

COURS D'ANALYSE DES STRUCTURES MÉCANIQUES PAR LA MÉTHODE DES ELEMENTS FINIS
(MEC 568)

contrôle non classant (29 mars 2005, 2 heures)

Documents autorisés : polycopié ; documents et notes de PC

Sujet proposé par Marc BONNET

Les trois exercices sont indépendants. Ils sont placés dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Le comportement est élastique linéaire et isotrope (exercices 1 et 3) ou élastoplastique (exercice 2), la partie élastique étant également linéaire et isotrope.

Exercice 1 : Dynamique d'une barre rectiligne

On considère une barre élastique rectiligne, de forme cylindrique (section droite A uniforme) et de longueur ℓ grande devant le diamètre de la section. Le solide est ainsi suffisamment allongé pour que son état mécanique soit traité dans le cadre d'une modélisation monodimensionnelle.

Dans cet exercice, seuls les mouvements de traction-compression de la barre sont envisagés, dans le cadre de la dynamique (les effets d'inertie ne sont donc **pas** négligés). Ces mouvements sont tels que tout point \underline{x} initialement situé sur la section $S(x)$ est animé d'un déplacement

$$\underline{\xi}(\underline{x}, t) = \xi(x, t)\underline{e}_x$$

l'abscisse x étant mesurée le long de l'axe de la barre, et \underline{e}_x étant un vecteur unitaire de cet axe (on néglige ainsi les variations de section par effet Poisson). On fait les hypothèses cinématiques suivantes concernant le mouvement de la barre :

(a) *Repos initial* : la barre est initialement au repos, soit :

$$\xi(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad (\text{conditions initiales})$$

(b) *Encastrement de l'extrémité droite* : l'extrémité droite est bloquée, soit

$$\xi(\ell, t) = 0 \quad (\text{conditions aux limites (cinématique)})$$

Les efforts intérieurs associés à ces mouvements sont décrits en terme d'*effort normal* ressenti par la section droite $S(x)$:

$$N(x, t) = \int_{S(x)} \sigma_{xx}(x, y, z, t) \, dy \, dz$$

On se place dans le cadre élastique linéaire HPP isotherme, de sorte que $N(x, t)$ et $\xi(x, t)$ sont reliés par la relation

$$N(x, t) = EA \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \quad (\text{comportement + compatibilité})$$

où E est le module de Young (constant) du matériau. Enfin, on suppose l'absence de tout effort réparti, de sorte que l'équilibre dynamique de la barre se traduit (on l'admettra sans démonstration) par l'équation

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, t) - \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (\text{équilibre dynamique})$$

où ρ est la masse linéique constante de la barre. Enfin, on suppose un effort normal $Q(t)$ **connu** imposé à l'extrémité gauche de la barre, soit

$$N(0, t) = -Q(t) \quad (\text{conditions aux limites (dynamique)})$$

1. *Formulation faible.* Etablir la formulation faible dont la fonction $\xi(x, t)$ est solution, basée sur l'utilisation de fonctions test $w(x)$ correspondant à des champs virtuels $w(x)_{e_x}$ **cinématiquement admissibles à zéro**.
2. *Semi-discrétisation en espace.* L'intervalle $x \in [0, \ell]$ est divisé en N_E éléments, sous la forme de segments de longueur identique $\Delta x = \ell/N_E$. Les $N_N = N_E + 1$ nœuds sont définis par les abscisses

$$x^{(1)} = 0, \quad x^{(2)} = \Delta x, \quad \dots, \quad x^{(n)} = (n-1)\Delta x, \quad \dots, \quad x^{(N_N)} = N_E \Delta x = \ell$$

de sorte que l'élément générique, de numéro e , soit le segment dont les extrémités sont les deux nœuds $x^{(e)}$ et $x^{(e+1)}$ (en numérotation globale), numérotés 1 et 2 en numérotation locale. L'approximation ξ_h du déplacement inconnu ξ sur l'élément est construite par interpolation linéaire des valeurs nodales.

- (i) Donner les fonctions d'interpolation $N_1(a)$ et $N_2(a)$ associées à l'interpolation linéaire par élément, l'élément de référence étant défini par $-1 \leq a \leq 1$. Exprimer $\xi_h(x, t)$ et $\partial \xi_h / \partial x(x, t)$ sur un élément générique en fonction de a et des valeurs nodales $\xi^{(1)}(t), \xi^{(2)}(t)$ sur l'élément. Donner le jacobien dx/da .
- (ii) Formuler la matrice de rigidité élémentaire $[\mathbb{K}_e]$ d'un élément générique. Montrer que $[\mathbb{K}_e]$ est identique pour tous les éléments. Calculer explicitement $[\mathbb{K}_e]$.
- (iii) Formuler la matrice de masse élémentaire $[\mathbb{M}_e]$ d'un élément générique. Montrer que $[\mathbb{M}_e]$ est identique pour tous les éléments. Calculer explicitement $[\mathbb{M}_e]$.
- (iv) Donner la forme des matrices globales de rigidité $[\mathbb{K}]$ et de masse $[\mathbb{M}]$. Préciser en particulier leur dimension. Préciser la définition du vecteur $\{\mathbb{U}\}$ des valeurs nodales inconnues du déplacement.
- (v) Donner l'expression du vecteur $\{\mathbb{F}(t)\}$ des efforts généralisés, de sorte que la dynamique de la barre soit gouvernée par le système d'équations différentielles

