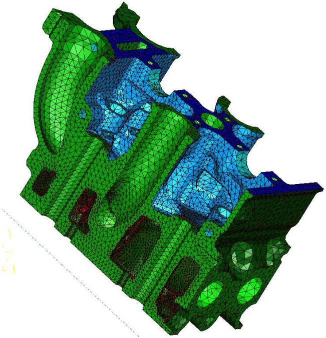
Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis



www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html

Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, 2009–2010

Plan du cours

Concepts fondamentaux et leur application en élasticité linéaire statique

- Amphi 1 – Résolution approchée de problèmes d'équilibre en élasticité
- Amphi 2 – La notion d'élément fini isoparamétrique
- Amphi 3 – La méthode des éléments finis en élasticité linéaire
- Amphi 4 – Application à la mécanique linéaire de la rupture

Régime non-linéaire quasistatique, application aux solides élastoplastiques

- Amphi 5 – Calcul de solides à comportement non-linéaire
- Amphi 6 – Calcul de solides élastoplastiques 1 : aspects locauxa
- Amphi 7 – Calcul de solides élastoplastiques 2 : aspects globaux

Régime linéaire, avec évolution temporelle

- Amphi 8 – Evolution thermique et thermoélasticité linéaire quasistatique
- **Amphi 9 – Analyse dynamique des structures élastiques**

Analyse dynamique des structures élastiques

Plan

Hypothèses, équations locales

- **Elasticité linéaire, HPP**

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla^{T} \underline{u})$	dans $\Omega \times [0, t^{F}]$	compatibilité (a)
$\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} - \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \underline{0}$	dans $\Omega \times [0, t^{F}]$	dynamique (b)
$\underline{\underline{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$	dans $\Omega \times [0, t^{F}]$	comportement élastique (c)
$\underline{u} = \underline{u}^{\mathrm{D}}$	sur $S_{\xi} \times [0, t^{F}]$	déplacements imposés (d)
$\underline{T} = \underline{T}^{\mathrm{D}}$	sur $S_{\mathrm{T}} \times [0, t^{F}]$	efforts imposés (e)
$\begin{cases} \underline{u}(\cdot, 0) = \underline{U}_0(\cdot) \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}(\cdot, 0) = \underline{V}_0(\cdot) \end{cases}$	dans Ω	**conditions initiales (f)**

Ondes élastiques

Dynamique + compatibilité + élasticité linéaire isotrope : **équation de Navier**

$$\boxed{\mu\Delta\underline{u} + \frac{\mu}{1-2\nu}\underline{\nabla}\mathrm{div}\underline{u} - \rho\frac{\partial^2\underline{u}}{\partial t^2} + \rho\underline{f} = \underline{0} \qquad \text{(cas isotrope)}}$$

Représentation des solutions $\underline{u}$ par **potentiels de Lamé :**

$$\boxed{\underline{u} = \underline{\nabla}\phi_{\mathrm{L}} + \mathrm{rot}\underline{\phi}_{\mathrm{T}} \qquad \text{avec} \quad \mathrm{div}\underline{\phi}_{\mathrm{T}} = \underline{0}}$$

Equation de Navier $\Longrightarrow$ **Equations des ondes** découplées d'inconnues ϕ_{L} et $\underline{\phi}_{\mathrm{T}}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\phi_{\mathrm{L}} - \frac{1}{c_{\mathrm{L}}^2}\,\frac{\partial^2\phi_{\mathrm{L}}}{\partial t^2} + f_{\mathrm{L}} &= 0 \\ \Delta\underline{\phi}_{\mathrm{T}} - \frac{1}{c_{\mathrm{T}}^2}\,\frac{\partial^2\underline{\phi}_{\mathrm{T}}}{\partial t^2} + \underline{f}_{\mathrm{T}} &= \underline{0} \end{aligned}}
\qquad
\left(\text{avec} \quad \begin{aligned} \Delta\underline{w} &= \underline{\nabla}\mathrm{div}\underline{w} + \mathrm{rotrot}\underline{w} \\ \underline{f} &= \underline{\nabla}f_{\mathrm{L}} + \mathrm{rot}\underline{f}_{\mathrm{T}} \end{aligned}\right)$$

Ondes élastiques, avec les célérités

$$c_{\mathrm{L}}^2 = \frac{2-2\nu}{1-2\nu}\frac{\mu}{\rho} \qquad \text{Ondes de compression, ou « longitudinales »}$$

$$c_{\mathrm{T}}^2 = \frac{\mu}{\rho} \qquad \text{Ondes de cisaillement, ou « transversales »}$$

$$\boxed{c_{\mathrm{L}} > c_{\mathrm{T}}}$$

Domaine de validité de l'approche quasistatique

- Dynamique + compatibilité + comportement élastique, avec **coordonnées adimensionnelles** $\underline{\tilde{x}} = \underline{x}/L$ **et** $\tilde{t} = t/T$:

$$\boxed{\operatorname{div}_{\tilde{x}}\Big(\frac{1}{\mu}\boldsymbol{\mathcal{A}}:\underline{\underline{\varepsilon}}_{\tilde{x}}[\underline{u}]\Big) - \frac{\rho L^2}{\mu T^2}\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \tilde{t}^2} + \frac{\rho L^2}{\mu}\underline{f} = \underline{0}}$$

- Hypothèse quasistatique légitime si

$$\frac{\rho L^2}{\mu T^2} \ll 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Big(\frac{L}{c_\mathrm{T}\, T}\Big)^2 \ll 1}$$

- **Interprétation :** Régime **dynamique** si $c_\mathrm{T}\, T$ (distance parcourue par une onde élastique pendant le temps caractéristique T) **n'est pas grand devant** L (longueur caractéristique)

Plan

Formulation faible

- **Principe des puissances virtuelles** (dynamique + CL en efforts) :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, \mathrm{d}V + \int_\Omega \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} . \underline{w} \, \mathrm{d}V = \int_\Omega \rho \underline{f} . \underline{w} \, \mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega} [\underline{\underline{\sigma}} . \underline{n}] . \underline{w} \, \mathrm{d}S \qquad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

