

COURS D'ANALYSE DES STRUCTURES MÉCANIQUES PAR LA
MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS (MEC 568)
contrôle non classant (27 mars 2007, 2 heures)
Documents autorisés : photocopié ; documents et notes de PC

Sujet proposé par Yves M. LEROY

Cet examen se compose d'un exercice et de deux problèmes. Ces trois parties sont indépendantes.

Exercice : Le "Patch Test".

L'objectif est l'utilisation du "Patch Test" (PT), proposé initialement pour tester la convergence des éléments finis non-conformes (le champs de déformation a des discontinuités entre éléments qui ne sont pas celles du gradient du champs de déplacement). Ce PT est vu ici comme une étape de validation lors d'un développement informatique. Nous nous plaçons dans le cadre HPP, élasticité linéaire et isotrope, déformation plane, pas d'efforts volumiques.

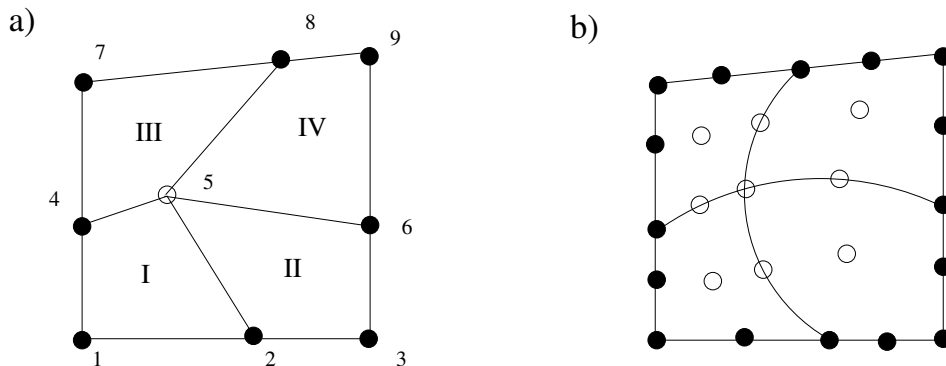


FIG. 1: Un maillage de quadrangles à quatre nœuds a) et neuf nœuds b) pour un "Patch Test". Le déplacement aux nœuds pleins est prescrit. Celui aux nœuds ouverts doit être déterminé par la méthode des éléments finis en condition statique ou dynamique.

Prenons l'exemple d'un élément isoparamétrique quadrangle à quatre nœuds, Figure 1a. Le domaine est discrétisé par un maillage composé de quatre éléments. Les déplacements aux nœuds pleins (tous sauf le numéro 5) sont imposés selon la relation

$$u_i = \alpha_i + \beta_{ij}x_j, \quad (1)$$

où x_j est une des deux coordonnées du nœud considéré sur la frontière et α_i et β_{ij} un ensemble de six constantes arbitraires.

1• Quelle est la solution exacte, en terme de déplacement, de ce problème de mécanique des milieux continus (avant discrétisation spatiale) si la condition (1) est appliquée de façon continue à la frontière ?

2• Quelle est la table de connectivité de ce maillage en utilisant la numérotation locale du Tableau 2.1 des notes de cours ? La numérotation locale commence en bas à gauche et se poursuit dans le sens trigonométrique.

3• Que devrait être la solution des éléments finis en terme de déplacement au nœud 5 de coordonnées $(x_1^{(5)}, x_2^{(5)})$ de ce maillage, pour un problème statique ? Justifier ce résultat.

Noter que vous venez de trouver la solution d'un système linéaire, qui se présente de façon générale sous la forme globale classique $[K]\{U\} = \{F\}$ où $\{F\}$ résulte des déplacements imposés à la frontière.

4• Quelle sera alors la déformation linéarisée estimée en chaque point de quadrature (Gauss) ?

5 • Le même type de conditions aux limites (1) est maintenant appliqué au maillage de quadrangles à neuf nœuds de la Figure 1b. Quels sont les déplacements aux nœuds internes ?