$$[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}(t)\} + [\mathbb{M}]\{\ddot{\mathbb{U}}(t)\} = \{\mathbb{F}(t)\}$$

3. *Condition de stabilité pour l'intégration en temps.* On procède maintenant à une discrétisation temporelle, par pas de temps constant Δt , à partir de l'instant initial $t_0 = 0$. Il a été vu en cours que certains des schémas d'intégration en temps applicables à la dynamique des structures sont conditionnellement stables, le pas de temps devant vérifier

$$\Delta t \leq (\Delta t)_{\text{stab}}$$

la valeur du pas de temps critique $(\Delta t)_{\text{stab}}$ dépendant en particulier du schéma. On considère ici le schéma explicite fondé sur les différences centrées (i.e. Newmark avec $\beta = 0, \gamma = 1/2$), le pas de temps critique $(\Delta t)_{\text{stab}}$ étant alors (chapitre 9) donné par

$$(\Delta t)_{\text{stab}} = \frac{2}{\omega_{\max}}$$

où $\omega_{\max} > 0$ est la plus grande valeur propre du problème aux valeurs propres généralisé $[\mathbb{K}]\{\mathbb{X}\} - \omega^2[\mathbb{M}]\{\mathbb{X}\} = \{0\}$. On admettra par ailleurs, sans chercher à le démontrer, le résultat de majoration suivant, faisant intervenir le problème aux valeurs propres généralisé **sur un élément fini considéré isolément**, plus simple :

$$\omega_{\max} \leq \omega_{\text{maj}}, \quad \text{avec} \quad \omega_{\text{maj}} = \max(\omega), \quad \omega \text{ solution de } [\mathbb{K}_e]\{\mathbb{X}_e\} - \omega^2[\mathbb{M}_e]\{\mathbb{X}_e\} = \{0\}$$

- (i) Montrer que la détermination de ω_{maj} permet de déterminer un ensemble de valeurs de Δt pour lesquelles la stabilité de l'algorithme est assurée.
- (ii) Calculer ω_{maj} pour le problème dynamique de la barre et sa discrétisation considérés ici, et évaluer le minorant de $(\Delta t)_{\text{stab}}$ obtenu. D'après ce résultat, quel est l'effet d'un raffinement spatial du maillage sur $(\Delta t)_{\text{stab}}$?
- (iii) Même question que ci-dessus si on opère une condensation de masse, la matrice de masse élémentaire étant remplacée par une approximation diagonale $[\tilde{\mathbb{M}}_e]$ qui conserve la masse totale de chaque élément ; donner $[\tilde{\mathbb{M}}_e]$, et calculer le minorant de $(\Delta t)_{\text{stab}}$ obtenu.
- (iv) Sachant (on l'admettra) que la célérité des ondes de compression dans une barre élastique est $c = (EA/\rho)^{1/2}$, interpréter la condition trouvée au (iii) ci-dessus.

Exercice 2 : Intégration numérique du comportement élastoplastique avec écrouissage cinématique

On considère un matériau à comportement élastoplastique, avec les hypothèses suivantes : domaine d'élasticité défini par le critère de von Mises, écoulement plastique obéissant à la règle de normalité. On suppose que le matériau présente un *écrouissage purement cinématique*, de sorte que le critère de von Mises s'écrit

$$f(\underline{\underline{\sigma}}; \underline{\underline{X}}) \leq 0, \quad \text{avec } f(\underline{\underline{\sigma}}; \underline{\underline{X}}) = (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})^{\text{eq}} - \sigma_0$$

où $(\underline{\underline{Y}})^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \|\underline{\underline{Y}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{Y}}) \underline{\underline{1}}\|}$ est la définition habituelle de la contrainte équivalente scalaire associée à un tenseur de contrainte $\underline{\underline{Y}}$, et $\underline{\underline{X}}$ est une variable tensorielle purement déviatorique (c'est-à-dire telle que $\text{Tr}(\underline{\underline{X}}) = 0$), appelée *variable d'écrouissage cinématique*, qui définit le centre du domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes déviatoriques. La contrainte seuil σ_0 est supposée *constante*. Il faut par ailleurs postuler une loi d'évolution pour la variable d'écrouissage cinématique. L'évolution de $\underline{\underline{X}}$ est ici gouvernée par la loi

$$\dot{\underline{\underline{X}}} = 2C \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}}$$

où le scalaire $2C$, supposé connu, est le module d'écrouissage cinématique du matériau. L'ensemble des relations définissant le comportement élastoplastique avec écrouissage cinématique considéré est ainsi

