

# CHAPITRE II: ECOULEMENTS UNIDIMENSIONNELS STATIONNAIRES CONTINUS

## 1 Hypothèses simplificatrices

Nous allons nous intéresser à l'écoulement dans une tuyère dite de "Laval". Historiquement, la turbine à vapeur est le fruit du travail de nombreux chercheurs et ingénieurs à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Parmi les contributions notoires, on peut mentionner celles du britannique Charles Algernon Parsons et celles du suédois Carl Gustaf Patrick de Laval. Laval fut le premier à concevoir des jets et des augets adaptés à une utilisation efficace de la vapeur. On peut voir sur la figure (1) une de ces turbines à vapeur. La tuyère est un organe complexe constitutif des avions, fusées ou souffleries.

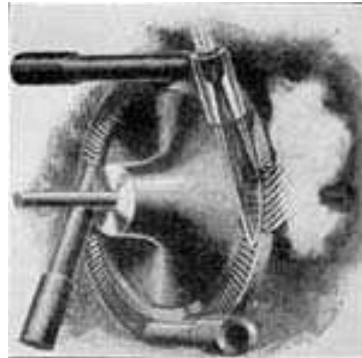


Figure 1: Tuyère de Laval.

Nous allons déterminer les différentes gammes de fonctionnement sur un organe représenté sur la figure (2) en vue d'une optimisation de la poussée. L'intérêt de la tuyère est d'appliquer dans le cadre d'hypothèses simplificatrices dont nous reparlerons, les lois de bilan vues au chapitre I.

La tuyère est alimentée par un fluide issu d'une chambre de combustion ou réservoir, où sont

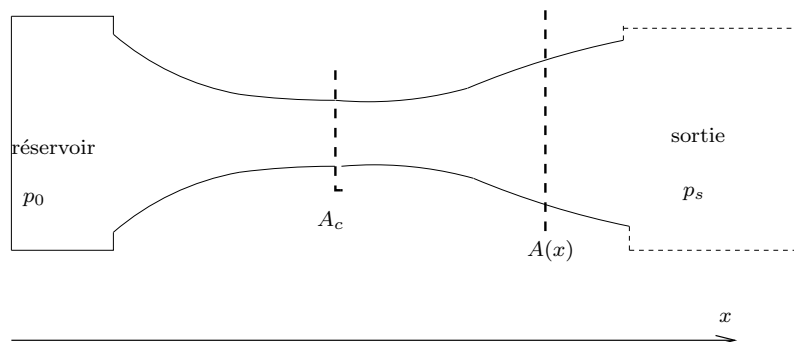


Figure 2: Schéma de principe d'une tuyère de Laval. On désigne par  $A_c$  la plus petite section ou encore **section au col**, et  $A(x)$  la section de la tuyère à l'abscisse  $x$ .

brûlés, de l'air et du kérosène dans le cas d'un moteur d'avion ou bien, des ergols liquides ou solides dans le cas d'un moteur fusée. Nous désignerons par  $p_0$ ,  $\rho_0$  et  $T_0$ , les conditions du fluide supposé

pratiquement à l'arrêt dans le réservoir.

De façon plus générale on appellera **conditions génératrices** les valeurs de la pression, de la masse volumique et de la température, notées respectivement  $p_0$ ,  $\rho_0$  et  $T_0$  en un endroit où la vitesse est nulle.

Le fluide est homogène et constitué d'un seul constituant. D'autre part nous ferons l'hypothèse que l'écoulement est unidimensionnel. Les différentes grandeurs, masse volumique, pression, température, vitesse, ne dépendent alors que de la section  $A(x)$  (cf figure (2)) considérée:

$$\text{sur } A(x) \quad p = p(x), \quad \rho = \rho(x), \quad \vec{u} = U(x)\vec{i}, \quad T = T(x) \quad (1)$$

