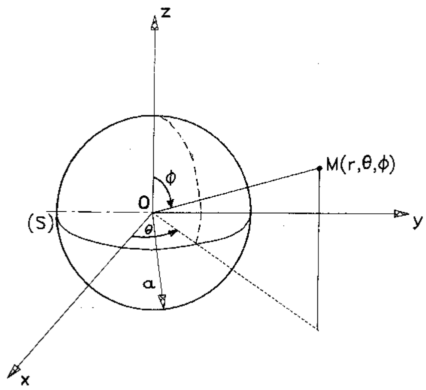
Cours « Problèmes inverses »
Sujet 3: holographie acoustique

Il s'agit de reconstruire la distribution de vitesse normale U sur la surface d'une structure en vibration (pulsation ω imposée) à partir de mesures du champ de pression acoustique p rayonné par la surface vibrante.

Problème direct. Le champ de pression créé dans le domaine $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$ extérieur à la structure vibrante B (de frontière S) est solution du problème

$$\begin{array}{lll} (\Delta + k^2)p = 0 & \text{dans } \Omega & (k = \omega/c : \text{nombre d'onde}) \\ \boldsymbol{\nabla} p.\boldsymbol{n} = \mathrm{i}\rho\omega U & \text{sur } S = \partial\Omega & (\text{vitesse normale imposée}) \\ p = o(1) \ \text{ et } \ \|\boldsymbol{x}\|(\boldsymbol{\nabla} p.\boldsymbol{e}_r - \mathrm{i}kp) = o(1) & \|\boldsymbol{x}\| \to \infty & (\text{conditions de décroissance et de rayonnement}) \end{array} \tag{1}$$

dir



On fait ici deux hypothèses : (i) la surface vibrante S est une sphère de rayon a, et (ii) la vitesse normale U est axisymétrique d'axe Oz (et il en est donc de même pour le champ de pression). Dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), toute distribution U axisymétrique sur S est de la forme

$$U(\phi) = \sum_{m \geq 0} U_m P_m(\cos\phi) \quad (0 \leq \phi \leq \pi),$$

et est donc caractérisée par les coefficients U_m. La résolution de (1) par séparation de variables donne alors

$$p(\boldsymbol{x}) = p(r, \phi) = \sum_{m \geq 0} \alpha_m U_m P_m(\cos\phi) h_m^{(1)}(kr) \quad (0 \leq \phi \leq \pi,\ a \leq r \leq \infty) \tag{2}$$

dir:sol

où $h_m^{(1)}(z)$ est la *fonction de Hankel sphérique de première espèce d'ordre* m, définie en termes des fonctions de Bessel $J_{m+1/2}$ et $Y_{m+1/2}$ par

$$h_m^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \big(J_{m+1/2}(z) + \mathrm{i} Y_{m+1/2}(z) \big)$$

et les facteurs α_m sont donnés par

$$\alpha_m = \frac{\mathrm{i}\rho c}{h_m'^{(1)}(ka)}$$

Dans ce contexte, le problème direct consiste à se donner la distribution U, c'est-à-dire les coefficients U_m. Le champ de pression p est alors complètement déterminé par (2)

Problème inverse. On suppose mesurées des valeurs $p_k = p(r_k, \phi_k)$ du champ de pression en des capteurs placés aux points (r_k, ϕ_k) ($1 \leq k \leq N$). On cherche à reconstruire la vitesse normale de vibration $U(\phi)$.

Travail proposé :

- Construire la matrice d'observation G apparaissant dans l'équation d'observation

$$p = GU \qquad p = \{p_1, , \ldots, p_N\}, \;\; U = \{U_1, \ldots, U_M\}$$

- Créer des « données synthétiques » p_k ;
- Etudier le conditionnement de G ;
- Résoudre numériquement le problème inverse (par mise en œuvre d'une approche régularisée ou probabiliste), étudier numériquement l'influence d'erreurs entachant la donnée p_k, déterminer des conditions sous lesquelles l'inversion se passe « bien » ou « mal ».