  → **Introduction compatibilité + comportement**
  → **Restriction à champs virtuels admissibles à $\underline{0}$:**

- **Formulation faible** des équations de l'élastodynamique :

trouver $\underline{u}(\cdot, t) \in \mathcal{C}(\underline{u}^{\mathrm{D}})$ tel que

$$\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}](\cdot, t) : \boldsymbol{\mathcal{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, \mathrm{d}V + \int_\Omega \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}(\cdot, t) . \underline{w} \, \mathrm{d}V$$

$$= \int_\Omega \rho \underline{f}(\cdot, t) . \underline{w} \, \mathrm{d}V + \int_{S_T} \underline{T}^{\mathrm{D}}(\cdot, t) . \underline{w} \qquad \left(\forall t \in [0, t^{\mathsf{F}}] \, , \ \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0}) \right)$$

$$\underline{u}(\cdot, 0) = \underline{U}_0 \qquad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}(\cdot, 0) = \underline{V}_0$$

Semi-discrétisation par éléments finis

- **Approximation par éléments finis** (amphis 2 et 3) :

$$\boxed{[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}(t)\} + [\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}(t)\} = \{\mathbb{F}(t)\}}$$

- **Matrice de masse** $[\mathbb{M}]$ **:** définie par

$$\boxed{\{\mathbb{W}\}^{\mathsf{T}}[\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}(t)\} = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{u}_h}{\partial t^2} . \underline{w}_h \, \mathrm{d}V}$$

ou encore (énergie cinétique)

$$\boxed{\mathcal{K}_h(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \left\| \frac{\partial \underline{u}_h}{\partial t} \right\|^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbb{U}}(t)\}^{\mathsf{T}}[\mathbb{M}]\{\dot{\mathbb{U}}(t)\}}$$

$[\mathbb{M}]$ **est symétrique définie positive** (positivité stricte de l'énergie cinétique) ;

- **Calcul numérique** de $[\mathbb{M}]$: procédure d'assemblage

$$\boxed{\begin{aligned} \{\mathbb{W}\}^{\mathsf{T}}[\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}(t)\} &= \sum_{e=1}^{\mathrm{N_E}} \{\mathbb{W}_e\}^{\mathsf{T}}[\mathbb{M}_e]\{\ddot{\mathbb{U}}_e(t)\} \\ \{\mathbb{W}_e\}^{\mathsf{T}}[\mathbb{M}_e]\{\ddot{\mathbb{U}}_e(t)\} &= \{\mathbb{W}_e\}^{\mathsf{T}} \left\{ \int_{\Delta_e} \rho [N(\underline{a})]^{\mathsf{T}}[N(\underline{a})] J(\underline{a}) \, \mathrm{d}V(\underline{a}) \right\} \{\ddot{\mathbb{U}}_e(t)\} \end{aligned}}$$

Contraintes de discrétisation en dynamique

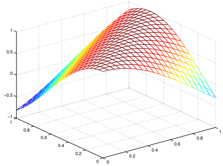
Statique : facteurs influant sur la finesse du maillage

- Bonne représentation de géométries complexes
- Anticipation de fortes variations de la solution (singularité, concentrations...)

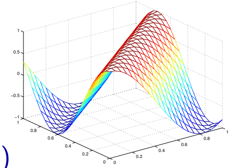
Dynamique : facteurs influant sur la finesse du maillage

(i) Les mêmes qu'en (quasi-)statique

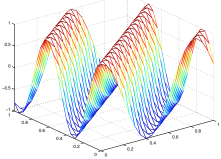
(ii) **En plus**, adéquation à la **longueur caractéristique dynamique** $\ell = cT$ (par exemple, $\ell =$ longueur d'onde si $T =$ période de sollicitation)



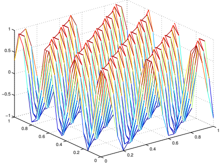
(a)



(b)



(c)



(d)

Maillage **fixe** 20×20 éléments carrés à 4 noeuds.

(a) Longueur d'onde $= 1$;

(b) Longueur d'onde $= 1/2$;

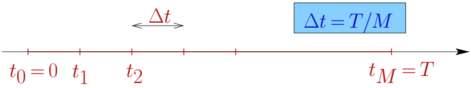
(c) Longueur d'onde $= 1/4$;

(d) Longueur d'onde $= 1/8$;

Plan

Plan

Discrétisation temporelle



- **Intégration en temps** : résolution **pas à pas** aux instants discrets successifs :

$$\left(\{\mathbb{U}_0\},\,\{\dot{\mathbb{U}}_0\},\,\{\ddot{\mathbb{U}}_0\}\right) = \left(\{\mathbb{U}(t_0)\},\,\{\dot{\mathbb{U}}(t_0)\},\,\{\ddot{\mathbb{U}}(t_0)\}\right)$$
$$\cdots$$
$$\left(\{\mathbb{U}_n\},\,\{\dot{\mathbb{U}}_n\},\,\{\ddot{\mathbb{U}}_n\}\right) = \left(\{\mathbb{U}(t_n)\},\,\{\dot{\mathbb{U}}(t_n)\},\,\{\ddot{\mathbb{U}}(t_n)\}\right)$$
$$\cdots$$
$$\left(\{\mathbb{U}_M\},\,\{\dot{\mathbb{U}}_M\},\,\{\ddot{\mathbb{U}}_M\}\right) = \left(\{\mathbb{U}(t_M)\},\,\{\dot{\mathbb{U}}(t_M)\},\,\{\ddot{\mathbb{U}}(t_M)\}\right)$$

- **Composant principal du schéma d'intégration en temps :** algorithme réalisant la **transition**

$$\boxed{\left(\{\mathbb{U}_n\},\,\{\dot{\mathbb{U}}_n\},\,\{\ddot{\mathbb{U}}_n\}\right) \rightarrow \left(\{\mathbb{U}_{n+1}\},\,\{\dot{\mathbb{U}}_{n+1}\},\,\{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\}\right)}$$

- **Schémas d'intégration en temps :**
  (i) Méthode des différences centrées (explicite)
  (ii) Famille des schémas de Newmark (certains implicites)

