Cours « Problèmes inverses »
Sujet 5: gravimétrie

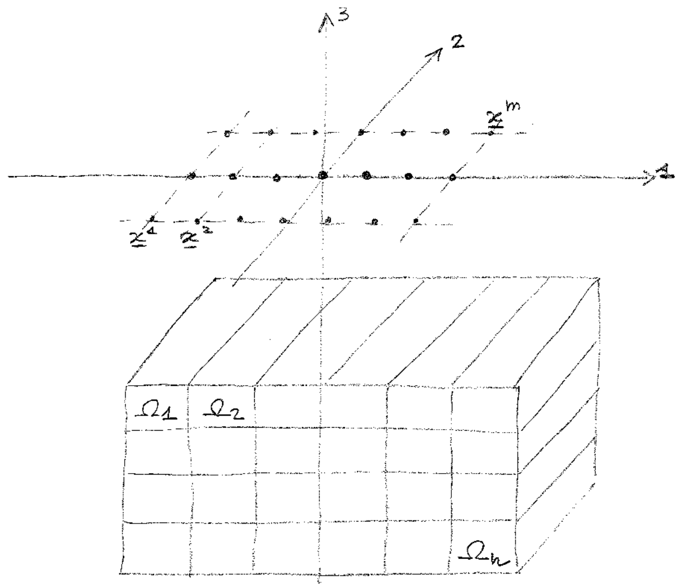
La déviation $\gamma = g_{\text{obs}} - g_0$ entre la gravité mesurée g_{obs} et la gravité terrestre « de référence » g_0 (effet gravitationnel moyen de la planète terre à sa surface) est reliée à une anomalie locale de densité $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ (ρ_0 : densité « de référence ») par

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = \mathcal{G}\frac{\partial}{\partial x_3}\int_\Omega \frac{1}{\parallel \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \parallel}\Delta\rho(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y \tag{1}$$

eq1.13

où Ω est la région de l'espace susceptible de contenir l'anomalie $\Delta\rho$ et $\mathcal{G} = 6,672\,10^{-11}$ $\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ est la constante gravitationnelle apparaissant dans la loi de Newton.

On envisage une situation de type suivant :



Une région souterraine parallélipipédique Ω est découpée en n blocs parallélipipédiques $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ sur chacun desquels l'anomalie est supposée constante :

$$\Delta\rho(\boldsymbol{y}) = \Delta\rho_j \qquad (\boldsymbol{y} \in \Omega_j)$$

Un réseau de m points de mesure $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^m$ est disposé dans le plan $x_3 = 0$ (surface libre).

On peut ainsi former une relation linéaire matricielle entre les mesures $\gamma_i = \gamma(\boldsymbol{x}^i)$ et les inconnues $\Delta\rho_j$:

$$\gamma = G\Delta\rho \qquad \text{avec } G_{ij} = \mathcal{G}\frac{\partial}{\partial x_3}\int_{\Omega_j}\frac{1}{\parallel \boldsymbol{x}^i - \boldsymbol{y} \parallel}\,\mathrm{d}V_y = \mathcal{G}I_{ij}$$

Les valeurs des coefficients I_{ij} définis ci-dessus sont connues analytiquement. Pour un bloc parallélipipédique Ω_j défini par $a_k \le x_k - x_k^i \le b_k$ ($1 \le k \le 3$), la formule de Nagy (admise) donne :

$$\begin{aligned} I_{ij} = F(b_1,b_2,b_3) + F(b_1,a_2,a_3) + F(a_1,b_2,a_3) + F(a_1,a_2,b_3) \\ - F(a_1,a_2,a_3) - F(a_1,b_2,b_3) - F(b_1,a_2,b_3) - F(b_1,b_2,a_3) \end{aligned}$$

avec

$$F(z_1, z_2, z_3) = z_1 \operatorname{Log}(r+z_2) + z_2 \operatorname{Log}(r+z_1) - |z_3|\text{signe}(z_1) \arcsin v$$

$$v = \frac{z_2^2 + z_3^2 + z_2 r}{(r+z_2)\sqrt{z_2^2+z_3^2}}, \quad r = \sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}$$

Travail proposé :

- Construire numériquement la relation linéaire $\gamma = G\Delta\rho$. Etudier son conditionnement (effets du nombre de points de mesure, du nombre d'inconnues, de la profondeur de Ω et plus généralement de l'éloignement de Ω par rapport à la zone de mesure) ;
- Choisir une méthode d'inversion et l'appliquer à diverses configurations de Ω et $\boldsymbol{x}^i$. Faire tous commentaires et interprétations pertinents.
- Etudier (numériquement) l'influenmce d'erreurs (simulées) sur les données γ_i.