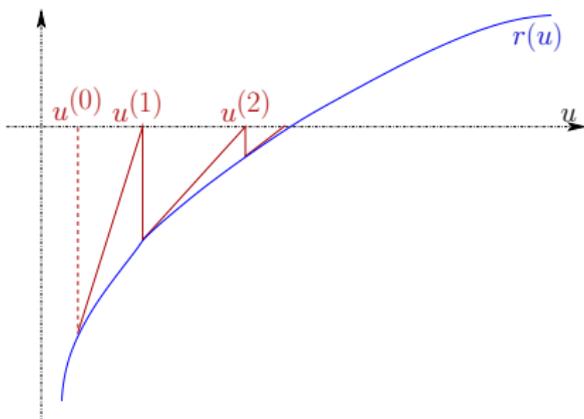
Trouver  $u$  tel que  $r(u) = 0$

Procédé itératif : construction d'une suite  $u^{(k)} \rightarrow u$  telle que  $r(u) = 0$

- **Méthode de Newton** : repose sur l'approximation de  $r(u^{(k+1)})$  à l'ordre 1 autour de  $u^{(k)}$  (annulation de cette approximation à chaque itération)

$$r(u^{(k+1)}) \approx r(u^{(k)}) + [u^{(k+1)} - u^{(k)}]r'(u^{(k)}) = 0 \quad \text{i.e.}$$

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \frac{r(u^{(k)})}{r'(u^{(k)})}$$



## Convergence quadratique de la méthode de Newton

Posant  $e^{(k)} = u^{(k)} - u$  (erreur sur la solution) pour tout  $k$ , on a :

$$e^{(k+1)} - e^{(k)} = u^{(k+1)} - u^{(k)} = -\frac{r(u^{(k)})}{r'(u^{(k)})}$$

Développement de  $r(u^{(k)})$  et  $r'(u^{(k)})$  autour de la solution exacte  $u$  :

$$\exists \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{t.q.} \quad r(u^{(k)}) = r'(u)e^{(k)} + \frac{1}{2}r''(u + \alpha e^{(k)})(e^{(k)})^2$$

$$\exists \beta, 0 \leq \beta \leq 1 \quad \text{t.q.} \quad r'(u^{(k)}) = r'(u) + r''(u + \beta e^{(k)})e^{(k)}$$

$$e^{(k+1)} = \frac{2r''(u + \beta e^{(k)}) - r''(u + \alpha e^{(k)})}{2r'(u) + 2r''(u + \beta e^{(k)})e^{(k)}} (e^{(k)})^2 = O(|e^{(k)}|^2)$$

**Méthode de Newton : convergence quadratique au voisinage de la solution.**

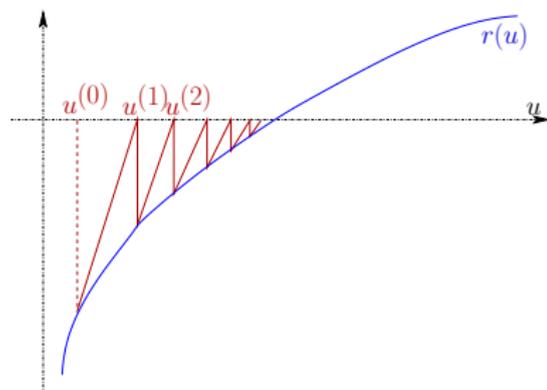
## Méthode de Newton modifiée 1

$r'(u)$  remplacé par une constante  $K$ , ce qui donne

$$r(u^{(k+1)}) \approx r(u^{(k)}) + [u^{(k+1)} - u^{(k)}]K = 0$$

i.e.

