Cours "Problèmes inverses"
Sujet 2: identification de conditions aux limites en thermique

On considère l'équation de la chaleur 1D en espace gouvernant la température $u(x,t)$ d'un milieu compris entre les deux plans $x = 0$ et $x = L$, thermiquement isolé à ses deux extrémités, et résultant de la diffusion d'une température initiale $u(x,0) = f(x)$.

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 & (0 \le t \le T,\ 0 < x < L) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 & (0 \le t \le T) & \text{condition aux limites} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = q(t) & (0 \le t \le T) & \text{condition aux limites} \\ u(x,0) = f(x) & (0 < x < L) & \text{condition initiale} \end{array} \tag{1}$$

dir

où $a = \rho c/k$ est la diffusivité thermique (k: conductivité, ρ: masse volumique, c capacité calorifique massique)

Problème direct: il consiste à calculer $u(x,t)$ connaissant le flux $q(t)$ imposé à l'extrémité $x = L$. Par compatibilité entre flux imposés et conditions initiales, on prendra q et f tels que

$$f'(0) = 0, \quad f'(L) = q(0)$$

Pour ce faire, on peut procéder à une semi-discrétisation en espace, découpant le domaine $x \in [0,L]$ en N segments de longueur égale $\Delta x = L/N$. Postulant une unterpolation linéaire par morceaux et continue de $u(x,t)$ à t fixé, (1) conduit au système d'équations différentielles

$$M\dot{u} + Ku = Lq \tag{2}$$

dir:sem

où $u(t) = \{u_0(t), \ldots, u_N(t)\}^{\mathrm{T}}$ est le $N+1$-vecteur des températures nodales, le $N+1$-vecteur L est défini par

$$L = \{0, \ldots, 0, 1\}^{\mathrm{T}}$$

et K, M sont des matrices $(N+1) \times (N+1)$ données par

$$K = \frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M = a\frac{\Delta x}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Problème inverse: reconstruire l'histoire de flux imposé $q(t)$ à l'extrémité $x = L$, supposée inaccessible, connaissant des mesures d'évolution de température $u^k(t) = u(x^k, t)$ $(1 \le k \le m)$ en m thermocouples placés à l'*intérieur* du domaine aux abscisses $0 < x^1 < \ldots < x^m < L$.

Approche possible:

- Discrétisation temporelle, pas constant $\Delta t = T/n$;
- Données $u_\ell^k \leq u(x^k, t_\ell)$ ($1 \leq k \leq m, t_\ell = \ell\Delta t$).

Le problème direct discrétisé dépend de façon affine de

$$q = \{q_1, \dots, q_n\}^{\mathrm{T}} = \{q(t=\Delta t), \dots, q(t=n\Delta t)\}$$

ce qui entraîne

$$u_\ell^k = v_\ell^k + \sum_{j=1}^{n} G_\ell^{k,j} q_j$$

où:

- $v_\ell^k = v(x^k, t_\ell)$, avec $v(x,t)$ solution de (1) pour la condition initiale f et $q_1 \ldots = q_n = 0$;
- $G_\ell^{k,j} = G^j(x^k, \ell\Delta t)$, avec $G^j(x,t)$ solution de (1) pour la condition initiale *nulle* $f = 0$ et $q_1 \ldots = q_{j-1} = 0, q_j = 1, q_{j+1} \ldots = q_n = 0$.

On résout (une fois pour toutes) les $N+1$ problèmes directs donnant $v(x,t)$ et $G^j(x,t)$. L'identification des flux inconnus consiste alors à vérifier "au mieux" $g = g^{\text{calc}}$, soit

$$\sum_{j=1}^{n} G_\ell^{k,j} q_j = u_\ell^k - v_\ell^k \qquad (1 \leq k \leq m,\ 1 \leq \ell \leq n)$$

que l'on peut remettre sous la forme d'un système linéaire à $m \times n$ équations et n inconnues:

$$Gq = u - v$$

Travail proposé:

- Construire la matrice d'observation G;
- Créer des "données synthétiques" u_ℓ^k;
- Etudier le conditionnement de G;
- Résoudre numériquement le problème inverse (par mise en œuvre d'une approche régularisée ou probabiliste), étudier numériquement l'influence d'erreurs entachant la donnée u_ℓ^k, déterminer des conditions sous lesquelles l'inversion se passe "bien" ou "mal".