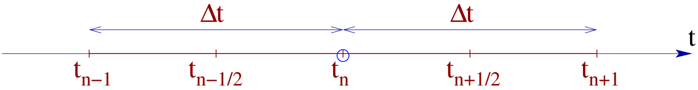
Plan

Schéma d'intégration explicite : méthode des différences centrées

- **Principe :** approcher vitesse et accélération par différences finies centrées :

$$\boxed{\{\dot{\mathbb{U}}_{n+1/2}\} \approx \frac{1}{\Delta t}\left[\{\mathbb{U}_{n+1}\} - \{\mathbb{U}_n\}\right] \qquad \{\ddot{\mathbb{U}}_n\} \approx \frac{1}{\Delta t}\left[\{\dot{\mathbb{U}}_{n+1/2} - \dot{\mathbb{U}}_{n-1/2}\}\right]}$$

avec les notations $\quad f_{n+1/2} = f(t_{n+1/2}), \quad t_{n+1/2} = \dfrac{1}{2}(t_{n+1} + t_n)$



- Mène à une approximation de l'accélération par **différences centrées d'ordre 2** :

$$\boxed{\{\ddot{\mathbb{U}}_n\} \approx \frac{1}{\Delta t^2}\left[\{\mathbb{U}_{n+1}\} - 2\{\mathbb{U}_n\} + \{\mathbb{U}_{n-1}\}\right]}$$

Algorithme d'intégration : méthode des différences centrées

Données : maillage ; (E, ν, ρ) ;
sollicitations $\underline{u}^{\mathrm{D}}(\underline{x}, t), \underline{T}^{\mathrm{D}}(\underline{x}, t), \underline{f}(\underline{x}, t)$;
conditions initiales $\{\mathbb{U}_0\}$, $\{\dot{\mathbb{U}}_0\}$.

Assemblage de $[\mathbb{K}]$ et $[\mathbb{M}]$;

Initialisation des accélérations : calcul de $\{\ddot{\mathbb{U}}_0\}$ par résolution de

$$[\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}_0\} = \{\mathbb{F}_0\} - [\mathbb{K}]\{\mathbb{U}_0\}$$

Initialisation des vitesses : calcul de $\{\dot{\mathbb{U}}_{1/2}\}$ par

$$\{\dot{\mathbb{U}}_{1/2}\} = \{\dot{\mathbb{U}}_0\} + \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{\mathbb{U}}_0\}$$

Boucle d'incrémentation temporelle : pour $n = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{M} - 1$

(a) Actualisation du déplacement : $\boxed{\{\mathbb{U}_{n+1}\} = \{\mathbb{U}_n\} + \Delta t\{\dot{\mathbb{U}}_{n+1/2}\}}$

(b) Calcul de l'accélération : $\boxed{[\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\} = \{\mathbb{F}_{n+1}\} - [\mathbb{K}]\{\mathbb{U}_{n+1}\}}$

(c) Actualisation de la vitesse : $\boxed{\{\dot{\mathbb{U}}_{n+3/2}\} = \{\dot{\mathbb{U}}_{n+1/2}\} + \Delta t\{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\}}$.

Caractère explicite de la méthode des différences centrées.

- Repose sur la résolution, pour chaque pas de temps, du système

$$\boxed{[\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\} = \{\mathbb{F}_{n+1}\} - [\mathbb{K}]\{\mathbb{U}_{n+1}\}}$$

- Etape **rendue explicite** par **condensation de masse** :
  Remplacer « vraie » matrice de masse $[\mathbb{M}]$ par **approximation diagonale** $[\tilde{\mathbb{M}}]$

$$\text{exemple :} \quad \tilde{\mathbb{M}}_{\mathsf{II}} = \sum_{\mathrm{J}=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{M}_{\mathsf{IJ}}$$

  Raisonnable car $\mathbb{M}_{\mathsf{IJ}} \neq 0$ (a) en faible nombre pour chaque I
  (b) Associés à DDLs géométriquement proches.
- Résolution **explicite** du système linéaire

$$\boxed{\{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\}_{\mathsf{I}} = \frac{1}{\tilde{\mathbb{M}}_{\mathsf{II}}}\Big(\{\mathbb{F}_{n+1}\}_{\mathsf{I}} - [\mathbb{K}]\{\mathbb{U}_{n+1}\}_{\mathsf{I}}\Big)}$$

- Méthode des différences centrées : **conditionnellement stable** (cf. suite)
  $\longrightarrow$ Parfois pénalisant (impose un trop grand nombre de pas de temps) ;
- **Intérêt de disposer de schémas inconditionnellement stables.**

Plan

Schémas d'intégration de la famille de Newmark

- Famille de schémas à deux paramètres (α, β), qui repose sur les relations

$$\boxed{\begin{aligned} &\{\mathbb{U}_{n+1}\} \approx \{\mathbb{U}_n\} + \Delta t\{\dot{\mathbb{U}}_n\} + \frac{1}{2}\Delta t^2\big[(1-2\beta)\{\ddot{\mathbb{U}}_n\} + 2\beta\{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\}\big] && (a) \\ &\{\dot{\mathbb{U}}_{n+1}\} \approx \{\dot{\mathbb{U}}_n\} + \Delta t\big[(1-\gamma)\{\ddot{\mathbb{U}}_n\} + \gamma\{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\}\big] && (b) \end{aligned}}$$

- Interprétation : variante des développements de Taylor

$$\begin{aligned} \{\mathbb{U}_{n+1}\} &= \{\mathbb{U}_n\} + \Delta t\{\dot{\mathbb{U}}_n\} + \frac{1}{2}\Delta t^2\{\ddot{\mathbb{U}}_n\} + o(\Delta t^2) \\ \{\dot{\mathbb{U}}_{n+1}\} &= \{\dot{\mathbb{U}}_n\} + \Delta t\{\ddot{\mathbb{U}}_n\} + o(\Delta t) \end{aligned}$$

  avec remplacement de $\{\ddot{\mathbb{U}}_n\}$ par une moyenne pondérée de $\{\ddot{\mathbb{U}}_n\}$ et $\{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\}$
- **Principe :** reporter (a) dans $[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}(t)\} + [\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}(t)\} = \{\mathbb{F}(t)\}$, qui donne

$$\boxed{\big([\mathbb{M}] + \beta\Delta t^2[\mathbb{K}]\big)\{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\} = \{\mathbb{F}_{n+1}\} - [\mathbb{K}]\Big(\{\mathbb{U}_n\} + \Delta t\{\dot{\mathbb{U}}_n\} + \Delta t^2\Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)\{\ddot{\mathbb{U}}_n\}\Big)}$$

