

COURS D'ANALYSE DES STRUCTURES MÉCANIQUES PAR LA MÉTHODE DES ELEMENTS FINIS
(MEC 568)

contrôle non classant (28 mars 2006, 2 heures)

Documents autorisés : photocopié ; documents et notes de PC

Sujet proposé par Marc BONNET

Les deux exercices sont indépendants

Exercice 1 : barre rectiligne sous chargement dynamique

On considère une barre élastique rectiligne, de forme cylindrique (section droite A uniforme) et de longueur L grande devant le diamètre de la section. Le solide est ainsi suffisamment allongé pour que son état mécanique soit traité dans le cadre d'une modélisation monodimensionnelle.

Dans cet exercice, seuls les mouvements de traction-compression de la barre sont envisagés, dans le cadre de la dynamique (les effets d'inertie ne sont donc **pas** négligés). Ces mouvements sont tels que tout point x initialement situé sur la section $S(x)$ est animé d'un déplacement

$$\underline{\xi}(x, t) = \xi(x, t)\underline{e}_x$$

l'abscisse x étant mesurée le long de l'axe de la barre, et \underline{e}_x étant un vecteur unitaire de cet axe (on néglige ainsi les variations de section par effet Poisson). On fait les hypothèses cinématiques suivantes concernant le mouvement de la barre :

(a) *Repos initial* : la barre est initialement au repos, soit :

$$\xi(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq L) \quad (\text{conditions initiales})$$

(b) *Encastrement de l'extrémité gauche* : l'extrémité gauche est bloquée, soit

$$\xi(0, t) = 0 \quad (\text{conditions aux limites (cinématique)})$$

Les efforts intérieurs associés à ces mouvements sont décrits en terme d'*effort normal* ressenti par la section droite $S(x)$:

$$N(x, t) = \int_{S(x)} \sigma_{xx}(x, y, z, t) \, dy \, dz$$

On se place dans le cadre élastique linéaire HPP isotherme, de sorte que $N(x, t)$ est relié à la déformation $\partial \xi(x, t) / \partial x$ d'extension de la barre par

$$N(x, t) = EA \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \quad (\text{comportement + compatibilité})$$

où E est le module de Young (constant) du matériau. Enfin, on suppose l'absence de tout effort réparti, de sorte que l'équilibre dynamique de la barre se traduit (on l'admettra sans démonstration) par l'équation

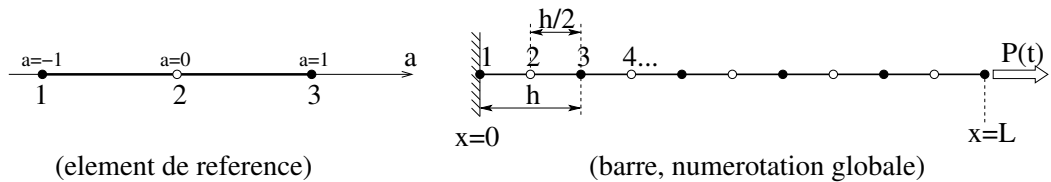
$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, t) - \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (\text{équilibre dynamique})$$

où ρ est la masse linéique constante de la barre. Enfin, on suppose un effort normal $P(t)$ **connu** imposé à l'extrémité droite de la barre, soit

$$N(L, t) = P(t) \quad (\text{conditions aux limites (dynamique)})$$

1. *Formulation faible*. Etablir la formulation faible dont la fonction $\xi(x, t)$ est solution, basée sur l'utilisation de fonctions test $w(x)$ correspondant à des champs virtuels $w(x)\underline{e}_x$ **cinématiquement admissibles à zéro**.
2. *Semi-discrétisation en espace*. L'intervalle $x \in [0, L]$ est divisé en N_E éléments, sous la forme de segments de longueur identique $h = L/N_E$. On considère l'utilisation d'**éléments à 3 noeuds**, l'élément de référence étant le segment $-1 \leq a \leq 1$ (voir figure), et reposant sur les fonctions d'interpolation

$$N_1(a) = \frac{1}{2}a(a-1), \quad N_2(a) = 1 - a^2, \quad N_3(a) = \frac{1}{2}a(a+1) \quad (-1 \leq a \leq 1)$$



Les $N_N = 2N_E + 1$ noeuds du maillage sont supposés régulièrement espacés, deux noeuds consécutifs étant donc séparés de $h/2$. On suppose par ailleurs que la numérotation globale des noeuds est consécutive, le noeud 1 étant l'extrémité gauche ($x = 0$).