Cette hypothèse est une approximation. On ne s'autorise pas une finesse de résolution incluant les variations selon  $y$  et  $z$ ; de sorte que l'on ne peut pas travailler avec les bilans locaux mais globaux sur un domaine à définir. Il faut bien souligner que cette approximation n'est pas valable près des parois où il faut respecter la condition de glissement. On constate grossièrement en regardant l'écoulement dans une conduite que l'hypothèse unidimensionnelle est meilleure pour un écoulement turbulent et lorsque la section  $A(x)$  évolue lentement:  $\frac{dA}{A} \ll 1$ . Cette approximation se révèle insuffisante quand il s'agit de déterminer les performances avec une incertitude inférieure à quelques pour cent. Il faut alors supposer que les quantités dépendent de  $y$  et de  $z$ , et disposer de codes numériques pour la résolution.

Le fluide est supposé parfait (voir équations (49) et (60) du chapitre I), l'écoulement est compressible,  $\frac{\partial}{\partial t}$ , adiabatique (pas d'apport de chaleur extérieur) il n'y a pas d'efforts extérieurs. Nous recherchons la géométrie de la tuyère permettant une accélération continue du fluide.

Dans ce chapitre nous nous limitons au cas des écoulements stationnaires, le cas instationnaire sera envisagé au chapitre III.

## 2 La relation d'Hugoniot

Dans un premier temps nous allons évaluer l'influence de la géométrie de la tuyère ainsi que l'évolution de la pression, la masse volumique, la température et la vitesse. Nous utiliserons donc sur un volume de fluide défini ci-dessous les lois de bilan globales de masse, de quantité de mouvement et d'énergie données au chapitre I en (35), (39) et (45). L'écoulement est en outre supposé continu, il n'y a pas lieu de considérer l'existence d'une surface de discontinuité  $\Sigma$ . On notera  $p_i$ ,  $\rho_i$ ,

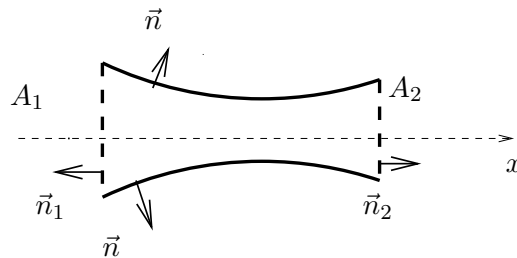


Figure 3: Volume de contrôle délimité par les parois de la tuyère, et les sections  $A_1$  et  $A_2$ . Les normales extérieures sont représentées sur le schéma.

$T_i$ ,  $\vec{u}_i$ , les expressions de la pression, de la masse volumique, de la température et de la vitesse sur la section  $A_i$ . L'écoulement étant stationnaire les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles,  $\vec{u} \cdot \vec{n}$  est nul; le fluide étant parfait. Compte tenues des hypothèses simplificatrices énoncées ci-dessus, le bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie conduisent aux équations suivantes:

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 = \dot{m} \quad (2)$$

<sup>1</sup>Mécanique des fluides, S. Candel, Editions Dunod

où  $\dot{m}$  est une constante. Physiquement  $\dot{m}$  représente le débit massique traversant la section.

$$A_1 p_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA = A_2 p_2 + \rho_2 u_2^2 A_2 \quad (3)$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (4)$$

En prenant un volume de mesure infinitésimal, c'est à dire  $A_2 = A + dA$  sur laquelle  $p_2 = p + dp$ ,  $\rho_2 = \rho + d\rho$ ,  $T_2 = T + dT$ ,  $u_2 = u + du$ , il est possible d'exprimer (2), (3) et (4) sous forme différentielle. Dans l'équation (2)  $\dot{m}$  est une constante, on a donc:

$$d(\rho u A) = 0 \quad (5)$$

On peut écrire également (3) sur un volume infinitésimal sous la forme:

$$Ap + \rho u^2 A + p dA = (A + dA)(p + dp) + (\rho + d\rho)(u + du)^2(A + dA) \quad (6)$$