- Conditions de convergence : **stabilité et cohérence** (th. de Lax, cf. amphi 8)

Algorithme d'intégration de Newmark

Données : maillage ; (E, ν, ρ) ;
sollicitations $\underline{u}^{\mathrm{D}}(\underline{x}, t), \underline{T}^{\mathrm{D}}(\underline{x}, t), \underline{f}(\underline{x}, t)$;
conditions initiales $\{\mathbb{U}_0\}$, $\{\dot{\mathbb{U}}_0\}$.

Assemblage de $[\mathbb{K}]$ et $[\mathbb{M}]$;

Initialisation : calcul de $\{\ddot{\mathbb{U}}_0\}$ par $\boxed{[\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}_0\} = \{\mathbb{F}_0\} - [\mathbb{K}]\{\mathbb{U}_0\}}$

Construction et factorisation de la matrice $[\mathbb{S}] = [\mathbb{M}] + \beta \Delta t^2 [\mathbb{K}]$;

Boucle d'incrémentation temporelle : pour $n = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{M} - 1$

(a) Prédiction :

$$\{\mathbb{U}^{\text{pred}}_{n+1}\} = \{\mathbb{U}_n\} + \Delta t \{\dot{\mathbb{U}}_n\} + \frac{1}{2}\Delta t^2 (1 - 2\beta)\{\ddot{\mathbb{U}}_n\}$$

$$\{\dot{\mathbb{U}}^{\text{pred}}_{n+1}\} = \{\dot{\mathbb{U}}_n\} + \Delta t (1 - \gamma)\{\ddot{\mathbb{U}}_n\}$$

(b) Calcul de l'accélération par $\boxed{[\mathbb{S}]\{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\} = \{\mathbb{F}_{n+1}\} - [\mathbb{K}]\{\mathbb{U}^{\text{pred}}_{n+1}\}}$

(c) Correction et actualisation :

$$\{\mathbb{U}_{n+1}\} = \{\mathbb{U}^{\text{pred}}_{n+1}\} + \Delta t^2 \beta \{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\}$$

$$\{\dot{\mathbb{U}}_{n+1}\} = \{\dot{\mathbb{U}}^{\text{pred}}_{n+1}\} + \Delta t \gamma \{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\}$$

Plan

Analyse de stabilité

- **Stabilité** $\Leftrightarrow$ **non-amplification d'erreurs entre t_n et t_{n+1}** (cf. amphi 8).
- **Reformulation** des schémas de Newmark sous la forme

$$\boxed{\left(\{\mathbb{U}_n\},\ \{\dot{\mathbb{U}}_n\}\right) \rightarrow \left(\{\mathbb{U}_{n+1}\},\ \{\dot{\mathbb{U}}_{n+1}\}\right)}$$

  (suite de transitions à partir des données initiales $\{\mathbb{U}_0\}$, $\{\dot{\mathbb{U}}_0\}$).
- Méthode :
  Multiplication à gauche des relations de Newmark par $[\mathbb{M}]$;
  Elimination de $[\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}_n\}$ et $[\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}_{n+1}\}$ à l'aide de $[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} + [\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}\} = \{\mathbb{F}\}$

$\Longrightarrow$ **Transition** réalisée par la **relation de récurrence**

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{bmatrix} [\mathbb{M}]+\beta\Delta t^2[\mathbb{K}] & 0 \\ \gamma\Delta t[\mathbb{K}] & [\mathbb{M}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbb{U}_{n+1} \\ \dot{\mathbb{U}}_{n+1} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} (\beta-\frac{1}{2})\Delta t^2[\mathbb{K}]-[\mathbb{M}] & \Delta t[\mathbb{M}] \\ (\gamma-1)\Delta t[\mathbb{K}] & [\mathbb{M}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbb{U}_n \\ \dot{\mathbb{U}}_n \end{Bmatrix} \\ - \begin{Bmatrix} (\frac{1}{2}-\beta)\Delta t^2\mathbb{F}_n+\beta\Delta t^2\mathbb{F}_{n+1} \\ (1-\gamma)\Delta t\mathbb{F}_n+\gamma\Delta t\mathbb{F}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\end{aligned}}$$

Analyse de stabilité

- Relation de récurrence de la forme

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \mathbb{U}_{n+1} \\ \dot{\mathbb{U}}_{n+1} \end{Bmatrix} = [\mathbb{R}] \begin{Bmatrix} \mathbb{U}_{n} \\ \dot{\mathbb{U}}_{n} \end{Bmatrix} + \{\mathbb{Y}_n\}}$$

- Stabilité : analyse facilitée par diagonalisation $([\mathbb{K}]\{\mathbb{X}\} - \omega^2[\mathbb{M}]\{\mathbb{X}\} = \{0\})$

$$\begin{array}{ll} \{\mathbb{X}^{\mathsf{I}}\}^{\mathsf{T}}[\mathbb{M}]\{\mathbb{X}^{\mathsf{I}}\} = 1 & \{\mathbb{X}^{\mathsf{I}}\}^{\mathsf{T}}[\mathbb{M}]\{\mathbb{X}^{\mathsf{J}}\} = 0 \;\; (\mathrm{J} \neq \mathrm{I}) \\ \{\mathbb{X}^{\mathsf{I}}\}^{\mathsf{T}}[\mathbb{K}]\{\mathbb{X}^{\mathsf{I}}\} = \omega_{\mathsf{I}}^2 & \{\mathbb{X}^{\mathsf{I}}\}^{\mathsf{T}}[\mathbb{K}]\{\mathbb{X}^{\mathsf{J}}\} = 0 \;\; (\mathrm{J} \neq \mathrm{I}) \end{array}$$