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}) && \text{partie élastique linéaire} \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}} &= \dot{p} \frac{3}{2\alpha^{\text{eq}}} \underline{\underline{\alpha}} \quad \dot{p} \geq 0 \quad \alpha^{\text{eq}} - \sigma_0 \leq 0 \quad \dot{p}[\alpha^{\text{eq}} - \sigma_0] = 0 && \text{règle de normalité, seuil} \\ \dot{\underline{\underline{X}}} &= 2C \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}} && \text{évolution de l'écrouissage} \end{aligned}$$

où $\underline{\underline{e}}$ est le déviateur de déformation, κ est le module de compressibilité isotrope, μ le module de cisaillement, et \dot{p} est la vitesse de déformation plastique cumulée, définie par $\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \|\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\text{P}}\|}$. On a de plus introduit les notations $\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}$ et $\alpha^{\text{eq}} = (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})^{\text{eq}}$.

L'objet de cet exercice est de définir un algorithme de type retour radial, permettant l'intégration en temps discret de ce modèle de comportement, en suivant la démarche développée dans le cours pour le cas de l'écrouissage purement isotrope. Une discrétisation en temps ayant été introduite, on cherche donc à établir, pour un pas de temps générique défini par les instants initial t_n et final t_{n+1} , l'expression de la contrainte finale $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ et des autres variables à l'instant t_{n+1} , en fonction des valeurs des variables mécaniques à l'instant t_n supposées connues et en supposant que l'élément de matière subit entre les instants t_n et t_{n+1} un incrément de déformation $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n$ **donné**. On se place à l'échelle spatiale d'un petit élément de matière, de sorte que toutes les variables mécaniques de type déformation ou contrainte soient supposées *homogènes* (i.e. indépendantes de la position \underline{x}).

1. *Relations de comportement en temps discret*. On approche les vitesses dans les relations de comportement par différences finies *implicites*, c'est-à-dire en posant

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{n+1}^{\text{P}} \approx \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}} / \Delta t, \quad \dot{\underline{\underline{X}}}_{n+1} \approx \Delta \underline{\underline{X}}_n / \Delta t, \quad \dot{p}_{n+1} \approx \Delta p_n / \Delta t$$

avec la convention de notation du cours $\Delta(\cdot)_n = (\cdot)_{n+1} - (\cdot)_n$. Ecrire l'ensemble des relations de comportement exprimées à l'instant t_{n+1} , compte tenu de cette approximation des vitesses.

2. On définit le *prédicteur élastique de contrainte* $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{elas}}$ par

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{\underline{\sigma}}_n + \kappa \text{Tr}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n) + 2\mu \Delta \underline{\underline{e}}_n \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{\underline{s}}_n + 2\mu \Delta \underline{\underline{e}}_n$$

où $\underline{\underline{s}}$ est le déviateur de contrainte et $\Delta \underline{\underline{e}}_n$ est le déviateur de $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n$.

On se place dans la situation où le prédicteur $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{elas}}$ **n'est pas plastiquement admissible** :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{elas}}; \underline{\underline{X}}_n) = \alpha_{n+1}^{\text{elas,eq}} - \sigma_0 > 0 \quad \text{avec} \quad \alpha_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} - \underline{\underline{X}}_n$$

(bien noter que le critère a été ici évalué **pour $\underline{\underline{X}}$ figé à la valeur $\underline{\underline{X}}_n$** , afin de tester l'hypothèse d'une évolution purement élastique). Le prédicteur élastique ne donne donc pas la solution correcte à t_{n+1} .

A l'aide des relations de comportement en temps discret établies en 1, procéder aux étapes suivantes :

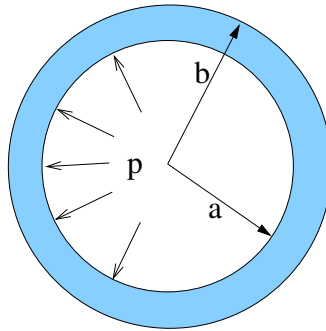
- (i) Ecrire \underline{s}_{n+1} en fonction de $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$ et $\Delta \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}$.
- (ii) En déduire une relation entre $\underline{\alpha}_{n+1}$, $\underline{\alpha}_{n+1}^{\text{elas}}$, α_{n+1}^{eq} et Δp_n .
- (iii) Déduire de cette relation que $\underline{\alpha}_{n+1}$ et $\underline{\alpha}_{n+1}^{\text{elas}}$ sont proportionnels.
- (iv) Etablir à l'aide de ce qui précède la relation

$$\underline{\alpha}_{n+1} = \left(1 - 3(\mu + C) \frac{\Delta p_n}{\alpha_{n+1}^{\text{elas,eq}}}\right) \underline{\alpha}_{n+1}^{\text{elas}}$$

- (v) A l'aide de la condition de cohérence, établir l'expression de Δp_n en fonction de $\Delta \underline{\varepsilon}_n$ et de grandeurs à l'instant t_n .
- (vi) Déduire l'expression recherchée de la contrainte $\underline{\sigma}_{n+1}$ à l'instant final.