En ne gardant que les termes dominants (6) devient:

$$Adp + d\rho u^2 A + 2\rho u du A + \rho u^2 dA = 0 \quad (7)$$

En multipliant (5) par  $u$  et en explicitant la différentielle on obtient:

$$d\rho u^2 A + \rho u du A + \rho u^2 dA = 0 \quad (8)$$

On peut alors simplifier (7) qui devient:

$$dp + \rho u du = 0 \quad (9)$$

Enfin l'équation (4) devient simplement en la différentiant:

$$dh + u du = 0 \quad (10)$$

En utilisant la dérivée logarithmique pour  $\rho u A = \dot{m}$ , on obtient:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (11)$$

A ces équations il faut rajouter la loi de comportement du gaz. Nous la prendrons dans un premier temps sous une forme très générale  $p = g(\rho, s)$  que l'on différencie ci-dessous:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds \quad (12)$$

L'écoulement est un écoulement de fluide parfait adiabatique et on a supposé que les conditions étaient uniformes dans le réservoir donc en particulier l'entropie. L'écoulement est alors homoentropique (cf Chapitre I) et  $s$  est constante partout,  $ds = 0$ , on a donc:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho = c^2 d\rho \quad (13)$$

L'équation (9) devient alors:

$$c^2 d\rho + \rho u du = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{u^2 du}{c^2 u} = 0 \quad (14)$$

On déduit alors de (14), et de (11) la relation d'Hugoniot reliant la section, la vitesse et le nombre de mach  $\frac{u}{c}$ :

$$\frac{dA}{A} + (1 - M^2) \frac{du}{u} = 0 \quad (15)$$

Supposons dans un premier temps que le nombre de Mach tende alors vers 0 (limite de l'écoulement soit incompressible) pour accélérer le fluide  $du > 0$ , il faut que  $dA < 0$ , c'est à dire que la tuyère soit convergente. Lorsque le nombre de Mach croît tout en restant inférieur à 1, c'est à dire en régime subsonique, il faut également avoir un convergent. Imaginons maintenant que l'écoulement soit supersonique, alors  $M > 1$ , pour avoir  $du > 0$ , il faut alors  $dA > 0$ , c'est à dire un divergent. Dans le cas d'une tuyère comme celle représentée en Figure(2), si l'écoulement passe par la valeur  $M = 1$  quelque part alors ce ne peut être qu'au col pour lequel  $dA = 0$ . On veut concevoir une tuyère qui accélère **continument** le fluide depuis le réservoir où la vitesse est nulle  $M = 0$ , il faut alors augmenter le nombre de Mach tout d'abord de 0 à 1. Pour cela il faut donc que la tuyère soit convergente. La tuyère est ensuite divergente pour accélérer le fluide il faut que l'écoulement devienne supersonique. On sait qu'alors quelque part  $M = 1$ , et ce ne peut être qu'au col. La tuyère idéale pour accélérer continument le fluide est donc représentée ci-dessous: **Une tuyère**

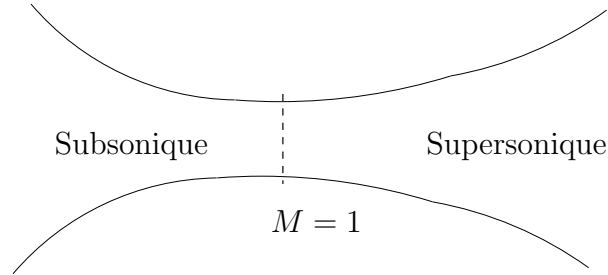


Figure 4: Configuration d'une tuyère permettant une accélération continue du fluide

**pour laquelle  $M = 1$  au col est dite amorcée** . Il faut bien noter que l'on peut, sur cette tuyère, avoir également un régime subsonique dans le convergent,  $M = 1$  au col et à nouveau un régime subsonique dans le divergent. Dans ce cas on ralentira l'écoulement après l'avoir accéléré. Nous allons préciser plus loin comment imposer un écoulement supersonique dans le divergent.