et

$$\boxed{\begin{array}{ll} \{\mathbb{U}_n\} = \displaystyle\sum_{1\leq \mathrm{J}\leq \mathrm{N}} \alpha_n^{\mathsf{J}}\{\mathbb{X}^{\mathsf{J}}\} & \{\dot{\mathbb{U}}_n\} = \displaystyle\sum_{1\leq \mathrm{J}\leq \mathrm{N}} \dot{\alpha}_n^{\mathsf{J}}\{\mathbb{X}^{\mathsf{J}}\} \\ \{\mathbb{U}_{n+1}\} = \displaystyle\sum_{1\leq \mathrm{J}\leq \mathrm{N}} \alpha_{n+1}^{\mathsf{J}}\{\mathbb{X}^{\mathsf{J}}\} & \{\dot{\mathbb{U}}_{n+1}\} = \displaystyle\sum_{1\leq \mathrm{J}\leq \mathrm{N}} \dot{\alpha}_{n+1}^{\mathsf{J}}\{\mathbb{X}^{\mathsf{J}}\} \end{array}}$$

(Note : problème au valeurs propres associé aux modes propres de vibration)

Analyse de stabilité

- Projection des relations de récurrence sur les modes propres $[\mathbb{M}]$-orthonormés
- N **systèmes** 2×2 **découplés** :

$$\begin{bmatrix} 1+\beta\Delta t^2\omega_{\mathrm{J}}^2 & 0 \\ \gamma\Delta t\,\omega_{\mathrm{J}}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{n+1}^{\mathrm{J}} \\ \dot{\alpha}_{n+1}^{\mathrm{J}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta-\dfrac{1}{2})\Delta t^2\omega_{\mathrm{J}}^2-1 & \Delta t \\ (\gamma-1)\Delta t\,\omega_{\mathrm{J}}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{n}^{\mathrm{J}} \\ \dot{\alpha}_{n}^{\mathrm{J}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\dfrac{1}{2}-\beta)\Delta t^2 f_n^{\mathrm{J}} + \beta\Delta t^2 f_{n+1}^{\mathrm{J}} \\ (1-\gamma)\Delta t f_n^{\mathrm{J}} + \gamma\Delta t f_{n+1}^{\mathrm{J}} \end{Bmatrix}$$

qui sont donc de la forme

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \alpha_{n+1}^{\mathrm{J}} \\ \dot{\alpha}_{n+1}^{\mathrm{J}} \end{Bmatrix} = [R_{\mathrm{J}}] \begin{Bmatrix} \alpha_{n}^{\mathrm{J}} \\ \dot{\alpha}_{n}^{\mathrm{J}} \end{Bmatrix} + \{Y_{n+1}^{\mathrm{J}}\}} \qquad (1 \leq \mathrm{J} \leq \mathrm{N})$$

- **Conditions de stabilité :**

$$\left\| [R_{\mathrm{J}}] \begin{Bmatrix} \delta\alpha_{n}^{\mathrm{J}} \\ \delta\dot{\alpha}_{n}^{\mathrm{J}} \end{Bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{Bmatrix} \delta\alpha_{n}^{\mathrm{J}} \\ \delta\dot{\alpha}_{n}^{\mathrm{J}} \end{Bmatrix} \right\| \qquad (\forall \mathrm{J},\ 1 \leq \mathrm{J} \leq \mathrm{N})$$

Analyse de stabilité

- Les conditions de stabilité se ramènent à des **conditions sur les valeurs propres des** $[R_\mathsf{J}]$:

$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } \lambda_1^\mathsf{J} \neq \lambda_2^\mathsf{J} : & \text{il faut } |\lambda_1^\mathsf{J}| \leq 1,\ |\lambda_2^\mathsf{J}| \leq 1 \\ \text{Si } \lambda_1^\mathsf{J} = \lambda_2^\mathsf{J} : & \text{il faut } |\lambda_1^\mathsf{J}| = |\lambda_2^\mathsf{J}| < 1. \end{cases} \qquad (\forall \mathrm{J},\ 1 \leq \mathrm{J} \leq \mathrm{N})}$$

- **Equation caractéristique** associée à $\mathrm{Det}([R_\mathsf{J}] - \lambda[I]) = 0$:

$$\mathrm{Det}([R_\mathsf{J}] - \lambda[I]) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda^2 - 2A\lambda + B = 0}$$

avec $\boxed{2A = 2 - \left(\frac{1}{2} + \gamma\right)\zeta^2,\quad B = 1 + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)\zeta^2 = 0,\quad \zeta^2 = \frac{\omega_\mathsf{J}^2 \Delta t^2}{1 + \beta\omega_\mathsf{J}^2 \Delta t^2}}$

- **Conditions de stabilité exprimées par rapport à** A, B **:**

(i) Si $A^2 - B > 0$ $(\lambda_1^\mathsf{J} \neq \lambda_2^\mathsf{J} \in \mathbb{R})$: $\boxed{-1 \leq A \leq 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1 - 2A + B \geq 0 \\ 1 + 2A + B \geq 0 \end{cases}}$

(ii) Si $A^2 - B = 0$ $(\lambda_1^\mathsf{J} = \lambda_2^\mathsf{J})$: $\boxed{-1 < A < 1}$

(iii) Si $A^2 - B < 0$ $(\lambda_1^\mathsf{J} = \bar{\lambda}_2^\mathsf{J} \in \mathbb{C})$: $\boxed{B \leq 1}$

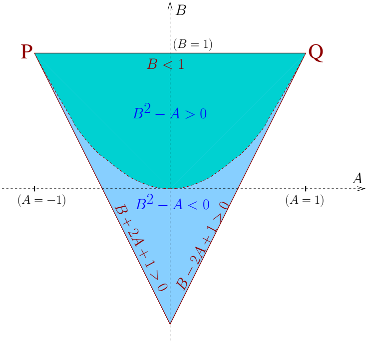
Analyse de stabilité : synthèse

- Domaine de stabilité défini par

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1-2A+B\geq 0 & A\neq\pm 1 \\ 1+2A+B\geq 0 & B\leq 1 \end{array}}$$

soit

$$\boxed{\begin{array}{c} \zeta^2\geq 0 \\ \gamma-1/2\geq 0 \\ 4+2(2\beta-\gamma)\omega_J^2\Delta t^2\geq 0 \end{array}}$$



Stabilité du schéma de Newmark.

