1 Contrôle des connaissances 2010/2011

Remarque préliminaire

On s'attachera dans la rédaction à être aussi précis que possible. Ainsi,

- lors de l'écriture de chaque problème d'optimisation et de chaque sous-problème issu de la décomposition, on précisera les variables par rapport auxquelles se fait l'optimisation, ainsi que les espaces et les parties de ces espaces dans lesquels vivent ces variables,
- on distinguera clairement les variables à optimiser des variables qui sont figées à l'étape du calcul considéré.

Les trois problèmes proposés sont indépendants, et chacun d'eux est organisé en questions aussi autonomes que possible. Le premier problème porte sur l'application du Principe du Problème Auxiliaire dans le cas sans contrainte explicite, alors que les second et troisième problèmes portent sur la mise en œuvre des méthodes de décomposition (prix, allocation de ressources et prédiction).

Premier problème : optimisation avec recours

On s'intéresse à la gestion globale d'un système de production en environnement stochastique. On choisit pour ce système un investissement v dont le coût est noté $I(v)$. Une fois le niveau v d'investissement fixé, le fonctionnement du système dépend, d'une part d'une perturbation aléatoire ω (imposée par la nature), et d'autre part d'une variable de commande u, choisie par le gestionnaire du système au vu du niveau d'investissement v et **connaissant la valeur prise par la perturbation** ω, (d'où le nom d'*optimisation avec recours*). Le fonctionnement se traduit par un coût de $F(v, u, \omega)$, et on cherche alors à optimiser l'ensemble des coûts, c'est-à-dire à faire le meilleur compromis entre le coût d'investissement et l'*espérance* du coût de fonctionnement.

0. Formalisation du problème

La variable d'investissement v prend ses valeurs dans un ensemble admissible V^{ad} lui même inclus dans un espace de dimension finie $\mathcal{V}$.
On suppose que la perturbation aléatoire ω qui affecte le fonctionnement du système prend ses valeurs dans un ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_N\}$ de cardinal N, et on note π_i la probabilité associée à la valeur ω_i de la perturbation ($\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$). À chaque valeur ω_i correspond un choix u_i de la variable de commande du système, de telle sorte que l'espérance du coût de fonctionnement se met sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i F(v, u_i, \omega_i) \ .$$

Supposant que chaque u_i prend ses valeurs dans un ensemble admissible $U_i^{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{U}$, le problème posé consiste à minimiser la somme des coûts par rapport à toutes les variables v, $u_1, \dots, u_N$:

$$\min_{\left(v \in V^{\mathrm{ad}}, u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}\right)} I(v) + \sum_{i=1}^{N} \pi_i F(v, u_i, \omega_i) \ . \tag{1}$$

1. Résolution adaptée

On décide de résoudre le problème (1) en séparant les phases de minimisation en v d'une part, et en les u_i d'autre part. On note $\varphi(v, \omega_i)$ le résultat de la minimisation de F par rapport à u_i :

$$\varphi(v, \omega_i) = \min_{u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}} F(v, u_i, \omega_i) \ .$$

On rappelle que, moyennant des hypothèses de convexité et de différentiabilité sur F, la fonction φ est elle aussi convexe et différentiable, les gradients partiels en v de φ et F étant liés par :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(v, \omega_i) = \frac{\partial F}{\partial v}\left(v, u_i^\sharp(v), \omega_i\right) \ , \tag{2}$$

où $u_i^\sharp(v)$ est une solution du problème de la minimisation de F par rapport à u_i.

1.1 Écrire à l'aide de la fonction φ le problème de minimisation en v que l'on obtient à partir du problème (1) en ayant effectué les minimisations par rapport aux variables u_i.

1.2 Écrire une itération complète de l'algorithme de décomposition/coordination obtenu en :

- minimisant par rapport aux u_i à $v = v^{(k)}$ fixé (phase de décomposition) ;
- effectuant un pas de gradient sur le problème obtenu à la question 1.1 (coordination).

On remplacera les gradients de φ par leur expression (2) afin que l'algorithme ne fasse intervenir que les fonctions I et F.