### 3 Evolution des paramètres de l'écoulement

Afin d'aller plus loin nous allons supposer que le fluide peut être modélisé par le modèle du gaz parfait polytropique (cf chapitre I à partir de l'équation (17)). Le fluide étant homogène, l'équation (4) s'écrit :

$$C_p T_1 + \frac{M_1^2 c_1^2}{2} = C_p T_0 \quad (16)$$

On rappelle que pour un gaz parfait polytropique  $dh = C_p dT$  avec  $C_p$  constante, on a alors  $h = C_p T + q_f$  où  $q_f$  est appelé l'enthalpie de formation, et  $q_f$  ne dépend que du fluide. En outre on a vu au chapitre I équation (65) que  $c^2 = \gamma RT$ , on obtient donc à partir de (16):

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{C_p}{C_p + \frac{\gamma R}{2} M_1^2} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \quad (17)$$

Le fluide étant parfait et homoentropique on a  $p = \rho RT$  et  $p\rho^{-\gamma} = cte$  on a :

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad (18)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (19)$$

Les variations en fonction du nombre de mach sont représentés sur la figure (5). Ainsi en tout point de la tuyère si l'on connaît sur une section  $A(x)$  le nombre de Mach ainsi que les conditions génératrices, on peut avoir accès à la pression, à la température et à la masse volumique. Ces quantités sont des quantités décroissantes du nombre de Mach.

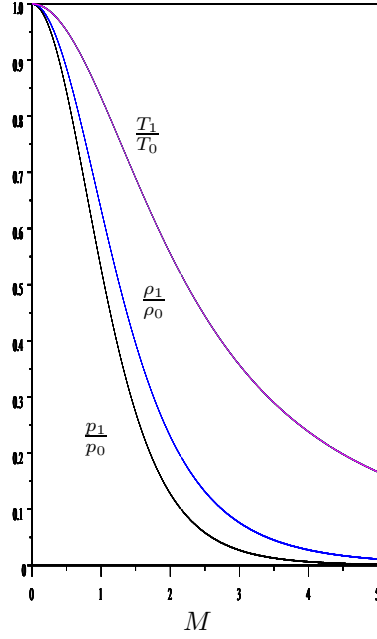


Figure 5: Rapports de pression (18), de masse volumique (19), et de température (17)

## 4 Résolution du problème

Le système à résoudre est le suivant: en supposant connues les conditions génératrices ainsi que la géométrie que valent sur une section  $A(x)$ , la pression, la température, la vitesse, la masse volumique? Les équations à résoudre sont rappelées ci dessous:

$$\rho u A = \dot{m} \quad (20)$$

$$dp + \rho u du = 0 \quad (21)$$

$$C_p T + \frac{u^2}{2} = C_p T_0 \quad (22)$$

$$p = \rho R T \quad (23)$$

Les inconnues sont  $p, \rho, T, M$  (ou  $u$ ),  $\dot{m}$  pour 4 équations. Une donnée supplémentaire est nécessaire pour résoudre le problème dans la tuyère.

Supposons  $\dot{m}$  connu. On a:

$$\dot{m} = \rho u A = \rho M c A = \rho M \sqrt{\gamma R T} A = \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{\frac{T}{T_0}} M (\sqrt{\gamma R T_0} \rho_0) A = G(M) \mathcal{D} A \quad (24)$$

où  $\mathcal{D}$  représente les données du problème,  $G(M)$  ne dépend que de  $M$  du fait de (17) et (19). La fonction  $G(M)$  est représentée sur la figure (6). Supposons connu le nombre de Mach  $M_c$  au col de section  $A_c$ . Le débit massique  $\dot{m}$  solution de (24) est alors déterminé par:

$$\dot{m} = G(M_c) A_c \mathcal{D} \quad (25)$$

Sur une section  $A(x)$  quelconque, le nombre de mach est noté  $M$  et il est solution de l'équation:

$$\dot{m} = G(M_c) A_c \mathcal{D} = G(M) A \mathcal{D} \rightarrow C = \frac{A_c}{A} G(M_c) \quad (26)$$