- (i) Donner la forme de la table des coordonnées, la table de connectivité et la table des inconnues pour un nombre N_E d'éléments non spécifié.
- (ii) Donner le jacobien dx/da d'un élément générique.
- (iii) Formuler la matrice de masse élémentaire $[M_e]$ d'un élément générique. Montrer que $[M_e]$ est identique pour tous les éléments. Calculer explicitement $[M_e]$. On pourra pour cela utiliser les identités

$$\int_{-1}^1 N_1^2(a) da = \int_{-1}^1 N_3^2(a) da = \frac{4}{15} \qquad \int_{-1}^1 N_2^2(a) da = \frac{16}{15}$$

$$\int_{-1}^1 N_1(a)N_2(a) da = \int_{-1}^1 N_2(a)N_3(a) da = \frac{2}{15} \qquad \int_{-1}^1 N_1(a)N_3(a) da = -\frac{1}{15}$$

- (iv) Exprimer la déformation $\partial \xi_h / \partial x(x, t)$ sur un élément générique en fonction de a et des valeurs nodales $\xi^{(1)}(t), \xi^{(2)}(t), \xi^{(3)}(t)$ sur l'élément.
- (v) Formuler la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ d'un élément générique. Montrer que $[K_e]$ est identique pour tous les éléments. Calculer explicitement $[K_e]$.
- (vi) Donner la forme des matrices globales de rigidité $[K]$ et de masse $[M]$. Préciser en particulier leur dimension. Préciser la définition du vecteur $\{U\}$ des valeurs nodales inconnues du déplacement.
- (vii) Donner l'expression du vecteur $\{F(t)\}$ des efforts généralisés, de sorte que la dynamique de la barre soit gouvernée par le système d'équations différentielles

$$[K]\{U(t)\} + [M]\{\ddot{U}(t)\} = \{F(t)\}$$

3. *Algorithme d'intégration en temps.* On procède maintenant à une discrétisation temporelle, par pas de temps constant Δt , à partir de l'instant initial $t_0 = 0$. On considère ici le schéma de Newmark avec $\beta = 1/6, \gamma = 1/2$, correspondant à une précision optimale. Ce schéma est conditionnellement stable (cf chapitre 9), et on suppose dans cette question que le pas de temps Δt choisi satisfait la condition de stabilité.

- (i) Ecrire, en moins de 12 lignes de code, le segment de source Matlab réalisant le calcul à tout instant discret des déplacements, vitesses et accélérations aux noeuds de la barre.

On s'appuiera pour ce faire sur les hypothèses et notations suivantes :

- Les matrices globales de rigidité (notée K) et de masse (notée M) sont disponibles (on ne cherchera donc pas à coder leur calcul) ;
- On notera Dt la valeur Δt du pas de temps et NT le nombre total de pas de temps ;
- Les forces nodales $\{F_n\}$ à tout instant $t_n, 0 \leq n \leq NT$ sont supposées déjà calculées, et sont stockées dans une matrice F ayant $NT+1$ colonnes, de sorte que $\{F_n\}$ corresponde dans le code à la colonne $F(:, n+1)$;
- Les déplacements, vitesses et accélérations nodaux sont respectivement associés dans le code aux matrices U, V et A , chaque colonne de U, V ou A donnant la liste des valeurs nodales à un instant discret selon la convention définie ci-dessus pour F . Par exemple, la condition initiale sur le déplacement s'écrit $U(:, 1) = 0$

4. *Condition de stabilité pour l'intégration en temps.* Le schéma de Newmark avec $\beta = 1/6, \gamma = 1/2$ est conditionnellement stable (chapitre 9), le pas de temps devant vérifier

$$\Delta t \leq (\Delta t)_{\text{stab}} \quad \text{avec} \quad (\Delta t)_{\text{stab}} = \frac{2\sqrt{3}}{\omega_{\text{max}}}$$

où $\omega_{\text{max}} > 0$ est la plus grande valeur propre du problème aux valeurs propres généralisé $[K]\{X\} - \omega^2[M]\{X\} = \{0\}$.