Si $\gamma\geq 1/2$ et $2\beta-\gamma\geq 0$: **stabilité inconditionnelle** ;

Si $\gamma\geq 1/2$ et $2\beta-\gamma<0$: **stabilité conditionnelle**, le pas de temps devant vérifier

$$\boxed{\Delta t \overset{\text{déf}}{<=} \min_{J}\frac{1}{\omega_J}\frac{2}{\sqrt{2\gamma-4\beta}}}$$

Si $\gamma<1/2$: **instabilité**.

Interprétation de la condition de stabilité

- Pour les versions **conditionnellement stables** de Newmark, il faut vérifier

$$\Delta t \leq (\Delta t)_{\text{stab}} = \min_{\mathrm{J}} \frac{1}{\omega_{\mathrm{J}}} \frac{2}{\sqrt{2\gamma - 4\beta}}$$

- On peut montrer que

$$\max_{\mathrm{J}} \omega_{\mathrm{J}} = \bar{\omega} \frac{c}{h}$$

où $\bar{\omega}$: plus grande valeur propre d'un pb. aux valeurs propres **adimensionnel**.

- Par conséquent :

$$c\Delta t \leq Ch \qquad \text{avec} \quad C = \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{2}{\sqrt{2\gamma - 4\beta}}$$

- Interprétation : $(\Delta t)_{\text{stab}}$ correspond au temps nécessaire à une onde élastique pour traverser la fraction d'élément Ch

- Conséquence importante (coûts des calculs) : pour une version conditionnellement stable de Newmark, il faut ajuster Δt en proportion de h. **Un raffinement spatial implique un raffinement temporel.**

Plan

Analyse de cohérence

- **Définition** (cf. amphi 8) :

  Un schéma de la famille de Newmark est **cohérent** si toute solution $\{\mathbb{U}(t)\}$ de

  $$\boxed{[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}(t)\} + [\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}(t)\} = \{\mathbb{F}(t)\}}$$

  vérifie **à la limite** $\Delta t \to 0$ l'equation de transition en temps discret

  $$\boxed{\begin{Bmatrix} \mathbb{U}_{n+1} \\ \dot{\mathbb{U}}_{n+1} \end{Bmatrix} = [\mathbb{R}] \begin{Bmatrix} \mathbb{U}_n \\ \dot{\mathbb{U}}_n \end{Bmatrix} + \{\mathbb{Y}_n\}}$$

- **Vérification** par dévelopement de Taylor de $\{\mathbb{U}_{n+1}\}$, $\{\dot{\mathbb{U}}_{n+1}\}$, $\{\mathbb{F}_{n+1}\}$ en $t = t_n$: tous calculs faits, on trouve

$$\boxed{\text{Résidu de l'equation de transition} = \begin{Bmatrix} \Delta t^3 (\frac{1}{6} - \beta) \mathbb{M} \dddot{\mathbb{U}} \\ \Delta t^2 (\frac{1}{2} - \gamma) \mathbb{M} \dddot{\mathbb{U}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} o(\Delta t^3) \\ o(\Delta t^2) \end{Bmatrix}}$$

- Conclusion : **tous les schémas de la famille de Newmark sont cohérents.**

Plan

Précision

$$\text{Résidu de l'equation de transition} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta t^3 (\frac{1}{6} - \beta) \mathbb{M} \dddot{\mathbb{U}} \\ \Delta t^2 (\frac{1}{2} - \gamma) \mathbb{M} \dddot{\mathbb{U}} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} o(\Delta t^3) \\ o(\Delta t^2) \end{array} \right\}$$

- Suggère une précision **optimale** pour le choix

$$\beta = 1/6 \,, \quad \gamma = 1/2$$

Conditionnellement stable (critère $2\beta - \gamma \geq 0$ de stabilité inconditionnelle violé)

- Précision optimale compatible avec une stabilité **inconditionnelle** :

$$\boxed{\beta = 1/4 \,, \quad \gamma = 1/2}$$

Plan

Retour sur le schéma explicite des différences centrées

- On considère le schéma de Newmark avec $\beta = 0, \gamma = 1/2$
- Relations de Newmark sur $\{\mathbb{U}\}$ à t_{n+1} et t_n :

$$\{\mathbb{U}_{n+1}\} - 2\{\mathbb{U}_n\} + \{\mathbb{U}_{n-1}\} = \Delta t\big(\{\dot{\mathbb{U}}_n\} - \{\dot{\mathbb{U}}_{n-1}\}\big) + \frac{\Delta t^2}{2}\big(\{\ddot{\mathbb{U}}_n\} - \{\ddot{\mathbb{U}}_{n-1}\}\big)$$

Relations de Newmark sur $\{\dot{\mathbb{U}}\}$ à t_n :

$$\{\dot{\mathbb{U}}_n\} - \{\dot{\mathbb{U}}_{n-1}\} = \frac{\Delta t}{2}\big(\{\ddot{\mathbb{U}}_n\} + \{\ddot{\mathbb{U}}_{n-1}\}\big)$$

- En combinant les 2 identités, on retrouve l'**approximation de $\{\ddot{\mathbb{U}}_n\}$ par différences centrées** :

$$\boxed{\{\mathbb{U}_{n+1}\} - 2\{\mathbb{U}_n\} + \{\mathbb{U}_{n-1}\} = \Delta t^2\{\ddot{\mathbb{U}}_n\}}$$

