Cours « Problèmes inverses »
Sujet 1: identification de conditions initiales en thermique

On considère l'équation de la chaleur 1D en espace gouvernant la température $u(x,t)$ d'un milieu compris entre les deux plans $x=0$ et $x=L$, therniquement isolé à ses deux extrémités, et résultant de la diffusion d'une température initiale $u(x,0)=f(x)$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} - a\frac{\partial u}{\partial t} = 0 && (0 \le t \le T,\ 0 < x < L) \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 && (0 \le t \le T) \\
&u(x,0) = f(x) && (0 < x < L) \qquad \text{condition initiale}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

dir

Problème direct : il consiste à calculer $u(x,t)$ connaissant $f(x)$. Pour ce faire, on peut procéder à une semi-discrétisation en espace, découpant le domaine $x \in [0,L]$ en N segments de longueur égale $\Delta x = L/N$. Postulant une unterpolation linéaire par morceaux et continue de $u(x,t)$ à t fixé, (1) conduit au système d'équations différentielles

$$
M\dot{u} + Ku = 0 \tag{2}
$$

dir:sem

où $u(t) = \{u_0(t),\ldots,u_N(t)\}^{\mathrm{T}}$ est le $N+1$-vecteur des températures nodales et K, M sont des matrices $(N+1)\times(N+1)$ données par

$$
K = \frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
-1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\
0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\qquad
M = a\frac{\Delta x}{6}\begin{bmatrix}
2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
1 & 4 & 1 & \ddots & & \vdots \\
0 & 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & 1 & 4 & 1 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

Problème inverse : trouver la condition initiale $f(x)$ connaissant $g(t)$ $(0 \le t \le T)$, où $g(t) = u_N(t) = u(L,t)$ est l'histoire de température à l'extrémité $x=L$ (mesure de température en surface par thermographie infrarouge).

Approche possible :

— Discrétisation temporelle, pas constant $\Delta t = T/n$;

— Données $g(0)=g_0,\ldots,g(T)=g_n$.

Le problème direct discrétisé dépend linéairement de

$$
\begin{aligned}
f &= \{f_0,\ldots,f_N\}^{\mathrm{T}} = \{f(x_0=0),\ldots,f(x_N=L)\}^{\mathrm{T}} \\
&= \sum_{k=0}^{N} f_k F_k \qquad \text{avec} \ \ F_k = \{0,\ldots,0,1,0,\ldots,0\} \quad \text{(le 1 est en } k^{\text{e}} \text{ position)}
\end{aligned}
$$

Résoudre $N{+}1$ problèmes directs « élémentaires » avec conditions initiales $F_0, \ldots, F_N \Longrightarrow$ solutions $U_0, \ldots, U_N$. Posant $G_{k\ell} = U_k(L, t_\ell) = U_k(L, \ell\Delta t)$, la mesure simulée pour une condition initiale donnée f est alors donnée par

$$g_\ell^{\text{calc}} = g^{\text{calc}}(t_\ell) = \sum_{k=0}^{N} G_{k\ell} f_k$$

L'inversion consiste ainsi à vérifier « au mieux » $g = g^{\text{calc}}$, soit

$$Gf = g \qquad \text{avec} \;\; G = [G_{k\ell}],\; f = \{f_k\},\; g = \{g_\ell\}$$

Travail proposé :

- Construire la matrice d'observation G ;
- Créer des « données synthétiques » g ;
- Etudier le conditionnement de G ;
- Résoudre numériquement le problème inverse (par mise en œuvre d'une approche régularisée ou probabiliste), étudier numériquement l'influence d'erreurs entachant la donnée g, déterminer des conditions sous lesquelles l'inversion se passe « bien » ou « mal ».