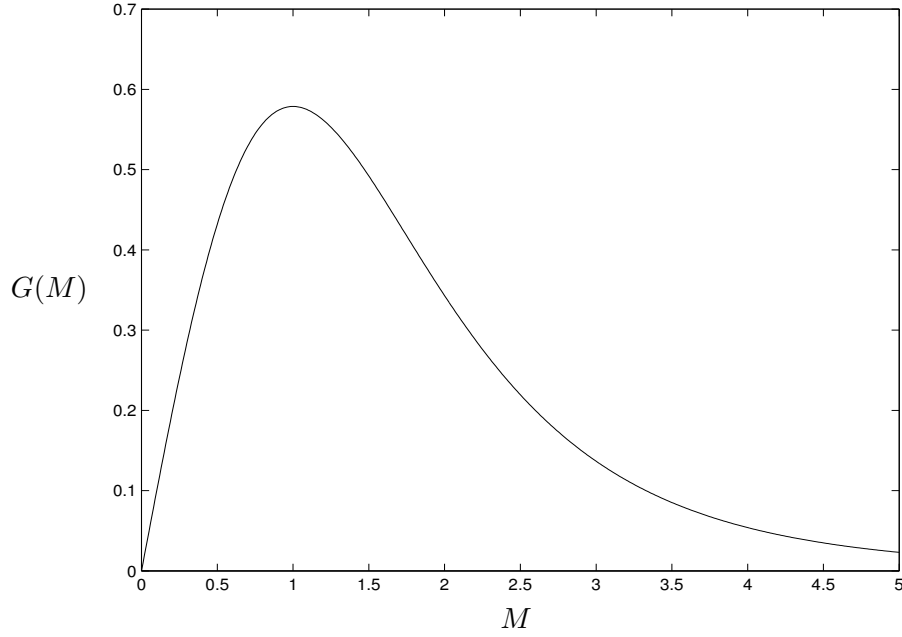


Figure 6: Fonction  $G(M)$  en fonction de  $M$

Ainsi  $G(M)$  est connu, cependant la fonction  $G$  n'est pas bijective. Une discussion plus fine des régimes d'écoulement est alors nécessaire. La discussion de l'équation (15) a montré qu'au col le nombre de Mach ne peut être supérieur à 1. Si  $M_c$  est inférieur à l'unité l'écoulement reste subsonique partout. Le maximum de la fonction  $G$  étant atteint pour  $M = 1$ , la résolution de (26) en imposant  $M < 1$ , définit  $M$  pour chaque section  $A$  de façon unique. Lorsque la tuyère est amorcée, c'est à dire  $M_c = 1$ , dans le convergent l'écoulement est subsonique  $M \leq 1$ , comme précédemment, on obtient une valeur unique de  $M$  cf Figure(6). On en déduit en résolvant (17), (18) et (19) les valeurs de  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  et  $u$ . Dans la partie divergente de la tuyère tout dépendra si l'écoulement devient subsonique ou supersonique. Déterminons le nombre de Mach  $M_s$  sur la section de sortie  $A_s$ :

$$\dot{m} = G(1) A_c \mathcal{D} = G(M_s) A_s \mathcal{D} \rightarrow G(M_s) = \frac{A_c}{A_s} G(1) \quad (27)$$

or  $\frac{A_c}{A_s} < 1$  donc  $G(M_s) < G(1)$ , il existe deux solutions possibles  $M_{s1} < 1$  et  $M_{s2} > 1$  cf figure (7). Ces deux valeurs vont définir respectivement deux différentes valeurs pour la pression de sortie respectivement  $p_{s1}$  et  $p_{s2}$  avec  $p_{s1} > p_{s2}$ . Ainsi pour imposer une accélération continue dans la tuyère il faudra que l'écoulement devienne supersonique dans le divergent, ce qui sera obtenu en réglant la pression de sortie.