Nous cherchons maintenant à tester le développement du quadrangle à neuf nœuds grâce au PT de la Figure 1b dans le cadre d'une étude dynamique. L'algorithme d'intégration dans le temps est la méthode des différences centrées. La relation (1) est maintenant interprétée comme définissant des vitesses et non plus des déplacements :

$$\dot{u}_i = \alpha_i + \beta_{ij}x_j. \quad (2)$$

Toutes les vitesses nodales initiales \dot{U}_0 sont calculées à partir de (2). Les vitesses nodales à la frontière du domaine pour tout $t \geq 0$ sont également calculées selon (2). Les déplacements initiaux sont nuls.

6• Quelles seront les accélérations nodales calculées numériquement ? Justifier votre réponse.

Problème 1 : Les éléments spectraux.

L'objectif de ce problème est la construction des éléments finis dits "éléments spectraux". Ces éléments sont très appréciés pour la modélisation dynamique en raison de la facilité de leur enrichissement cinématique afin de mieux représenter les hautes fréquences. Nous allons étudier ces éléments en 1D pour l'équation différentielle :

$$u'' + u = x \quad \forall x \in [0; L] \quad \text{avec} \quad u(0) = u(L) = 0, \quad (3)$$

typique de la mécanique vibratoire.

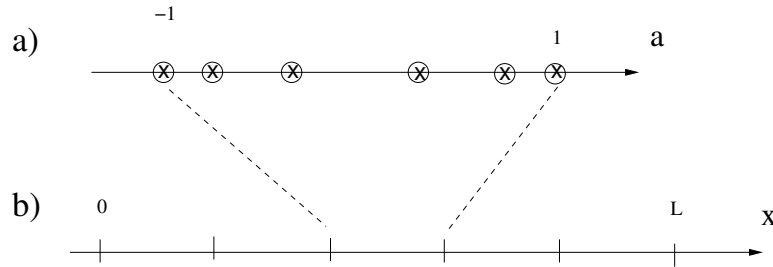


FIG. 2: Un élément spectral d'ordre $m = 6$ dans le domaine de référence en a) et le domaine physique en b), discrétisé en $n = 5$ éléments. Noter que les nœuds (cercles) et les points de quadrature de Lobatto (croix) occupent la même position.

1• Quelle est la formulation faible symétrique de ce problème ? Les fonctions test seront choisies cinématiquement admissibles à zéro.

Le premier point dans la construction d'un élément spectral est la sélection de la quadrature (intégration numérique) qui permet d'approcher le calcul d'une intégrale par une somme pondérée

$$\int_{-1}^{+1} f(a) da \simeq \sum_{\alpha=1}^m w_{\alpha} f(a_{\alpha}), \quad (4)$$

où a_{α} et w_{α} représentent la position stratégique du point de quadrature et son poids dans la pondération. La quadrature de Lobatto est choisie : les points d'intégration 1D sur l'intervalle de référence $[-1; 1]$ sont choisis avec la contrainte que le premier point et le dernier point doivent se situer à $a = -1$ et $a = +1$, respectivement. Pour une quadrature de m points selon Gauss, l'intégration d'un polynôme de degré $2m - 1$ est exacte. En revanche, la quadrature de Lobatto considérée ici n'est exacte que pour un polynôme de degré $\leq 2m - 3$. La position de ces points est présentée en Figure 2a dans le cas de $m = 6$. Le deuxième point essentiel dans la construction d'un élément spectral est que le nombre de nœuds est égal à celui des points de quadrature. De plus, la position des nœuds est identique à celle des points de quadrature avec une interpolation *linéaire* entre le domaine de référence

et le domaine physique, Figure 2b. L'élément n'est donc pas isoparamétrique. Les fonctions de forme et de test sont alors des polynômes de degré $m - 1$ notés $l_i(a)$ pour $a \in [-1; 1]$ et $i = 1, \dots, m$.

2• Que vaut la fonction de forme $l_i(a)$ au nœud a_j afin de respecter les conditions habituelles sur les fonctions de forme (section 2.2.2 du cours) ? A partir de cette propriété, construire la forme générale de $l_i(a)$ dans le domaine de référence, ainsi que de la dérivée $l'_i(a)$, pour m quelconque.

3• Quelle est l'expression des composantes de la matrice de masse locale ($m \times m$) définie par $M_{ij}^e = \int_{\Omega^e} l_i l_j da$, selon la quadrature de Lobatto, pour un élément couvrant un segment Ω^e de longueur L^e ? Quelle propriété remarquable observez-vous ?

