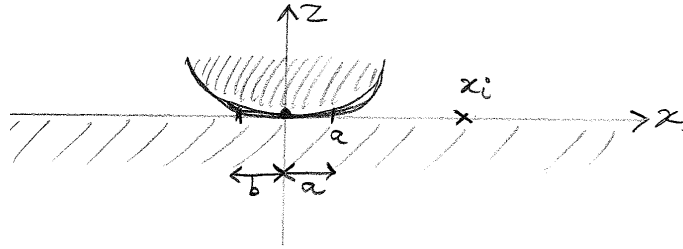


Cours « Problèmes inverses »

Sujet 7: identification de contraintes de contact



On considère un poinçon en contact avec un massif semi-infini élastique (E, ν), dans le cadre des déformations planes. La zone de contact est $-b \leq x \leq a$. On cherche à reconstruire le vecteur-contrainte

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = p\mathbf{e}_z + q\mathbf{e}_x$$

dans la zone de contact, à partir de mesures de u_z (déplacement vertical) et ε_{xx} (déformation tangentielle) en des abscisses x_i de mesure situées hors de la zone de contact ($x_i < -b$ ou $x_i > a$).

La théorie de l'élasticité donne les relations suivantes (admisses) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(x, 0) &= -\frac{2(1-\nu)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{q(s)}{x-s} ds, & q(-b) = q(a) = 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial x}(x, 0) &= -\frac{2(1-\nu)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds, & p(-b) = p(a) = 0 \end{aligned} \quad (x_i < -b \text{ ou } x_i > a) \quad (1)$$

Problème inverse : connaissant $\partial u_z / \partial x(x_i)$ et $\varepsilon_{xx}(x_i)$, trouver $p(x)$, $q(x)$.

Discrétisation : on propose de découper le segment $[-b, a]$ en N segments égaux (de longueur $(a+b)/N$), et d'introduire une interpolation linéaire sur chaque segment et continue des inconnues $p(x)$, $q(x)$. Les équations intégrales (1) prennent la forme discrétisée

$$\varepsilon_{xx}(x_i, 0) = -\frac{2(1-\nu)}{\pi E} \sum_{j=1}^{N-1} B_{ij} q_j, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x}(x_i, 0) = -\frac{2(1-\nu)}{\pi E} \sum_{j=1}^{N-1} B_{ij} p_j$$

avec

$$B_{ij} = \int_{s_j - \Delta x}^{s_j} \left(1 + \frac{s - s_j}{\Delta x}\right) \frac{ds}{s - x_i} + \int_{s_j}^{s_j + \Delta x} \left(1 - \frac{s - s_j}{\Delta x}\right) \frac{ds}{s - x_i} \quad (s_j = -b + j\Delta x)$$

de sorte que

$$\{\varepsilon_{xx}(x_i, 0)\} = G\{q_j\}, \quad \left\{\frac{\partial u_z}{\partial x}(x_i, 0)\right\} = G\{p_j\} \quad (2)$$

Travail proposé :

- Construire numériquement la relation linéaire (2) pour un choix d'information expérimentale (nombre et emplacement des nœuds capteurs) ;
- Etudier numériquement le conditionnement de cette relation et l'influence des principaux paramètres ;
- Choisir une méthode d'inversion et l'appliquer à des données simulées au moyen de (1) ; étudier numériquement l'influence d'erreurs (simulées) sur les données.