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \frac{r(u^{(k)})}{K}$$



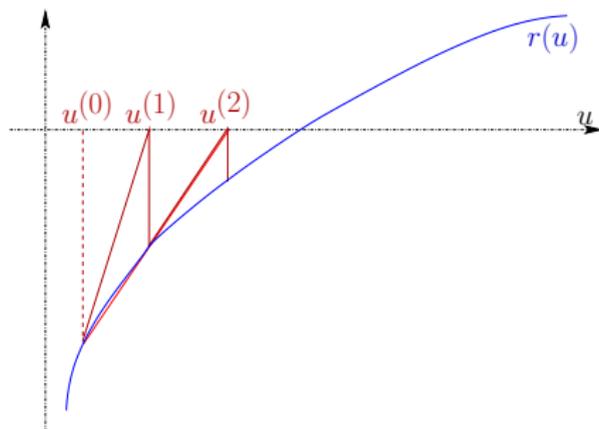
La convergence est (seulement) linéaire au voisinage de la solution :

$$e^{(k+1)} = \left(1 - \frac{r'(u)}{K}\right)e^{(k)} + o(|e^{(k)}|) = O(|e^{(k)}|)$$

Peu intéressant dans le cas scalaire  $r(u) = 0$  ;  
Extension au cas vectoriel  $\{\mathbb{R}(\mathbf{U})\} = \{0\}$  parfois utile.

## Méthode de Newton modifiée 2

Utilisation de la droite sécante passant par les deux itérés précédents



$$r(u^{(k+1)}) \approx r(u^{(k)}) + [u^{(k+1)} - u^{(k)}] \frac{r(u^{(k)}) - r(u^{(k-1)})}{u^{(k)} - u^{(k-1)}} = 0$$

On montre que  $|e^{(k+1)}| = O(|e^{(k)}|^{(1+\sqrt{5})/2})$  : convergence moins bonne que pour la méthode de Newton « standard », mais meilleure que pour la méthode de Newton modifiée 1.  $(1 + \sqrt{5})/2$  est le nombre d'or...

## Résolution d'un système d'équations non-linéaires par la méthode de Newton

**Procédé itératif** : construction d'une suite  $\{U^{(k)}\} \rightarrow \{U\}$  telle que  $\{R(U)\} = \{0\}$

- **Principe** : annulation à chaque itération du développement du résidu à l'ordre 1 autour de l'itéré précédent.

A l'itération  $k+1$ , on a ainsi :

$$\{R^{(k+1)}\} \approx \{R^{(k)}\} + [K^{(k)}]\{\delta U^{(k)}\} = \{0\} \quad \{R^{(m)}\} \stackrel{\text{déf}}{=} \{R(U^{(m)})\}$$

$$\{\delta U^{(k)}\} = \{U^{(k+1)}\} - \{U^{(k)}\} \quad (\text{correction})$$

$$[K^{(k)}] = \nabla_U \{R\}(\{U^{(k)}\}) \quad (\text{rigidité tangente en } \{U^{(k)}\})$$

## Résolution d'un système d'équations non-linéaires par la méthode de Newton

**Procédé itératif** : construction d'une suite  $\{\mathbf{U}^{(k)}\} \rightarrow \{\mathbf{U}\}$  telle que  $\{\mathbb{R}(\mathbf{U})\} = \{0\}$

- ▶ **Principe** : annulation à chaque itération du développement du résidu à l'ordre 1 autour de l'itéré précédent.

- 1 Initialisation :  $\{\mathbf{U}^{(0)}\}$  (souvent,  $\{\mathbf{U}^{(0)}\} = \{0\}$ ),  
Calcul du résidu initial  $\{\mathbb{R}^{(0)}\} = \{\mathbb{R}(\mathbf{U}^{(0)})\}$
- 2 Pour  $k = 0, 1, \dots$  faire :
  - (i) Calcul de  $[\mathbb{K}^{(k)}]$  (rigidité tangente globale) ;
  - (ii)  $\{\mathbf{U}^{(k+1)}\} = \{\mathbf{U}^{(k)}\} + [\mathbb{K}^{(k)}]^{-1}\{\mathbb{R}^{(k)}\}$  (nouvel itéré) ;
  - (iii)  $\{\mathbb{R}^{(k+1)}\} = \{\mathbb{R}(\mathbf{U}^{(k+1)})\}$  (nouveau résidu) ;
  - (iv)  $\|\{\mathbb{R}^{(k+1)}\}\| \leq \epsilon$  ? (test de convergence) :
    - Si oui : **STOP**,  $\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{U}^{(k+1)}\}$
    - Si non, faire  $k \leftarrow k + 1$  et retour à 2.(i).