(i) Montrer que ω_{\max} peut se mettre sous la forme

$$\omega_{\max} = \frac{c}{h} \bar{\omega}_{\max}$$

où $c = \sqrt{EA/\rho}$ est (on l'admettra) la célérité des ondes de compression dans la barre et $\bar{\omega}_{\max} > 0$ est la plus grande valeur propre d'un problème aux valeurs propres généralisé adimensionnel, et indépendant de h , qu'on définira ;

(ii) Quel type de relation obtient-on entre le choix du pas de temps Δt et celui de la taille d'élément h ? Interpréter.

Exercice 2 : Analyse de solides à comportement élastique endommageable

Cet exercice a pour but de définir une procédure de calcul de solides constitués d'un matériau élastique endommageable, selon le modèle de comportement défini ci-après. Il s'agit d'un comportement non-linéaire. On se placera donc dans le cadre d'une approche incrémentale et itérative, de façon à adapter à ce modèle de comportement la démarche utilisée pour le comportement élastoplastique dans les chapitres 5 et 6 du cours.

On considère donc un solide Ω de forme quelconque, soumis à des efforts imposés T^D sur la partie S_T de sa frontière, les forces de volume étant supposées nulles sur Ω à tout instant. Les déplacements sont supposés nuls sur la partie complémentaire de la frontière $S_u = d\Omega \setminus S_T$. La sollicitation T^D est supposée lentement variable dans le temps, et on fait donc l'hypothèse d'une évolution *quasistatique* de la structure.

La notion d'endommagement sert à décrire le comportement à l'échelle macroscopique de matériaux présentant un grand nombre de défauts de très petite taille (microfissures, microcavités...), ces défauts pouvant évoluer (s'aggraver) sous l'effet du chargement appliqué à la structure. Le principe général de ce type de modèle consiste à poser que les contraintes et les déformations sont reliés à tout instant par une relation de type élasticité linéaire, mais dans laquelle les modules d'élasticité se dégradent progressivement, cette dégradation étant représentée en termes de variables internes supplémentaires, les *variables d'endommagement*. Sous sa forme la plus simple, retenue pour cet exercice, le comportement élastique endommageable est formulé comme suit, en termes d'une unique variable d'endommagement α scalaire ($0 \leq \alpha \leq 1$) :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = (1 - \alpha(\underline{x}, t)) \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t)$$

où \mathcal{A} désigne le tenseur d'élasticité du matériau sain i.e. non endommagé. Ainsi, $\alpha = 0$ correspond à l'absence d'endommagement, et $\alpha = 1$ à la perte totale de résistance. Bien noter que l'endommagement n'est pas supposé uniforme sur la structure : des zones peuvent être plus endommagées que d'autres, et la variable d'endommagement dépend du point. L'endommagement dépend par ailleurs du temps, et est plus précisément supposé obéir à une loi à seuil selon les hypothèses suivantes : l'endommagement d'un élément de matière (i) ne peut qu'augmenter dans le temps (irréversibilité), et (ii) n'évolue effectivement que si l'énergie de déformation a localement atteint un seuil \bar{W} caractéristique du matériau. Ces hypothèses s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \text{si } (1 - \alpha(\underline{x}, t)) w(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t)) < \bar{W} & \text{alors } \dot{\alpha}(\underline{x}, t) = 0 \\ \text{si } (1 - \alpha(\underline{x}, t)) w(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t)) = \bar{W} & \text{alors } \dot{\alpha}(\underline{x}, t) \geq 0 \end{cases}$$

où

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t)) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t) : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t)$$

est la densité d'énergie de déformation qui régnerait dans le matériau en l'absence d'endommagement.