2. Résolution par le Principe du Problème Auxiliaire

On résout maintenant le problème (1) en utilisant le Principe du Problème Auxiliaire (**PPA**). On choisit la famille des noyaux $K^{(k)}$ comme suit :

$$K^{(k)}(v, u_1, \ldots, u_N) = \frac{1}{2\rho}\|v\|^2 + \sum_{i=1}^{N} \pi_i F\left(v^{(k)}, u_i, \omega_i\right) \ , \tag{3}$$

avec $\rho > 0$, et on choisit la suite de réels positifs $\epsilon^{(k)}$ comme étant tous égaux à la valeur 1.
On choisit de considérer tout le critère (1) comme étant différentiable ($J^\Sigma \equiv 0$).

2.1 Écrire le problème de minimisation obtenu à la k-ème itération en appliquant le **PPA** avec les noyaux $K^{(k)}$ et réels $\epsilon^{(k)}$ définis ci-dessus (sans chercher à décomposer ce problème).

2.2 Indiquer comment modifier les noyaux $K^{(k)}$ dans le cas où la fonction F n'est pas fortement convexe en u.

2.3 Écrire les $N + 1$ sous-problèmes obtenus en décomposant le problème de minimisation obtenu à la question 2.1.

2.4 Écrire la variante séquentielle de la décomposition précédente en injectant la solution des sous-problèmes en u_i dans le sous-problème en v.

2.5 Comparer cette dernière variante avec l'algorithme obtenu par la résolution adaptée de la question 1.

3. Extension

On suppose que le problème consiste à minimiser la somme de l'espérance et de la variance du coût de fonctionnement, et non l'espérance uniquement comme dans (1). Moyennant quelques transformations élémentaires, le problème se met sous la forme :

$$\min_{\left(v \in V^{\mathrm{ad}}, u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}\right)} I(v) + \sum_{i=1}^{N} \pi_i F(v, u_i, \omega_i) + \left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i G(v, u_i, \omega_i)\right)^2 \ . \tag{4}$$

Sans entrer dans des détails calculatoires excessifs, indiquer

3.1 pourquoi la résolution adaptée ne conduit plus à un algorithme décomposable ;

3.2 pourquoi l'approche par le **PPA** permet toujours de décomposer le problème moyennant un choix judicieux des noyaux $K^{(k)}$; donner alors un tel choix.

Deuxième problème : trajectoires aérospatiales

On cherche à mettre en orbite un satellite de poids aussi élevé que possible (et donc à **minimiser la consommation de carburant**) en utilisant un engin spatial composé de deux étages. À un certain point de la trajectoire, le premier étage se sépare et revient sur terre tandis que le second étage poursuit sa trajectoire de mise en orbite. L'idée est de décomposer la résolution du problème d'optimisation associé à ce lancement, et donc la trajectoire globale, en deux sous-problèmes correspondant à la montée initiale de l'engin spatial et à la mise en orbite du second étage seul. Pour simplifier, on formule le problème en **temps discret** sur un horizon $[t_i, t_f]$ **donné**[1] ; on suppose enfin que l'instant t_s de séparation des deux étages appartient à l'intervalle $[t_i, t_f]$ et est **connu**.

0. Formalisation du problème. L'horizon d'optimisation $[t_i, t_f]$ est scindé en $[t_i, t_s]$ et $[t_s, t_f]$.

(P$_1$) **Phase de montée initiale.** Notant $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$ l'état de l'engin spatial à l'instant t, notant $u_1(t) \in \mathbb{R}^m$ la commande qu'on lui applique à ce même instant, l'équation décrivant l'évolution au cours temps de l'état de l'engin est :

$$\begin{aligned} x_1(t_i) &= x_i \;, \\ x_1(t+1) &= f_1\left(x_1(t), u_1(t), t\right) \;, \quad t = t_i, \ldots, t_s - 1 \;, \end{aligned} \tag{5a}$$

où l'état **initial** x_i est supposé connu ; la consommation de carburant associée est de la forme :