Exercice 3 : Modèle approché de réservoir sphérique sous pression

On étudie dans cet exercice l'équilibre d'un réservoir sphérique de centre l'origine O des coordonnées, de rayons intérieur a et extérieur b , renfermant un fluide sous pression uniforme p . On néglige la pression atmosphérique et toute autre forme de sollicitation ; en particulier la paroi externe $r = b$ est libre de contraintes. Le matériau constitutif du réservoir est élastique linéaire isotrope, et on se place dans le cadre HPP habituel et dans les conditions de l'équilibre.



Ce problème (très classique !) présente une symétrie sphérique. Désignant par r, θ, φ les coordonnées sphériques de centre O, le déplacement $\underline{\xi}$ et la déformation $\underline{\varepsilon}$ sont de la forme

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \xi(r) \underline{e}_r, \quad \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \xi'(r) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\xi(r)}{r} [\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi]$$

(où $(\cdot)'$ désigne la dérivation par rapport à r) et on prendra comme inconnue principale la fonction $\xi(r)$, composante radiale du déplacement. On s'intéresse dans cet exercice à la résolution *approchée* de l'équilibre du réservoir reposant sur l'approximation de $\xi(r)$ par une fonction linéaire.

1. *Relation de comportement en notation matricielle.* Donner, en fonction des modules d'élasticité λ, μ , la matrice $[A]$ telle que

$$\{\sigma(r)\} = [A] \{\varepsilon(r)\} \quad \text{avec} \quad \{\sigma(r)\} = \{\sigma_{rr} \ \sigma_{\theta\theta} \ \sigma_{\varphi\varphi}\}^T, \quad \{\varepsilon(r)\} = \{\varepsilon_{rr} \ \varepsilon_{\theta\theta} \ \varepsilon_{\varphi\varphi}\}^T$$

2. *Formulation faible du problème d'équilibre.* On rappelle que, dans les conditions de symétrie et de sollicitations considérées ici, l'équilibre est gouverné par l'équation de champ et les conditions aux limites

$$\sigma'_{rr} - \frac{1}{r} [2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}] = 0 \quad (a \leq r \leq b); \quad \sigma_{rr}(a) = -p, \quad \sigma_{rr}(b) = 0$$

Multiplier l'équation de champ par une fonction test $w(r)$, et établir par intégration sur la sphère la formulation faible équivalente à l'ensemble des conditions d'équilibre ci-dessus (on rappelle que, dans les conditions présentes, l'élément de volume est $dV = 4\pi r^2 dr$).

3. *Approximation par un élément fini à interpolation linéaire.* On remplace l'inconnue $\xi(r)$ par une approximation $\xi_h(r)$ à variation *linéaire* dans l'épaisseur.

(i) Ecrire $\xi_h(r)$ en fonction des valeurs nodales $\xi^{(1)} = \xi_h(a)$ et $\xi^{(2)} = \xi_h(b)$ et de r, a, b .

On notera dans la suite par $\{\mathbb{U}\}$ le vecteur $\{\xi^{(1)} \ \xi^{(2)}\}^T$.

(ii) Donner l'expression de la matrice $[\tilde{B}(r)]$ telle que

$$r\{\varepsilon(r)\} = [\tilde{B}(r)]\{\mathbb{U}\}$$

(iii) On restreint la formulation faible aux champs virtuels $w(r)$ linéaires dans l'épaisseur. Montrer que la formulation faible conduit à un système d'équations de la forme

$$[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} = \{\mathbb{F}\}$$

Calculer $\{\mathbb{F}\}$ en fonction des données. Ecrire la matrice de rigidité $[\mathbb{K}]$ sous la forme d'une intégrale faisant intervenir $[\tilde{B}(r)]$ et $[A]$.