Le schéma (explicite) des différences centrées est dans la famille Newmark avec

$$\boxed{\beta = 0, \gamma = 1/2}$$

Par conséquent, **stabilité conditionnelle** avec

$$\boxed{\Delta t < (\Delta t)_{\text{stab}} = \min_{J} \frac{2}{\omega_J}}$$

Plan

Bilan d'énergie totale pour les schémas de Newmark

- **Etude de la conservation de l'énergie totale :** une autre méthode pour analyser et comprendre les schémas numériques en dynamique.
- Analyse pour le système différentiel homogène (problème **conservatif**, temps **continu**)

$$\boxed{[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} + [\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}\} = \{0\}} \qquad \{\mathbb{U}_0\}, \{\dot{\mathbb{U}}_0\} \neq \{0\}$$

Multiplication à gauche par $\{\dot{\mathbb{U}}\}$ donne (théorème de l'énergie cinétique) :

$$\{\dot{\mathbb{U}}\}^\mathsf{T}[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} + \{\dot{\mathbb{U}}\}^\mathsf{T}[\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}\} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{W}(t) + \mathcal{K}(t)\right] = 0}$$

avec $\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2}\{\dot{\mathbb{U}}\}^\mathsf{T}[\mathbb{M}]\{\dot{\mathbb{U}}\} \qquad \mathcal{W}(t) = \frac{1}{2}\{\mathbb{U}\}^\mathsf{T}[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\}$

- Application au problème en **temps discret** :
évaluer la variation d'énergie totale entre deux instants discrets

$$\mathcal{W}(t_{n+1}) - \mathcal{W}(t_n) + \mathcal{K}(t_{n+1}) - \mathcal{K}(t_n)$$

(i) Si $[\mathcal{W}+\mathcal{K}](t_{n+1}) - [\mathcal{W}+\mathcal{K}](t_n) < 0$: **amortissement numérique** ;
(ii) Si $[\mathcal{W}+\mathcal{K}](t_{n+1}) - [\mathcal{W}+\mathcal{K}](t_n) > 0$: **amplification**, schéma **instable** ;
(iii) Si $[\mathcal{W}+\mathcal{K}](t_{n+1}) - [\mathcal{W}+\mathcal{K}](t_n) = 0$: schéma **conservatif**.

Bilan d'énergie totale pour les schémas de Newmark

- Variation d'énergie totale :

$$\boxed{[\mathcal{W}+\mathcal{K}](t_{n+1}) - [\mathcal{W}+\mathcal{K}](t_n) = 2\{\mathbb{U}_n\}_\mathsf{S}^\mathsf{T}[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}_n\}_\mathsf{D} + 2\{\dot{\mathbb{U}}_n\}_\mathsf{S}^\mathsf{T}[\mathbb{M}]\{\dot{\mathbb{U}}_n\}_\mathsf{D}}$$

avec $\quad \{\mathbb{X}_n\}_\mathsf{S} = \dfrac{1}{2}\big(\mathbb{X}_{n+1} + \mathbb{X}_n\big), \qquad \{\mathbb{X}_n\}_\mathsf{D} = \dfrac{1}{2}\big(\mathbb{X}_{n+1} - \mathbb{X}_n\big)$

- Reformulation en $\{\}_\mathsf{S}$, $\{\}_\mathsf{D}$ des relations de Newmark ;
  Report de ces relations dans la variation d'énergie ;
  Exploitation de $[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} + [\mathbb{K}]\{\ddot{\mathbb{U}}\} = \{0\}$

$\Longrightarrow$ **bilan d'énergie du schéma**

Bilan d'énergie totale pour les schémas de Newmark

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{E}(t_{n+1}) - \mathcal{E}(t_n) = 2(1-2\gamma)\{\mathbb{U}_n\}_{\mathrm{D}}^{\mathsf{T}}[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}_n\}_{\mathrm{D}} \\ + \Delta t^2(\gamma - 2\beta)(1-2\gamma)\{\ddot{\mathbb{U}}_n\}_{\mathrm{D}}^{\mathsf{T}}[\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}_n\}_{\mathrm{D}}\end{aligned}}$$

avec la notation $\boxed{\mathcal{E}(t) = \mathcal{W}(t) + \mathcal{K}(t) + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)\{\ddot{\mathbb{U}}(t)\}^{\mathsf{T}}[\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}(t)\}}$

(a) **Si** $\gamma = 1/2$ **: conservation de** $\mathcal{E}(t)$ **;**

(b) **Si** $\gamma \geq 1/2$ **et** $2\beta - \gamma = 0$ **:** énergie totale **décroissante**

$$\mathcal{W}(t_{n+1}) + \mathcal{K}(t_{n+1}) - \mathcal{W}(t_n) - \mathcal{K}(t_n) = 2(1-2\gamma)\{\mathbb{U}_n\}_{\mathrm{D}}^{\mathsf{T}}[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}_n\}_{\mathrm{D}} \leq 0$$

(c) **Si** $\gamma = 1/2$ **et** $\beta = 1/4$ **:** énergie totale **conservée.**

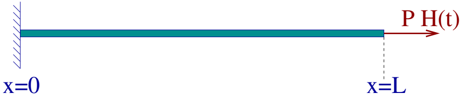
$$\mathcal{W}(t_{n+1}) + \mathcal{K}(t_{n+1}) - \mathcal{W}(t_n) - \mathcal{K}(t_n) = 0$$

(d) **Si** $\gamma > 1/2$ **et** $2\beta > \gamma$ (stabilité inconditionnelle) : **décroissance de** $\mathcal{E}(t)$ **;**

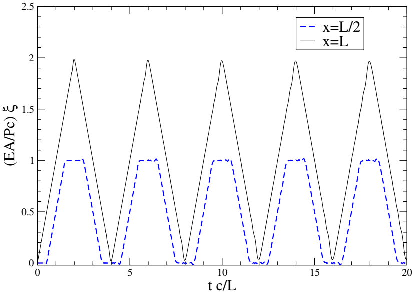
(e) **Si** $\gamma < 1/2$ (instabilité) : **divergence de** $\mathcal{E}(t)$**.**