## 5 Influence de la pression de sortie

Supposons que l'on puisse régler la pression de sortie. La limite entre le jet et l'atmosphère ambiante est une surface de glissement,  $p_e = p_s$  avec  $p_e$  pression extérieure (chapitre IV). Nous savons que s'il y a mouvement du fluide dans la tuyère la pression de sortie est inférieure à  $p_o$  pression génératrice (figure (7)). Si la pression  $p_e$  est supérieure à  $p_0$  il n'y a pas d'écoulement. Lorsque la pression diminue de  $p_0$  jusqu'à  $p_{s1}$ , l'écoulement reste subsonique dans toute la tuyère et pour  $p_e = p_{s1}$   $M = 1$  au col. Considérons le cas où  $p_{s2} < p_s < p_{s1}$ . D'après la figure (7), on a  $M_{s1} < M_s < M_{s2}$ . On aurait alors  $G(M_s)$  supérieur à  $G(M_{s1})$  ce qui est impossible. En effet,  $G(M_s) > G(M_{s1})$  implique compte tenu de (27):

$$\frac{A_c}{A_s} G(M_c) > G(M_{s1}) = \frac{A_c}{A_s} G(1) \Rightarrow G(M_c) > G(1) \quad (28)$$

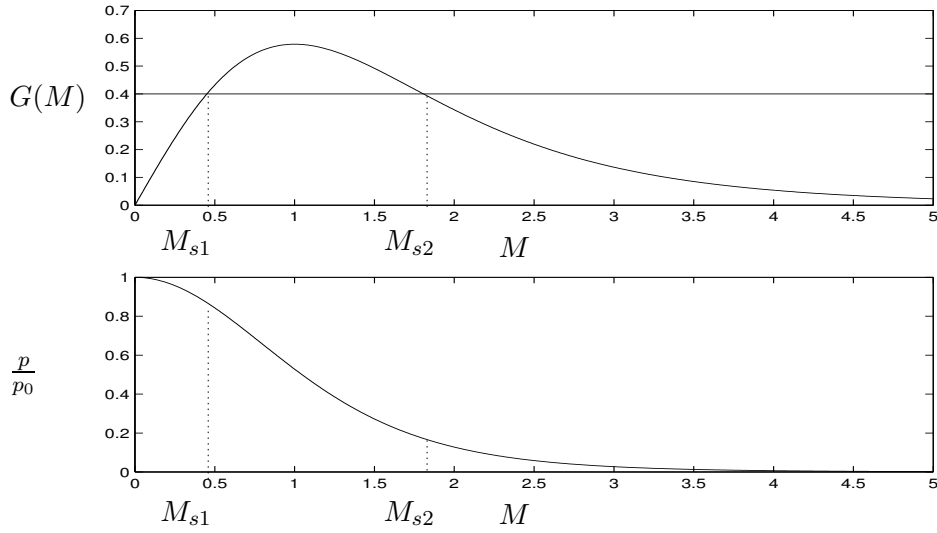


Figure 7: Fonction  $G(M)$  en fonction de  $M$  et  $\frac{p}{p_0}$  en fonction de  $M$

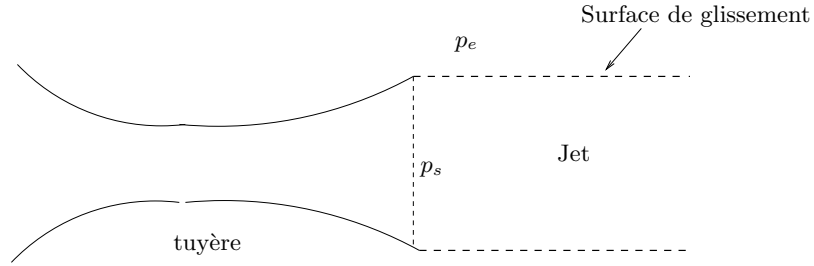


Figure 8: Jet à la sortie du jet

Or la fonction  $G$  ne peut être supérieure à 1. **Il est impossible de décrire de manière continue la gamme de pression  $p_{s2} < p_s < p_{s1}$  ainsi que la gamme de pression inférieure à  $p_{s2}$ .** Lorsque la tuyère est amorcée  $M_c = 1$ , il n'y a que deux régimes possibles ceux décrits précédemment dans les cas intermédiaires, il faudra que l'écoulement s'adapte, d'où les différentes configurations que l'on peut observer sur la figure (9).