## Convergence quadratique au voisinage de la solution.

Posant  $\{\mathbb{E}^{(k)}\} = \{\mathbb{U}^{(k)}\} - \{\mathbb{U}\}$  (erreur sur la solution) pour tout  $k$ , on a :

$$\{\mathbb{E}^{(k+1)}\} - \{\mathbb{E}^{(k)}\} = \{\delta\mathbb{U}^{(k)}\} = -[\mathbb{K}^{(k)}]^{-1}\{\mathbb{R}^{(k)}\}$$

Développement de  $\{\mathbb{R}^{(k)}\}$  et  $[\mathbb{K}^{(k)}]$  autour des valeurs  $\{\mathbb{R}\} = \{0\}$  et  $[\mathbb{K}]$  à la solution exacte :

$$\exists \alpha, \quad \mathbb{R}_I^{(k)} = \mathbb{K}_{IJ}^{(\infty)} \mathbb{E}_J^{(k)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbb{R}_I}{\partial \mathbb{U}_J \partial \mathbb{U}_K} (\{\mathbb{U} + \alpha \mathbb{E}^{(k)}\}) \mathbb{E}_J^{(k)} \mathbb{E}_K^{(k)} + o(\|\mathbb{E}^{(k)}\|^2)$$

$$\exists \beta, \quad \mathbb{K}_{IJ}^{(k)} = \mathbb{K}_{IJ}^{(\infty)} + \frac{\partial^2 \mathbb{R}_I}{\partial \mathbb{U}_J \partial \mathbb{U}_K} (\{\mathbb{U} + \beta \mathbb{E}^{(k)}\}) \mathbb{E}_K^{(k)} + o(\|\mathbb{E}^{(k)}\|)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_I^{(k+1)} &= \frac{1}{2} \mathbb{K}_{IJ}^{(\infty)-1} \left[ \frac{\partial^2 \mathbb{R}_J}{\partial \mathbb{U}_K \partial \mathbb{U}_L} (\{\mathbb{U} + \beta \mathbb{E}^{(k)}\}) - 2 \frac{\partial^2 \mathbb{R}_J}{\partial \mathbb{U}_K \partial \mathbb{U}_L} (\{\mathbb{U} + \alpha \mathbb{E}^{(k)}\}) \right] \mathbb{E}_K^{(k)} \mathbb{E}_L^{(k)} \\ &\quad + o(\|\mathbb{E}^{(k)}\|^2) \\ &= O(\|\mathbb{E}^{(k)}\|^2) \end{aligned}$$

# Plan

## 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

Contact unilatéral

Propagation de fissure

Endommagement

Matériaux à comportements non-linéaires

Transformations finies (non-linéarités géométriques)

Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

## 2. Méthodes de résolution numérique

Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

**Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire**

Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)

## Équilibre d'une structure en élasticité non linéaire HPP

Comportement élastique non linéaire :  
 $(\phi(\underline{\underline{\varepsilon}}))$  : densité d'énergie libre, convexe)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

- **Formulation faible de l'équilibre** : (PPV, cf. amphi 1)

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{w}}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{w}} \, dV + \int_{S_T} \underline{\underline{T}}^D \cdot \underline{\underline{w}} \, dS \quad \forall \underline{\underline{w}} \in \mathcal{C}(\underline{\underline{0}})$$