Plan

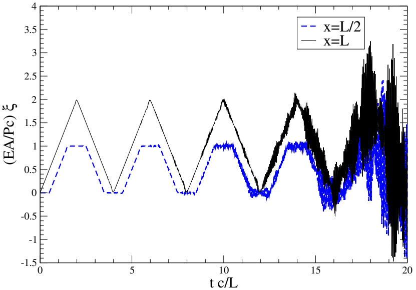
Barre élastique soumise à une force d'extrémité



Célérité des ondes de compression : $c = \sqrt{E/\rho}$



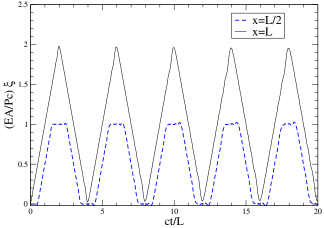
$(\beta, \gamma) = (1/4,\ 1/2)$
(inconditionnellement stable)



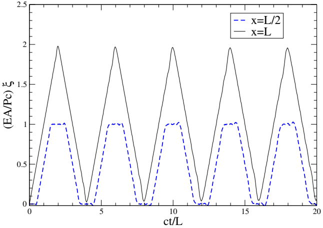
$(\beta, \gamma) = (1/4,\ 99/200)$
(instable)

Barre élastique soumise à une force d'extrémité

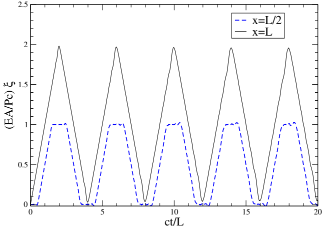
Cas explicite ($\beta = 0, \gamma = 1/2$), **conditionnellement** stable



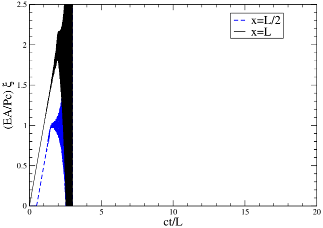
$\Delta t = 0,866(\Delta t)_{\text{stab}}$



$\Delta t = 0,9992(\Delta t)_{\text{stab}}$

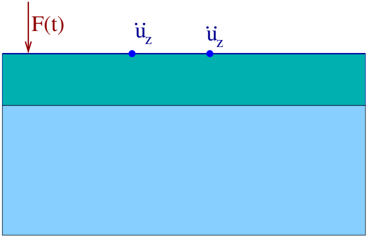


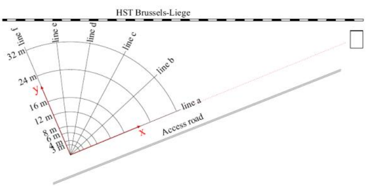
$\Delta t = 0,99976(\Delta t)_{\text{stab}}$



$\Delta t = 1,00034(\Delta t)_{\text{stab}}$

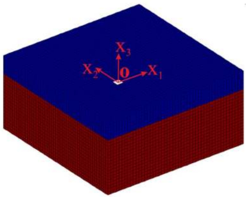
Ondes de surface dans un sol hétérogène

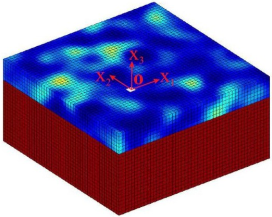




- Mesures selon le procédé SASW (Spectral Analysis of Surface Waves) ;
- Servent à estimer les propriétés mécaniques (célérité ondes P et S, masse volumique) du sous-sol (problème inverse) ;
- Modélisation de la propagation des ondes dans un sol de propriétés données : outil indispensable pour la comparaison aux expériences

Ondes de surface dans un sol hétérogène





Modèle numérique basé sur les **éléments finis spectraux**

- $48 \times 48 \times 24$ éléments (degré 6, 343 noeuds par élément)
- Schéma explicite des différences centrées (i.e. Newmark avec $\beta = 0, \gamma = 1/2$) ;
- 33 millions de DDLs, 30.000 pas de temps (respect de la condition de stabilité) ;
- 50 heures de calcul (15 processeurs en parallèle)

Calcul effectué par M. Arnst (doctorant ECP), code éléments finis spectraux réalisé à l'Institut de Physique du Globe de Paris (J.P. Villote)

[Homogène (plan horizontal)] [Homogène (plan vertical)]
[Hétérogène (plan horizontal)] [Hétérogène (plan vertical)]

Conclusion de l'amphi 9

- **Schémas numériques pour le calcul de la réponse dynamique de structures : famille de Newmark**
- **Analyse des principales caractéristiques des schémas** :
  - Stabilité (inconditionnelle ou conditionnelle selon les schémas)
  - Cohérence
  - Précision

  Choix de paramètres selon les critères de stabilité et de précision.
- **Schéma explicite** $(\beta = 0, \gamma = 1/2)$ **: rapide mais stabilité conditionnelle ;**
- **Schémas implicites inconditionnellement stables** $(\gamma \geq 1/2, 2\beta \geq \gamma)$ **:**
- **Notion de bilan énergétique pour la famille de Newmark.**
- **Extensions : dynamique des structures à comportement non linéaire :**
  - Rupture dynamique ;
  - Matériau à comportement non linéaire (élastoplastique, viscoplastique,...) ;
  - Contact unilatéral ;
  - Transformations finies ;

  Les schémas numériques d'intégration en temps fournissent un cadre de travail adapté à la prise en compte d'effets d'histoire

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html

Bilan

Concepts fondamentaux et leur application en élasticité linéaire statique

- Amphi 1 – Résolution approchée de problèmes d'équilibre en élasticité
- Amphi 2 – La notion d'élément fini isoparamétrique
- Amphi 3 – La méthode des éléments finis en élasticité linéaire
- Amphi 4 – Application à la mécanique linéaire de la rupture

Régime non-linéaire, application aux solides élastoplastiques

- Amphi 5 – Calcul de solides à comportement non-linéaire
- Amphi 6 – Calcul de solides élastoplastiques 1 : aspects locaux
- Amphi 7 – Calcul de solides élastoplastiques 2 : aspects globaux

Régime linéaire, avec évolution temporelle

- Amphi 8 – Evolution thermique et thermoélasticité linéaire quasistatique
- Amphi 9 – Analyse dynamique des structures élastiques

www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/enseignement.html