(iv) **Question hors barème (bonus) :** Calculer complètement $[\mathbb{K}]$ et déterminer la solution approchée ξ_h . Comparer cette solution à la solution exacte donnée par (cours de Mécanique des Milieux Continus)

$$\xi^{\text{exact}}(r) = \frac{pa^3}{b^3 - a^3} \left(\frac{r}{3\lambda + 2\mu} + \frac{b^3}{4\mu r^2} \right)$$

CORRIGÉ

Exercice 1 : Dynamique d'une barre rectiligne

1. *Formulation faible.* Celle-ci résulte de l'intégration sur $x \in [0, \ell]$ de l'équation d'équilibre dynamique multipliée par une fonction-test $w(x)$:

$$\int_0^\ell \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x, t) - \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) \right) w(x) dx = 0 \quad \forall w \in \mathcal{C}(0)$$

L'intégration par parties du premier terme conduit alors, à l'aide des conditions $w(\ell) = 0$ (w étant supposé cinématiquement admissible à zéro) et $N(0, t) = -Q(t)$ (effort normal appliqué) et des relations de comportement et de compatibilité, à la formulation faible :

trouver ξ , $\xi(\ell, t) = 0$

$$\int_0^\ell \left(EA \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}(x) + \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) w(x) \right) dx = Q(t)w(0) \quad (\forall w, w(\ell) = 0)$$

2. *Semi-discrétisation en espace.*

(i) Les fonctions d'interpolation sont

$$N_1(a) = \frac{1}{2}(1 - a) \quad N_2(a) = \frac{1}{2}(1 + a)$$

L'abscisse d'un point de l'élément numéro e est représentée par

$$x = N_1(a)x^{(e)} + N_2(a)x^{(e+1)}$$

Le jacobien de l'élément e vaut

$$J(a) = \frac{dx}{da} = \frac{1}{2}(x^{(e+1)} - x^{(e)}) \frac{\Delta x}{2}$$

et est indépendant de l'élément. L'interpolation de ξ_h et de sa dérivée sont :

$$\xi_h(x, t) = N_1(a)\xi^{(1)}(t) + N_2(a)\xi^{(2)}(t), \quad \frac{\partial \xi_h}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{\Delta x}(\xi^{(2)}(t) - \xi^{(1)}(t))$$

- (ii) Les champs virtuels w étant également choisis linéaires par morceaux, la matrice de rigidité élémentaire $[\mathbb{K}_e]$ est définie par

$$\{\mathbb{W}_e\}^T [\mathbb{K}_e] \{\mathbb{U}_e(t)\} = \int_{x^{(e)}}^{x^{(e+1)}} EA \frac{\partial \xi_h}{\partial x}(x, t) \frac{\partial w_h}{\partial x}(x) dx$$

Comme l'interpolation linéaire des déplacements conduit à des dérivées spatiales constantes, on obtient

$$\{\mathbb{W}_e\}^T [\mathbb{K}_e] \{\mathbb{U}_e\} = \frac{EA}{\Delta x} (w^{(2)} - w^{(1)}) (\xi^{(2)}(t) - \xi^{(1)}(t))$$

relation qui est indépendante de l'élément, soit, après identification

$$[\mathbb{K}_e] = \frac{EA}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (iii) La matrice de masse élémentaire est définie par

$$\{\mathbb{W}_e\}^T [\mathbb{M}_e] \{\ddot{\mathbb{U}}_e(t)\} = \int_{x^{(e)}}^{x^{(e+1)}} \rho \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial t^2}(x, t) w_h(x) dx$$

Exprimée avec la coordonnée paramétrique a , cette définition devient

$$\{\mathbb{W}_e\}^T [\mathbb{M}_e] \{\ddot{\mathbb{U}}_e(t)\} = \frac{\rho \Delta x}{2} \int_{-1}^1 (N_1(a)w^{(1)} + N_2(a)w^{(2)}) (N_1(a)\ddot{\xi}^{(1)}(t) + N_2(a)\ddot{\xi}^{(2)}(t)) da$$

Un calcul élémentaire donne

$$\int_{-1}^1 N_1(a)N_1(a) da = \int_{-1}^1 N_2(a)N_2(a) da = \frac{2}{3}, \quad \int_{-1}^1 N_1(a)N_2(a) da = \frac{1}{3}$$

On obtient donc, pour tout élément, la matrice de masse élémentaire

$$[\mathbb{M}_e] = \frac{\rho \Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (iv) Les matrices globales sont obtenues par assemblage des matrices élémentaires. Compte tenu du fait que le déplacement est imposé à l'extrémité $x = \ell$, les matrices globales $[\mathbb{K}]$ et $[\mathbb{M}]$ obtenues après assemblage sont des matrices tridiagonales de dimension N_E , données par

$$[\mathbb{K}] = \frac{EA}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad [\mathbb{M}] = \frac{\rho \Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Le vecteur global des inconnues $\{\mathbb{U}(t)\}$, de longueur N_E , exclut le nœud d'extrémité droite et est donc défini par

$$\{\mathbb{U}(t)\} = \{\xi^{(1)}(t), \dots, \xi^{(N_E)}(t)\}^T$$

- (v) Le vecteur global des forces généralisées, de longueur N_E , est donné par

$$\{\mathbb{F}(t)\} = Q(t)\{1 \ 0 \ \dots \ 0\}^T$$

3. Condition de stabilité pour l'intégration en temps.

- (i) Puisque $\omega_{\text{maj}} \geq \omega_{\text{max}}$, tout choix de Δt tel que

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\text{maj}}}$$

conduit à un schéma stable.