L'ensemble des relations gouvernant en tout point et à tout instant l'évolution du solide endommageable est

ainsi

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\underline{\xi}} + \nabla^T \underline{\underline{\xi}})$	dans $\Omega \times [0, T]$	compatibilité
$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0$	dans $\Omega \times [0, T]$	équilibre
$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - \alpha) \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}$	dans $\Omega \times [0, T]$	comportement, partie élastique
$\dot{\alpha} \geq 0, \quad (1 - \alpha)w(\underline{\underline{\varepsilon}}) \leq \bar{W}, \quad \dot{\alpha}[(1 - \alpha)w(\underline{\underline{\varepsilon}}) - \bar{W}] = 0$	dans $\Omega \times [0, T]$	comportement, endommagement
$\underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{x}}, t) = \underline{\underline{0}}$	sur $S_\xi \times [0, T]$	déplacements imposés
$\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{x}}, t) = \underline{\underline{T}}^D(\underline{\underline{x}}, t)$	sur $S_T \times [0, T]$	efforts imposés
$\alpha(\underline{\underline{x}}, 0) = 0$	dans Ω	condition initiale

Les lois d'évolution de l'endommagement imposent de traiter l'ensemble des équations ci-dessus comme un problème d'évolution. On suit la démarche générale et les conventions de notation des chapitres 5 et 6. On introduit une suite de $M + 1$ instants discrets régulièrement espacés $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \dots, t_M = M\Delta t = T$ (le pas de temps est donc $\Delta t = T/M$). L'algorithme de résolution a alors pour but l'évaluation de tous les champs mécaniques (déplacement $\underline{\underline{\xi}}$, déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$, endommagement α , contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$) aux instants t_n ($0 \leq n \leq M$). Notant par f_n une grandeur f évaluée à l'instant t_n , la composante essentielle du calcul est l'algorithme permettant de déterminer \mathcal{S}_{n+1} connaissant T_{n+1}^D et \mathcal{S}_n , où $\mathcal{S}_n = (\underline{\underline{\xi}}_n, \underline{\underline{\varepsilon}}_n, \alpha_n, \underline{\underline{\sigma}}_n)$ désigne symboliquement l'ensemble des variables mécaniques à l'instant t_n . Les questions qui suivent ont pour but de définir cet algorithme, dont l'inconnue principale est l'incrément de déplacement $\Delta \underline{\underline{\xi}}_n = \underline{\underline{\xi}}_{n+1} - \underline{\underline{\xi}}_n$. Il est conseillé d'utiliser la notation $w(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1})$ partout où cela est possible.

1. Ecrire la formulation faible de l'équilibre de la structure à l'instant t_{n+1} .
2. Supposant connue la relation $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}; \mathcal{S}_n)$ donnant la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ en fonction de la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}$ et de l'état précédent \mathcal{S}_n , en déduire la formulation faible vérifiée par $\Delta \underline{\underline{\xi}}_n$.
3. Détermination de $\mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}; \mathcal{S}_n)$.
 - (i) Cas $(1 - \alpha_n)w(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}) \leq \bar{W}$: que signifie cette hypothèse ? Donner l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ pour ce cas.
 - (ii) Cas $(1 - \alpha_n)w(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}) > \bar{W}$: que signifie cette hypothèse ? Donner l'accroissement d'endommagement $\Delta \alpha_n$ puis l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$ pour ce cas.
 - (iii) Synthèse des résultats précédents : donner $\mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}; \mathcal{S}_n)$ pour les deux cas ci-dessus.

Il est conseillé, pour simplifier les calculs et l'expression des résultats, d'utiliser à chaque opportunité la notation $w(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1})$.

4. Détermination de l'opérateur tangent local : calculer le tenseur du quatrième ordre $\mathcal{A}^{\text{end}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}, \mathcal{S}_n)$ (opérateur tangent local) défini par

$$\mathcal{A}^{\text{end}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}, \mathcal{S}_n) = \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}_n + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n; \mathcal{S}_n)$$

5. Donner l'expression continue (c.à.d. *avant* discrétisation par éléments finis) de l'opérateur tangent global associé à la méthode de Newton mise en oeuvre pour déterminer $\Delta \underline{\underline{\xi}}_n$ solution de la formulation faible obtenue en question 2.