Nous discrétisons en éléments spectraux le domaine $[0; L]$, qui est divisé en n éléments de longueur identique L^e , et l'appliquons à la formulation faible obtenue en première question.

4• Donner l'expression de la matrice locale de composante h_{ij}^e , que nous appellerons matrice locale de rigidité dynamique, associée à la formulation faible de (3), sans introduire la quadrature numérique. Donner l'expression du vecteur force local, de composante notée f_a^e , après quadrature, apparaissant dans cette même formulation faible.

5• Proposer un algorithme en Matlab qui permet de construire la matrice h_{ij}^e locale d'un élément spectral pour $m = 3$. On suppose connus la position des points de quadrature et les poids d'intégration. La structure du programme sera du type :

```

function [He,Fe]=elemental_spectral(S)
a_lob=[-1 0 1]; % points de Gauss-Lobatto
w_lob=[.33333333 1.33333333 .33333333]; % poids de Gauss-Lobatto
...
end

```

où S est un vecteur ligne qui contient les coordonnées des trois nœuds de l'élément.

Le système d'équation linéaire global résulte de la contribution de chaque élément. Nous supposons $n = 3$ et $m = 3$. On notera les inconnues globales du problème de U_1 à U_7 .

6• Quelle est l'expression du système global $[H]$ et du vecteur force $\{F\}$ résultant de l'assemblage de la contribution des trois éléments ?

En étudiant le système global possédant $n(m - 1) - 1$ inconnues, observer que les degrés de liberté correspondant à des nœuds isolés dans un élément donné dépendent uniquement des valeurs nodales à la frontière de cet élément. Il est donc possible d'éliminer ces inconnues et de gérer chaque élément à m nœuds comme un élément ayant seulement deux nœuds au niveau global.

7• Si ces inconnues sont éliminées au niveau local, avant assemblage, quelle serait la taille du système à résoudre au niveau global dans notre cas particulier ($n = 3$ et $m = 3$) ?

Problème 2 : Visco-plasticité d'un matériau de type Von Mises

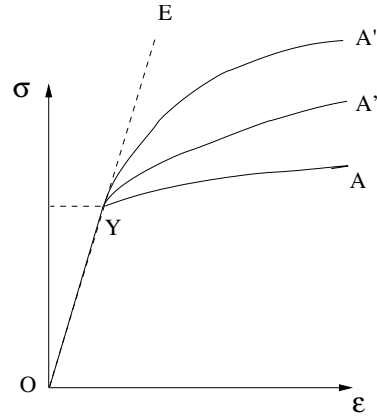


FIG. 3: Essai en traction d'un matériau sensible à la vitesse de déformation dans le domaine plastique.

Bien des matériaux de l'ingénieur, lorsque les vitesses de sollicitations dépassent l'ordre de $10^3 1/s$ à température ambiante, présentent une plasticité qui est fonction de la vitesse de déformation. Les résultats expérimentaux, pour un essai en traction, sont présentés en Figure 3.

La réponse mécanique est bien linéaire et élastique, indépendante de la vitesse de déformation, entre les points O et Y. Au delà de cette limite d'élasticité, la réponse du matériau correspond à la courbe YA en imaginant un essai dont la vitesse de chargement tend vers zéro. Si la vitesse de déformation n'est pas négligeable, alors la réponse du matériau suit une courbe YA' qui est toujours au dessus de la première. En augmentant la vitesse de chargement, la rigidité apparente augmente dans le domaine plastique, comme illustrée par la courbe YA''. Si la vitesse de chargement tend vers l'infini, tout en négligeant les effets d'inertie, la réponse est alors proche de l'élasticité (droite YE). Cette tendance s'explique pour les métaux par le mouvement et l'interaction des dislocations qui nécessitent un temps caractéristique. Si le chargement ne permet pas ce temps, alors la plasticité ne peut se développer et le comportement reste proche de l'élasticité.