- (ii) Avec les matrices élémentaires établies aux 2-(ii) et 2-(iii), ω_{maj} est trouvé par résolution du problème aux valeurs propres généralisé

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \chi^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \chi^2 = \frac{\rho \Delta x^2}{6EA} \omega^2$$

L'équation caractéristique s'écrit

$$P(\chi^2) = 0 = \text{Det} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \chi^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 3\chi^4 - 6\chi^2$$

soit $\chi^2 = 0$ (qui correspond au mode de translation de l'élément de barre) et $\chi^2 = 2$, qui donne

$$\omega_{\text{maj}}^2 = \frac{12EA}{\rho \Delta x^2} \quad \text{soit} \quad (\Delta t)_{\text{stab}} \geq \Delta x \left(\frac{\rho}{3EA} \right)^{1/2}$$

Ce résultat suggère en particulier que $(\Delta t)_{\text{stab}}$ est proportionnel à Δx : un raffinement du maillage nécessite pour garantir la stabilité du schéma une diminution du pas de temps Δt dans la même proportion.

(iii) La condensation de masse conduit à remplacer $[\mathbb{M}_e]$ par l'approximation

$$[\tilde{\mathbb{M}}_e] = \frac{\rho \Delta x}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et ω_{maj} est trouvé par résolution du problème aux valeurs propres

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \chi^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \chi^2 = \frac{\rho \Delta x^2}{2EA} \omega^2$$

L'équation caractéristique est cette fois

$$\tilde{P}(\chi^2) = \chi^4 - 2\chi^2 = 0$$

qui conduit à

$$\omega_{\text{maj}}^2 = \frac{4EA}{\rho \Delta x^2} \quad \text{soit} \quad (\Delta t)_{\text{stab}} \geq \Delta x \left(\frac{\rho}{EA} \right)^{1/2}$$

(iv) Les conditions, exprimées dans les deux cas en termes de c , deviennent

$$(\Delta t)_{\text{stab}} \geq \frac{\Delta x}{c\sqrt{3}} \quad (\text{masse non condensée}), \quad (\Delta t)_{\text{stab}} \geq \frac{\Delta x}{c} \quad (\text{masse condensée})$$

L'interprétation du deuxième cas est particulièrement simple : la stabilité du schéma d'intégration explicite est garantie si la distance parcourue pendant le temps Δt par une onde de compression est inférieure à une longueur d'élément, Δx .

Exercice 2 : Intégration numérique du comportement élastoplastique avec écoulement cinématique

1. *Relations de comportement en temps discret* : avec les hypothèses et approximations proposées, on obtient les relations d'évolution en temps discret

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} &= \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}) + 2\mu(\underline{\underline{e}}_{n+1} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{\text{P}}) && \text{partie élastique linéaire} \\ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}} &= \Delta p_n \frac{3}{2\alpha_{n+1}^{\text{eq}}} \underline{\underline{\alpha}}_{n+1} \quad \Delta p_n \geq 0 \quad \alpha_{n+1}^{\text{eq}} - \sigma_0 \leq 0 \quad \Delta p_n [\alpha_{n+1}^{\text{eq}} - \sigma_0] = 0 && \text{règle de normalité, seuil} \\ \Delta \underline{\underline{X}}_n &= 2C \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}} && \text{évolution de l'écrouissage} \end{aligned}$$

2. *Construction de l'algorithme de retour radial* :

(i) A priori, $\underline{\underline{s}}_{n+1}$ est donné à l'aide de la partie élastique linéaire par

$$\underline{\underline{s}}_{n+1} = 2\mu(\underline{\underline{e}}_{n+1} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{\text{P}})$$

Compte tenu de $\underline{\underline{e}}_{n+1} = \underline{\underline{e}}_n + \Delta \underline{\underline{e}}_n$ et de la définition du prédicteur élastique, on a

$$\begin{aligned} \underline{\underline{s}}_{n+1} &= 2\mu(\underline{\underline{e}}_n - \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}}) + 2\mu(\Delta \underline{\underline{e}}_n - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}}) = \underline{\underline{s}}_n + 2\mu \Delta \underline{\underline{e}}_n - 2\mu \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}} \\ &= \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} - 2\mu \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}} \end{aligned} \quad (\text{a})$$

(ii) Retranchons $\underline{\underline{X}}_{n+1}$ aux deux membres de (a), ce qui donne