- Incorporation comportement et compatibilité  $\Rightarrow$  **équation non-linéaire**

$$\text{trouver } \underline{\underline{u}} \in \mathcal{C}(\underline{\underline{u}}^D) \text{ tel que } \mathcal{R}(\underline{\underline{u}}; \underline{\underline{w}}) = 0 \quad \forall \underline{\underline{w}} \in \mathcal{C}(\underline{\underline{0}})$$

avec le **résidu** défini par :

$$\mathcal{R}(\underline{\underline{u}}; \underline{\underline{w}}) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{u}}]) \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{w}}] \, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{w}} \, dV - \int_{S_T} \underline{\underline{T}}^D \cdot \underline{\underline{w}} \, dS$$

- **Objectif de la résolution itérative** : Construire une suite  $\underline{\underline{u}}^{(k)}$  convergent vers la solution  $\underline{\underline{u}}$  de  $\mathcal{R}(\underline{\underline{u}}; \cdot) = 0$ .
- **Interpolation par éléments finis** de  $\underline{\underline{u}} \in \mathcal{C}(\underline{\underline{u}}^D)$  et  $\underline{\underline{w}} \in \mathcal{C}(\underline{\underline{0}})$   
 $\Rightarrow$  **système d'équations non linéaires**

## Équilibre en élasticité non linéaire : méthode de Newton

$$\text{trouver } \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \text{ tel que } \mathcal{R}(\underline{u}; \underline{w}) = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

Méthode de Newton (problème continu) :

$$\mathcal{R}(\underline{u}^{(k+1)}; \underline{w}) \approx \mathcal{R}(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}) + \langle \mathcal{R}'(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}), \delta \underline{u}^{(k)} \rangle = 0$$

en termes de l'application linéaire tangente  $\mathcal{R}'$  de  $\mathcal{R}$  :

$$\mathcal{R}(\underline{v} + \underline{z}, \underline{w}) - \mathcal{R}(\underline{v}, \underline{w}) = \langle \mathcal{R}'(\underline{v}, \underline{w}), \underline{z} \rangle + o(\|\underline{z}\|)$$

L'itéré  $\underline{u}^{(k+1)} = \underline{u}^{(k)} + \delta \underline{u}^{(k)}$  est donc solution du problème **linéaire**

$$\text{trouver } \delta \underline{u}^{(k)} \in \mathcal{C}(\underline{0}) \text{ tel que } \langle \mathcal{R}'(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}), \delta \underline{u}^{(k)} \rangle = -\mathcal{R}(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}) \quad (\forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0}))$$

## Equilibre en élasticité non linéaire : application linéaire tangente

- Développement de  $\underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k+1)}]$  autour de  $\underline{u}^{(k)}$  :

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(k+1)}])}_{\underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k+1)}]} = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(k)}])}_{\underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k)}]} + \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(k)}])}_{\mathcal{A}^{(k)}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}] + o(\|\underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}]\|)$$

- **module d'élasticité tangent local** associé au comportement élastique non linéaire :

$$\mathcal{A}^{(k)}(\underline{x}) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(k)}](\underline{x})) \quad (\text{tenseur d'ordre 4})$$

Symétrique et défini positif (par hypothèse sur  $\phi$ ),

S'interprète comme un comportement élastique linéaire tangent.

- Développement de  $\mathcal{R}(\underline{u}^{(k+1)}; \underline{w})$  autour de  $\underline{u}^{(k)}$  :

$$\mathcal{R}(\underline{u}^{(k+1)}; \underline{w}) = \mathcal{R}(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}) + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}] : \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV + o(\|\underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}]\|)$$

## Approximation par éléments finis

- ▶ Approximation par éléments finis

$$\implies \Omega_h, \underline{u}_h^{(k)} \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^D), \delta \underline{u}_h^{(k)} \in \mathcal{C}_h(\underline{0}), \underline{w} \in \mathcal{C}_h(\underline{0}).$$

- ▶ Résidu discret : défini à travers

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{R}^{(k)}\} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(k)}]) \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

Matrice de rigidité tangente : définie à travers

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}^{(k)}] \{\delta \mathbb{U}^{(k)}\} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_h^{(k)}] : \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV$$