Nous travaillons dans un cadre 1D (seule la contrainte dans la direction de la traction est non nulle et notée σ) et, en première approximation, en HPP. Le module d'élasticité est noté E . La limite élastique est donnée par un critère de type Von Mises

$$\phi = \sigma^{eq} - \sigma_0(\gamma) \leq 0, \quad (5)$$

où $\sigma^{eq} = |\sigma|$ est la contrainte équivalente de Von Mises et σ_0 la fonction seuil. Le scalaire positif γ représente la déformation plastique équivalente cumulée. La

fonction seuil peut être construite à partir de la courbe YA des essais, Figure 3.

L'écoulement plastique suit la règle de normalité et le taux de déformation plastique est donné par

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\sigma}{\sigma^{eq}}. \quad (6)$$

Le scalaire positif $\dot{\gamma}$ n'est pas déterminé ici par une condition de cohérence sur le critère de plasticité. Il vérifie

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} \frac{\sigma^{eq} - \sigma_0(\gamma)}{\eta} & \text{si } \sigma^{eq} \geq \sigma_0(\gamma), \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (7)$$

Le point de contrainte pendant le développement de la plasticité est donc en dehors du domaine d'élasticité. Le scalaire η dans (7) est la viscosité (Pa.s).

Nous supposons connu au temps t_n , la contrainte σ_n , la déformation plastique γ_n ainsi qu'un incrément de déformation potentiel $\Delta\epsilon$ appliqué entre les instant t_n et $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Nous cherchons à calculer la contrainte σ_{n+1} et la déformation plastique γ_{n+1} à la fin de l'incrément.

- 1• Transformer les équations de la visco-plasticité en différences finies suite à la discrétisation du temps, comme discuté dans la section 6.3.1 du cours.
- 2• Quel est le prédicteur élastique pour la mise à jour des contraintes ?
- 3• Que faut-il pour que ce prédicteur soit bien la contrainte à la fin de l'itération ?
- 4• Quelle est la correction en contrainte due à la déformation plastique ? On cherchera en répondant à cette question à mettre en évidence la structure du retour radial défini en plasticité indépendante de la vitesse de déformation.

Corrigé

Exercice : Le "Patch Test".

- 1• Le champ de déplacement $u_i = \alpha_i + \beta_{ij}x_j$ est cinématiquement admissible. La déformation linéarisée $1/2(\beta_{ij} + \beta_{ji})$ est homogène et conduit à une contrainte homogène, statiquement admissible. Ce champ est donc la solution exacte du problème.
- 2• Le tableau de connectivité

Elément	local 1	local 2	local 3	local 4
I	1	2	5	4
II	2	3	6	5
III	4	5	8	7
IV	5	6	9	8

TAB. 1: Tableau de connectivité pour le maillage de la Figure 1a.

- 3• Si le déplacement correspond à un état de déformation homogène, alors l'interpolation des déplacements doit permettre de reproduire cette déformation, section 2.2.3 des notes. Ce critère est respecté pour un seul élément ou pour un assemblage où le déplacement est imposé à la frontière, comme pour ce PT. Nous avons donc au cinquième nœud de ce maillage

$$u_i = \alpha_i + \beta_{ij}x_j^{(5)}.$$

- 4• La déformation est homogène. A chaque point de quadrature, la déformation calculée est alors

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}),$$

avec une erreur due à la précision numérique.

- 5• Le critère présenté à la question 3 s'applique pour le maillage avec des éléments à neuf nœuds. Le déplacement aux nœuds internes est donc donné par (1).

- 6• Nous utilisons le tableau récapitulatif de la section 9.3.2 du cours.

Etape 2 : les accélérations initiales \ddot{U}_0 sont nulles car les vecteurs $\{F_0\}$ et $\{U_0\}$ sont nuls.

Etape 3 : les vitesses à l'instant intermédiaire $\dot{U}_{\frac{1}{2}}$ sont les vitesses initiales.

Etape 4a ($n = 0$) : les déplacements U_1 sont proportionnels à $\dot{U}_{\frac{1}{2}}$

Etape 4b ($n = 0$) : les forces internes sont égales aux efforts externes car nous retrouvons les conditions statiques ($[K]\{U\} = \{F\}$). Les accélérations \ddot{U}_1 sont donc nulles.