$$\sum_{t=t_i}^{t_s-1} L_1(x_1(t), u_1(t), t) \;. \tag{5b}$$

(P$_2$) **Phase de mise en orbite.** De même, on note $x_2(t) \in \mathbb{R}^n$ l'état du second étage à l'instant t et $u_2(t) \in \mathbb{R}^m$ la commande associée. La dynamique du second étage est alors :

$$\begin{aligned} x_2(t+1) &= f_2\left(x_2(t), u_2(t), t\right) \;, \quad t = t_s, \ldots, t_f - 1 \;, \\ x_2(t_f) &= x_f \;, \end{aligned} \tag{6a}$$

l'état **final** x_f étant supposé connu ; la consommation de carburant associée s'écrit :

$$\sum_{t=t_s}^{t_f-1} L_2(x_2(t), u_2(t), t) \;. \tag{6b}$$

Enfin, la transition entre ces deux phases est assurée par une contrainte de raccordement portant sur l'état du système à l'instant t_s :

$$\varphi\big(x_1(t_s)\big) - x_2(t_s) = 0 \;, \tag{7}$$

où φ est une application bijective de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

1. Résolution par décomposition/coordination.

1.1 Donner l'expression du problème global de minimisation du carburant associé à la formulation (5)–(6)–(7). On précisera dans cette formulation quelles sont les contraintes pouvant être considérées comme localisées dans une phase de la trajectoire, et quelles sont les contraintes couplant les phases entre elles.

[1] les instants constituant cet intervalle de temps sont donc $t_i, t_i + 1, \ldots, t_f - 1, t_f$

1.2 Donner la formulation des deux sous-problèmes correspondant aux différentes phases de la trajectoire à l'étape k d'un algorithme de décomposition par les prix, ainsi que la formule de remise à jour des prix de coordination. Discuter de l'admissibilité de la solution obtenue à chaque itération, et commenter (du point de vue de la *commande optimale*) la nature des sous-problèmes ainsi formulés.

1.3 Répondre aux mêmes questions dans le cadre de la décomposition par allocation de ressources.

1.4 Reprendre les questions précédentes dans le cadre de la décomposition par prédiction de type point-fixe. On justifiera le choix de gestion de la contrainte couplante à l'une ou l'autre des phases de la trajectoire.

2. Phase supplémentaire de retour sur terre. On décide alors de prendre en compte la rentrée sur terre du premier étage de l'engin spatial. Cette phase commence à l'instant de séparation t_s, et on suppose que l'instant $\widehat{t}_f$ auquel elle se termine est fixé : elle se déroule donc sur l'intervalle de temps discret $[t_s, \widehat{t}_f]$.

(P_3) **Phase de retour sur terre.** On note $x_3(t) \in \mathbb{R}^n$ l'état du premier étage à l'instant t et $u_3(t) \in \mathbb{R}^m$ la commande associée. La dynamique de retour sur terre se met sous la forme :

$$\begin{aligned} x_3(t+1) &= f_3\left(x_3(t), u_3(t), t\right) , \quad t = t_s, \ldots, \widehat{t}_f - 1 , \\ x_3(\widehat{t}_f) &= \widehat{x}_f , \end{aligned} \tag{8a}$$

l'état final $\widehat{x}_f$ étant supposé connu. La consommation de carburant associée est de la forme :

$$\sum_{t=t_s}^{\tau_f - 1} L_3(x_3(t), u_3(t), t) . \tag{8b}$$

Il y a une nouvelle contrainte couplante de raccordement entre les phases (P_1) et (P_3) à l'instant t_s, que l'on note :

$$\psi\big(x_1(t_s)\big) - x_3(t_s) = 0 , \tag{9}$$

ψ étant de nouveau une application bijective de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

2.1 Donner l'expression du problème global de minimisation associé à la formulation (5)–(6)–(8)–(7)–(9), et décrire brièvement la méthode de décomposition par les prix appliquée à ce problème (on pourra se contenter de décrire les différences par rapport au cas où la trajectoire ne comporte que deux phases).