Lorsque la pression extérieure est comprise entre  $p_{s1}$  et  $p_0$  l'écoulement est continu et subsonique dans la tuyère, avec  $M = 1$  au col pour  $p = p_{s1}$  (figure (reftuy2)). Lorsque la pression augmente l'écoulement n'est pas continue dans la gamme  $p_{s2} < p_s < p_{s1}$ , on a alors une onde de choc droite en  $x$  (qui fera l'objet du cours IV) qui se déplace dans le divergent (figure (8) C)), cette onde de choc atteint la section de sortie  $x = x_\Sigma$  pour une pression  $p_{s3}$  supérieure à  $p_{s2}$ . Apparaissent ensuite dans la gamme de pression  $p_{s2} < p_s < p_{s3}$  des ondes de chocs obliques et des détente à la sortie du divergent (figure (9)). Ces structures feront l'objet du chapitre V. Ces chocs obliques s'accompagnent d'une forte augmentation de la température pouvant conduire à une ionisation des gaz, la succession de chocs et de détente est alors visible dans le jet à l'oeil nu (voir figure(1) de l'introduction). Lorsque la pression de sortie atteint enfin la valeur  $p_{s2}$  l'écoulement est de nouveau continu, subsonique dans le convergent est supersonique dans le divergent. Lorsque la pression diminue encore, un système d'ondes de détente apparaît en sortie de tuyère.

## 6 Calcul de la poussée

L'objectif de cette section est de calculer la poussée, c'est à dire les efforts de pression, s'exerçant sur la tuyère (en traits hachurés sur la figure (2)). La tuyère est soumise aux efforts de pression dus au fluide et à l'atmosphère ambiante. Soit donc à calculer:

$$\vec{F} = \int_{\text{tuyère}} (p - p_a) \vec{n} ds \quad (29)$$

avec  $\vec{n}$  normale sortante. On applique au fluide contenu dans la tuyère, le théorème des quantités de mouvement au domaine fluide délimité par la surface de la tuyère et la section de sortie  $A_s$ , on note  $\partial D = \text{tuyère} + A_s$ . Le bilan de quantité de mouvement donné en équation (39) du chapitre I devient avec les hypothèses :

$$\int_{\partial D(t)} (\rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) + p \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (30)$$

On rappelle que sur une surface fermée on a :  $\int_S p_a \vec{n} ds = 0$ . On a donc:

$$\vec{F} + \int_{A_s} (p - p_a) \vec{n} ds + \int_{A_s} \rho \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (31)$$

La poussée de la tuyère vaut donc:

$$\vec{F} = - A_s (p_s - p_a) \vec{i} - \dot{m} u_s \vec{i} \quad (32)$$

La poussée est maximale quand  $p_a = p_s$ , on dit alors que la tuyère est adaptée.

Pour conclure ce chapitre, il faut noter que la section  $A(x)$  de la tuyère peut coïncider avec une paroi solide comme dans le cas d'une tuyère ou bien avec un tube de courant. Ainsi, tous les résultats de ce chapitre peuvent être appliqués qu'il y ait ou pas une tuyère pourvu que l'écoulement soit unidimensionnel, parfait et isentropique. De plus si le gaz est parfait polytropique, les relations (17), (18) et (19) restent valables.