Etape 4c ($n = 0$) : les vitesses $\dot{U}_{\frac{3}{2}}$ sont alors identiques à $\dot{U}_{\frac{1}{2}}$

L'étape 4 sera répétée pour tout incrément n de temps avec le même résultat : les accélérations \ddot{U}_n sont nulles, avec une précision numérique ; les vitesses sont identiques aux vitesses initiales. Toute erreur dans l'implémentation de cet algorithme et de l'élément à neuf nœuds risque de ne pas permettre de retrouver ce résultat. Le PT est donc bien une étape importante dans la validation du code de calcul.

Probleme 1 : Les éléments spectraux.

1• La formulation faible est obtenue en multipliant l'équation différentielle par une fonction test $v(x)$, qui satisfait $v(0) = v(L) = 0$, et en intégrant le produit sur le domaine d'étude

$$\int_0^L (u'' + u - x)v dx = 0.$$

Une intégration par partie du premier terme, et la prise en compte des conditions aux limites sur la fonction test, permet d'obtenir une formulation symétrique

$$\int_0^L -u'v' + uv - xvd x = 0 \forall v \in \mathcal{C}(0).$$

2• La fonction de forme $l_i(a)$ est nulle en tout nœud j , différent de i , et vaut l'unité en ce nœud i . La condition est donc $l_i(a_j) = \delta_{ij}$. Pour m points de quadrature et nœuds, il faut que la fonction de forme $l_i(a)$ soit nulle en $m - 1$ nœuds. Elle est donc proportionnelle au produit

$$\prod_{\alpha=1, \neq i}^m (a - a_\alpha).$$

Il reste à normaliser le produit afin que la fonction soit égale à 1 au nœud i . On conclue ainsi

$$l_i(a) = \frac{\prod_{\alpha=1, \neq i}^m (a - a_\alpha)}{\prod_{\alpha=1, \neq i}^m (a_i - a_\alpha)}.$$

La dérivée première de cette fonction est

$$l_i'(a) = \sum_{\beta=1}^m \frac{\prod_{\alpha=1, \neq i, \neq \beta}^m (a - a_\alpha)}{\prod_{\alpha=1, \neq i}^m (a_i - a_\alpha)}.$$

3• L'interpolation spatiale est linéaire, le Jacobien de la transformation entre domaine de référence et physique est donc constant et vaut ici $L^e/2$. Le calcul de la matrice masse locale se fera donc sur le domaine de référence à partir de

$$\frac{L^e}{2} \int_{-1}^{+1} l_i(a)l_j(a)da .$$

La quadrature de Lobatto permet d'approcher cette intégrale par la somme pondérée

$$\frac{L^e}{2} \sum_{\alpha=1}^m l_i(a_\alpha)l_j(a_\alpha)w_\alpha .$$

Les fonctions de forme étant évaluées aux points de quadrature, qui sont aussi des nœuds, cette somme pondérée devient

$$\frac{L^e}{2} \sum_{\alpha=1}^m \delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}w_\alpha$$

ou encore

$$\frac{L^e}{2} \delta_{ij}w_j ,$$

sans sommation sur l'indice j . La matrice de masse est donc diagonale. Cette propriété remarquable se généralise en 2 et 3D. Le calcul des accélérations dans un algorithme de différences centrées est alors d'une grande rapidité d'exécution.

4• La matrice locale de rigidité dynamique a pour composante

$$\frac{L}{2n} \delta_{ij}w_j - \frac{2n}{L} \int_{-1}^{+1} l_{i,a}(a)l_{j,a}(a)da ,$$

sans somme sur j , dont la deuxième partie sera intégrée par la quadrature de Lobatto. Cette matrice n'est pas diagonale. Le vecteur force local a pour composante

$$\frac{L}{2n} \int_{-1}^{+1} l_i(a)xda .$$

La quadrature conduit alors à

$$\frac{L}{2n} w_i x_i ,$$

sans somme sur l'indice i .

