Cours « Problèmes inverses »
Sujet 13: identification par erreur en relation de comportement

On considère l'identification de *champs* de modules d'élaticité *isotropes* $\kappa(\boldsymbol{x}), \mu(\boldsymbol{x})$ (modélisant par exemple un défaut sous la forme d'une perturbation de caractéristiques de référence connues κ_0, μ_0 correspondant à un matériau sain), dans le cadre de l'élasticité plane (déformations planes), κ, μ désignant les modules de compressibilité isotrope et de cisaillement tels que le comportement élastique linéaire s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = \kappa \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{e} \qquad \boldsymbol{e} : \text{déviateur de la déformation } \boldsymbol{\varepsilon}$$

On se place dans le cas où on connaît complètement des couples déplacement-effort $(\bar{\boldsymbol{u}}_i, \bar{\boldsymbol{t}}_i)$ sur la frontière (l'expérience i consistant à exercer les efforts $\bar{\boldsymbol{t}}_i$ et à mesurer la réponse $\bar{\boldsymbol{u}}_i$).

Travail proposé : Il s'appuiera sur une fonctionnelle d'erreur en relation de comportement « simple », du type présenté en page 15 des transparents de la séance 8 (sommer sur toutes les expériences les fonctionnelles E_i associée à chaque expérience i).

— Choisir une géométrie plane Ω et une distribution $\kappa(\boldsymbol{x}), \mu(\boldsymbol{x})$ de modules à identifier, par exemple associée à une inclusion dans un matériau sain de modules connus κ_0, μ_0 ;

— Choisir un ensemble d'excitations $\bar{\boldsymbol{t}}_i$ à appliquer sur $\partial\Omega$, et simuler les réponses $\bar{\boldsymbol{u}}_i$ pour le matériau réel $\kappa(\boldsymbol{x}), \mu(\boldsymbol{x})$;

— Mettre en œuvre une méthode de minimisation alternée de $E(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ consistant à chaque itération à :

(i) Calculer les champs de déplacement $\boldsymbol{u}_i^{\text{D}}$ correspondant à l'application de $\bar{\boldsymbol{u}}_i$ sur $\partial\Omega$;

(ii) Calculer les champs de déplacement $\boldsymbol{u}_i^{\text{N}}$ correspondant à l'application de $\bar{\boldsymbol{t}}_i$ sur $\partial\Omega$ (attention aux mouvements rigidifiants !) ;

(iii) Actualiser les champs de modules par

$$\kappa^2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{9} \frac{[\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_i^{\text{N}})]^2}{[\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\text{D}})]^2}, \quad \mu^2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4} \frac{\boldsymbol{s}_i^{\text{N}}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{s}_i^{\text{N}}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{e}_i^{\text{D}}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{e}_i^{\text{D}}(\boldsymbol{x})} \qquad \boldsymbol{s}_i^{\text{D}} : \text{déviateur de la contrainte } \boldsymbol{\sigma}_i^{\text{D}}$$

Voir transparents, et chapitre 4 du poly.

— Appliquer la méthode aux données simulées. Etudier sa capacité à reconstruire $\kappa(\boldsymbol{x}), \mu(\boldsymbol{x})$ selon nombre d'expériences, incertitudes sur les données, maillage...