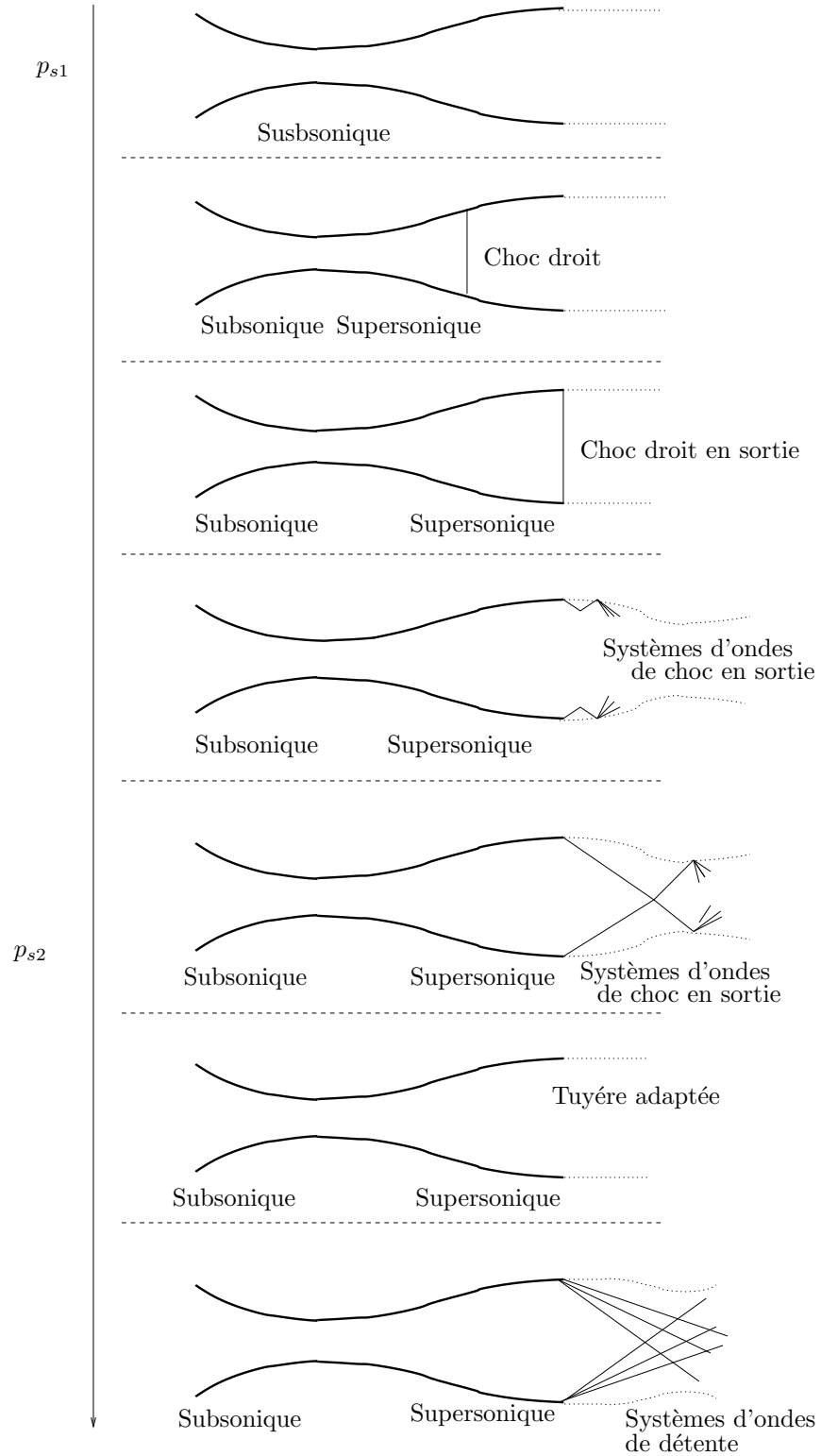


Figure 9: Allure de l'écoulement lorsque la pression de sortie diminue à partir de la pression génératrice  $p_0$