5• Le système d'équation global ayant pris en compte les conditions aux limites est $[H]\{U\} = \{F\}$ ou de façon explicite

$$\begin{bmatrix} h_{22}^{(1)} & h_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ h_{32}^{(1)} & h_{33}^{(1)} + h_{11}^{(2)} & h_{12}^{(2)} & h_{13}^{(2)} & 0 \\ 0 & h_{21}^{(2)} & h_{22}^{(2)} & h_{23}^{(2)} & 0 \\ 0 & h_{31}^{(2)} & h_{32}^{(2)} & h_{33}^{(2)} + h_{11}^{(3)} & h_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & h_{21}^{(3)} & h_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \frac{L}{6} \begin{Bmatrix} w_2^{(1)}x_2 \\ (w_3^{(1)} + w_1^{(2)})x_3 \\ w_2^{(2)}x_4 \\ (w_3^{(2)} + w_1^{(3)})x_5 \\ w_2^{(3)}x_6 \end{Bmatrix} . \quad (8)$$

6• La deuxième inconnue de chaque élément peut être éliminée. Le système de cinq équations sera ramené à un système de deux équations seulement.

7• Algorithme Matlab

```
function [He,Fe]=elemental_spectral(S)
a_lob=[-1 0 1];
w_lob=[.33333333 1.33333333 .33333333];
h=S(3)-S(1);
He=h/2*diag(w_lob);
Fe=h/2*(w_lob.*S)';
for g=1 :3,
    a=a_lob(g);
    DN=[a-.5 -2.*a a+.5];
    He=He-2/h*DN'*DN*w_lob(g);
end
```

Problème 2 : Visco-plasticité d'un matériau de type Von Mises

1• L'algorithme proposé suite à la discrétisation du temps est

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_n + E(\Delta\epsilon - \Delta\epsilon^p), \\ \Delta\epsilon^p &= \Delta\gamma \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_{n+1}^{eq}}, \\ \sigma_{n+1}^{eq} &= |\sigma_{n+1}|, \\ \Delta\gamma \frac{\eta}{\Delta t} &= \sigma_{n+1}^{eq} - \sigma_0(\gamma_{n+1}) \quad \text{si } \sigma_{n+1}^{eq} > \sigma_0(\gamma_{n+1}), \\ &= 0 \quad \text{autrement.} \end{aligned} \tag{9}$$

2• Le prédicteur élastique est construit avec l'hypothèse qu'il n'y a pas de plasticité pendant l'incrément :

$$\begin{aligned} \sigma_{elas} &= \sigma_n + E\Delta\epsilon, \\ \Delta\epsilon_{elas}^p &= 0, \\ \sigma_{elas}^{eq} &= |\sigma_{elas}|, \\ \Delta\gamma_{elas} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

3• Il faut que la condition $\sigma_{elas}^{eq} \leq \sigma_0(\gamma_{elas})$ soit respectée.

4• Dans le cas contraire, la déformation plastique pendant cet incrément n'est pas nulle. La contrainte en fin d'incrément est alors calculée par

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1} &= \sigma_{elas} - E\Delta\epsilon^p, \\
\Delta\epsilon^p &= \Delta\gamma \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_{n+1}^{eq}}, \\
\sigma_{n+1}^{eq} &= |\sigma_{n+1}|, \\
\Delta\gamma \frac{\eta}{\Delta t} &= \sigma_{n+1}^{eq} - \sigma_0(\gamma_{n+1}).
\end{aligned} \tag{11}$$

En combinant (11a) et (11b) on obtient

$$\sigma_{n+1} \left(1 + \Delta\gamma \frac{E}{\sigma_{n+1}^{eq}} \right) = \sigma_{elas}, \tag{12}$$

ce qui conduit à l'égalité suivante entre les contraintes équivalentes finales

$$\sigma_{n+1}^{eq} + \Delta\gamma E = \sigma_{elas}^{eq}. \tag{13}$$

Il est alors possible d'écrire (11d) comme

$$\Delta\gamma \left(\frac{\eta}{\Delta t} + E \right) + \sigma_0(\gamma_n + \Delta\gamma) = \sigma_{elas}^{eq}. \tag{14}$$

Cette équation non-linéaire est résolue pour le scalaire positif $\Delta\gamma$ par Newton-Raphson. On connaît alors la contrainte équivalente finale $\sigma_{n+1}^{eq} = \sigma_{elas}^{eq} - \Delta\gamma E$, d'après (13), et il est possible de mettre à jour la contrainte à partir de (12)

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{E\Delta\gamma}{\sigma_{n+1}^{eq}}} \sigma_{elas}. \tag{15}$$

Nous retrouvons ainsi la version 1D du retour radial.