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\alpha}}_{n+1} &= \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} - \underline{\underline{X}}_{n+1} - 2\mu \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}} = \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} - \underline{\underline{X}}_n - \Delta \underline{\underline{X}}_n - 2\mu \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}} \\ &= \underline{\underline{\alpha}}_{n+1}^{\text{elas}} - \Delta \underline{\underline{X}}_n - 2\mu \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}} \end{aligned}$$

(attention à la définition de $\underline{\alpha}_{n+1}^{\text{elas}}$, le prédicteur élastique correspondant à une surface seuil *figée* dans son état à l'instant t_n). En reportant alors la loi d'évolution de \underline{X} et la règle de normalité (sous leurs formes discrètes en temps) dans le résultat précédent, on obtient la relation demandée :

$$\underline{\alpha}_{n+1} = \underline{\alpha}_{n+1}^{\text{elas}} - 2(\mu + C)\Delta\varepsilon_n^{\text{P}} = \underline{\alpha}_{n+1}^{\text{elas}} - 3(\mu + C)\frac{\Delta p_n}{\alpha_{n+1}^{\text{eq}}}\underline{\alpha}_{n+1} \quad (\text{b})$$

(iii) En mettant la relation précédente (b) sous la forme

$$\left(1 + 3(\mu + C)\frac{\Delta p_n}{\alpha_{n+1}^{\text{eq}}}\right)\underline{\alpha}_{n+1} = \underline{\alpha}_{n+1}^{\text{elas}}$$

on voit clairement que les tenseurs $\underline{\alpha}_{n+1}$ et $\underline{\alpha}_{n+1}^{\text{elas}}$ sont proportionnels. De plus, le facteur de proportionnalité est nécessairement positif en raison de l'inégalité $\Delta p_n \geq 0$.

(iv) Le résultat précédent entraîne l'égalité

$$\frac{1}{\alpha_{n+1}^{\text{eq}}}\underline{\alpha}_{n+1} = \frac{1}{\alpha_{n+1}^{\text{elas,eq}}}\underline{\alpha}_{n+1}^{\text{elas}} \quad (\text{c})$$

tout tenseur de la forme $(\alpha^{\text{eq}})^{-1}\underline{\alpha}$ étant de norme $\sqrt{2/3}$ par définition de la contrainte équivalente. Cette égalité, reportée au second membre de (b), conduit à l'expression explicite de $\underline{\alpha}_{n+1}$ demandée :

$$\underline{\alpha}_{n+1} = \left(1 - 3(\mu + C)\frac{\Delta p_n}{\alpha_{n+1}^{\text{elas,eq}}}\right)\underline{\alpha}_{n+1}^{\text{elas}} \quad (\text{d})$$

(v) La condition de cohérence consiste à imposer la vérification du critère à l'instant final. Comme l'évolution de la contrainte au cours du pas de temps est plastique (le prédicteur élastique n'étant pas plastiquement admissible), il faut vérifier

$$\alpha_{n+1}^{\text{eq}} - \sigma_0 = 0$$

Cette condition, appliquée à $\underline{\alpha}_{n+1}$ donné par (d), conduit à

$$\alpha_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3(\mu + C)\Delta p_n - \sigma_0 = 0$$

ce qui permet d'exprimer Δp_n de la façon demandée :

$$\Delta p_n = \frac{\alpha_{n+1}^{\text{elas,eq}} - \sigma_0}{3(\mu + C)} \quad (\text{e})$$

On note que $\alpha_{n+1}^{\text{elas,eq}} - \sigma_0 > 0$ par hypothèse de non-admissibilité plastique du prédicteur élastique, et donc que $\Delta p_n > 0$ est bien vérifié. On note également, *a posteriori*, que la quantité entre parenthèses dans l'expression (d) est bien positive, propriété qui a été utilisée lors du passage à la contrainte équivalente.

(vi) A partir du résultat précédent et avec l'aide de (c), la règle de normalité en temps discret donne

$$\Delta\varepsilon_n^{\text{P}} = \frac{1}{2(\mu + C)}\frac{\alpha_{n+1}^{\text{elas,eq}} - \sigma_0}{\alpha_{n+1}^{\text{elas,eq}}}\underline{\alpha}_{n+1}^{\text{elas}}$$

relation qui permet en particulier d'actualiser \underline{X} . La partie élastique linéaire du comportement donne alors l'actualisation demandée de $\underline{\sigma}$:

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - 2\mu\Delta\varepsilon_n^{\text{P}} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - \frac{\mu}{\mu + C}\frac{\alpha_{n+1}^{\text{elas,eq}} - \sigma_0}{\alpha_{n+1}^{\text{elas,eq}}}\underline{\alpha}_{n+1}^{\text{elas}}$$

Exercice 3 : Modèle approché de réservoir sphérique sous pression

1. *Relation de comportement en notation matricielle.* C'est ici la simple traduction des relations