Correction  $\{\delta \mathbb{U}^{(k)}\}$  gouvernée par le **système linéaire tangent**

$$\{\mathbb{R}^{(k)}\} + [\mathbb{K}^{(k)}] \{\delta \mathbb{U}^{(k)}\} = \{0\}$$

Remarque sur la méthode de Newton :

- Bonnes propriétés de convergence (quadratique) ; faible nombre d'itérations
- Rigidité tangente  $[\mathbb{K}^{(k)}]$  calculée **à chaque itération** : coût numérique parfois élevé

## Méthode de Newton modifiée : opérateur tangent constant

$$\{\mathbb{R}^{(k)}\} + [\hat{\mathbb{K}}]\{\delta\mathbb{U}^{(k)}\} = \{0\}$$

où la matrice de rigidité  $[\hat{\mathbb{K}}]$  (définie positive) est arbitraire, par exemple

$$\mathcal{A}^{(0)} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{0}}) \quad (\text{module d'élasticité au repos})$$

### Méthode de Newton modifiée :

- (i) propriétés de convergence dégradées (linéaire) ; nombre d'itérations élevé ;
- (ii) temps de calcul réduit pour chaque itération (rigidité tangente  $[\hat{\mathbb{K}}]$  calculée et factorisée ( $LDL^T$ ) à la première itération, puis stockée en mémoire.

Il existe d'autres variantes de méthodes de Newton

- ▶ Compromis « classique-modifié » : rigidité tangente calculée toutes les quelques itérations et utilisée comme rigidité constante entre deux actualisations ;
- ▶ Variantes reposant sur la notion de « rigidité sécante ».

# Plan

## 1. Aperçu de comportements non-linéaires à l'échelle de la structure

Contact unilatéral

Propagation de fissure

Endommagement

Matériaux à comportements non-linéaires

Transformations finies (non-linéarités géométriques)

Juxtaposition de plusieurs types de non-linéarités

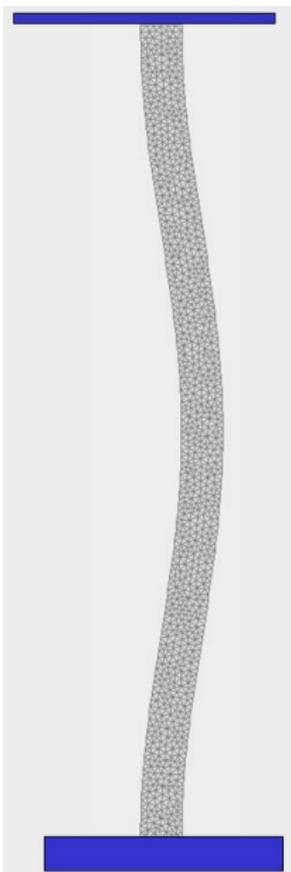
## 2. Méthodes de résolution numérique

Exemple d'algorithme itératif : contact unilatéral sans frottement

Equations non linéaires : algorithmes itératifs de type Newton

Exemple d'algorithme itératif : élasticité non linéaire

Exemple d'algorithme itératif : élasticité en transformation finie (PC 5)



## Conclusion

- ▶ **Aperçu et importance des types de non-linéarité en calcul des structures et exemples ;**
- ▶ **Deux algorithmes sur des cas « proches » de l'élasticité linéaire (contact, élasticité non linéaire) :**
  - Notion d'algorithme itératif ;
  - Méthode de Newton pour  $\{\mathbb{K}(\mathbf{U})\} - \{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{0}\}$  ;
  - Se ramener à une suite de calculs linéaires (utilisant les notions de MEF en élasticité linéaire)
  - Rigidité tangente
- ▶ **Mise en place de notions permettant de traiter d'autres calculs non-linéaires**
  - Résolution numérique de l'évolution en élastoplasticité HPP : traitée en détail aux amphis 6 et 7

[www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html](http://www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html)