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + 2\mu\varepsilon_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}\end{aligned}$$

qui conduit donc à poser

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}$$

2. *Formulation faible du problème d'équilibre.* La multiplication de l'équation sde champ par $w(r)$ et l'intégration sur la sphère (avec $dV = 4\pi r^2 dr$) conduit à écrire

$$4\pi \int_a^b [r^2 \sigma'_{rr} + r(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})] w(r) dr = 0 \quad \forall w \in \mathcal{C}$$

Ensuite, une intégration par parties du terme en σ'_{rr} donne, compte tenu des conditions aux limites $\sigma_{rr}(a) = -p$ et $\sigma_{rr}(b) = 0$:

$$4\pi \int_a^b [r^2 \sigma_{rr} w' + r(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}) w] dr = 4\pi a^2 w(a) p \quad \forall w \in \mathcal{C}$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$4\pi \int_a^b r^2 [\sigma_{rr} \varepsilon[w]_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon[w]_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi} \varepsilon[w]_{\varphi\varphi}] dr = 4\pi a^2 w(a) p \quad \forall w \in \mathcal{C}$$

3. *Approximation par un élément fini à interpolation linéaire.*

(i) L'interpolation linéaire des valeurs nodales $\xi^{(1)} = \xi_h(a)$ et $\xi^{(2)} = \xi_h(b)$ peut être mise sous la forme

$$\xi_h(r) = \frac{b-r}{b-a} \xi^{(1)} + \frac{r-a}{b-a} \xi^{(2)}$$

(ii) Par suite, on a :

$$\begin{aligned}r\varepsilon_{rr} &= r\xi'_h = \frac{r}{b-a} (\xi^{(2)} - \xi^{(1)}) \\ r\varepsilon_{\theta\theta} &= \xi_h = \frac{b-r}{b-a} \xi^{(1)} + \frac{r-a}{b-a} \xi^{(2)} = r\varepsilon_{\varphi\varphi}\end{aligned}$$

Par identification, la matrice demandée $[\tilde{B}(r)]$ est donc

$$[\tilde{B}(r)] = \frac{1}{b-a} \begin{bmatrix} r & -r \\ b-r & r-a \\ b-r & r-a \end{bmatrix}$$

(iii) En reportant la relation contrainte-déformation dans la formulation faible obtenue en question 2 et en utilisant la matrice $[\tilde{B}(r)]$ pour les déformations associées à ξ_h et w , on obtient

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}] \{\mathbb{U}\} = \{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}\} \quad \forall \{\mathbb{W}\} \in \mathbb{R}^2$$

soit

$$[\mathbb{K}] \{\mathbb{U}\} = \{\mathbb{F}\}$$

avec

$$[\mathbb{K}] = \int_a^b [\tilde{B}(r)]^T [A] [\tilde{B}(r)] dr \quad \{\mathbb{F}\} = p \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(iv) **(Question hors barême)** Tous calculs faits, la matrice $[\mathbb{K}]$ définie par la formule ci-dessus est donnée par

$$[\mathbb{K}] = \frac{1}{b-a} \begin{bmatrix} (3\lambda + 2\mu)a(a-b) + (\lambda + 2\mu)b^2 & -(\lambda + 2\mu)ab \\ -(\lambda + 2\mu)ab & (3\lambda + 2\mu)b(b-a) + (\lambda + 2\mu)a^2 \end{bmatrix}$$

La solution approchée, obtenue par résolution de $[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} = \{\mathbb{F}\}$, est

$$\xi^{(1)} = \frac{pa^2[(3\lambda + 2\mu)b(b-a) + (\lambda + 2\mu)a^2]}{(3\lambda + 2\mu)(b-a)[(\lambda + 2\mu)(a^2 + ab + b^2) - (3\lambda + 2\mu)ab]}$$

$$\xi^{(2)} = \frac{3p(\lambda + 2\mu)a^3b}{(3\lambda + 2\mu)(b-a)[(\lambda + 2\mu)(a^2 + ab + b^2) - (3\lambda + 2\mu)ab]}$$

On remarque que cette solution approchée devient infinie pour un réservoir infiniment mince ($b \sim a$), ce qui est en accord avec la solution exacte.

La comparaison de $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ avec les valeurs correspondantes de la solution exacte ξ^{exact} conduit, tous calculs faits, à :

$$\frac{\xi^{(1)} - \xi^{\text{exact}}(a)}{\xi^{\text{exact}}(a)} = O\left(\frac{b-a}{a}\right)^2 \quad \frac{\xi^{(2)} - \xi^{\text{exact}}(b)}{\xi^{\text{exact}}(b)} = O\left(\frac{b-a}{a}\right)^2$$

En d'autres termes, l'accord entre solution exacte et approchée est d'autant meilleur que le réservoir est mince, et les deux solutions convergent l'une vers l'autre pour la situation limite du réservoir infiniment mince.