2.2 Proposer un algorithme de décomposition par les quantités pour ce nouveau problème et donner la formulation des sous-problèmes correspondant aux différentes phases de la trajectoire à l'étape k de cet algorithme. *On remarquera que, bien que les contraintes couplantes (7) et (9) soient à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, l'allocation doit être un vecteur de $\mathbb{R}^n$ pour des raisons de compatibilité que l'on précisera.*

0. Formalisation du problème. On considère un système de distribution constitué d'une usine de production U, d'un centre de stockage S et d'un magasin de de vente M. On souhaite optimiser le fonctionnement de ce système sur une période de temps $[0, T]$. Dans la formulation que l'on considérera, le temps t est discrétisé et prend les valeurs $0, 1, \ldots, T$.

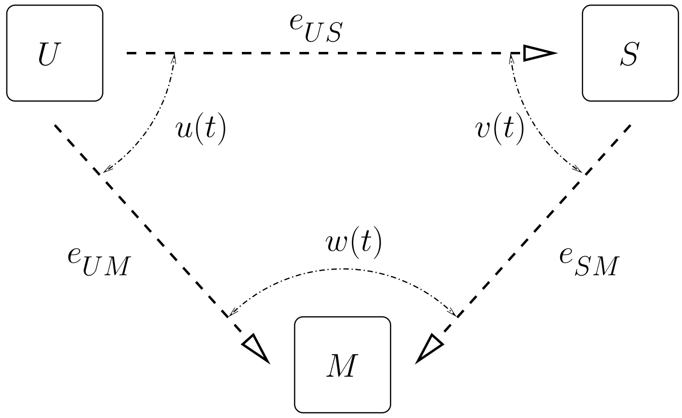

Figure 1: Système de distribution

- L'usine U produit au pas de temps t une quantité $u(t) \in \mathbb{R}^m$, ce qui engendre un coût $C_{U}(u(t), t)$. La production $u(t)$ se répartit entre la quantité $e_{UM}(t)$ qui est directement envoyé au magasin M pour être vendue, et la quantité $e_{US}(t)$ transférée vers le centre de stockage S, d'où :

$$u(t) = e_{UM}(t) + e_{US}(t)\ . \tag{10}$$

  Le transfert entre l'usine et le centre de stockage entraîne un coût noté $C_{E}(e_{US}(t), t)$.

- Au pas de temps t, le centre de stockage S reçoit de l'usine de production la quantité $e_{US}(t)$, et envoie au magasin de vente M la quantité $e_{SM}(t)$. Le bilan de ce que reçoit le stock est donc :

$$v(t) = e_{US}(t) - e_{SM}(t)\ , \tag{11}$$

  et le niveau $s(t)$ du stock évolue donc selon la dynamique :

$$s(t+1) = s(t) + v(t), \quad t = 0, \ldots, T-1\ . \tag{12}$$

  Le niveau du stock doit être maintenu entre deux bornes données :

$$\underline{s} \leq s(t) \leq \overline{s}, \quad \forall t\ , \tag{13}$$

  et on suppose que le coût de stockage à t est de la forme $C_{S}(s(t), t)$.

- Au pas de temps t, le magasin M reçoit en provenance de l'usine et du stock une quantité $w(t)$, dont la vente procure un chiffre d'affaires $C_{M}(w(t), t)$. D'après ce qui précède, on a :

$$w(t) = e_{UM}(t) + e_{SM}(t)\ . \tag{14}$$

  La gestion du magasin consiste à s'assurer que cette quantité reçue est égale à une demande $d(t)$ *supposée connue* :

$$d(t) = w(t)\ . \tag{15}$$

Finalement, le problème se formule comme :

$$\min \sum_{t=0}^{T} C_U(u(t),t) + C_E(e_{US}(t),t) + C_S(s(t),t) - C_M(w(t),t) \ , \tag{16}$$

sous les contraintes (10) – (11) – (12) – (13) – (14) – (15).

1. **Découpage en sous-problèmes.** On définit trois responsables de gestion :

   (a) le *responsable production*, qui s'occupe de l'usine et donc des variables $u(t)$;

   (b) le *responsable stockage*, qui gère le stock et donc les variables $v(t)$ et $s(t)$;

   (c) le *responsable logistique*, qui décide des transferts entre usine, stock et magasin ainsi que de la gestion du magasin, c'est-à-dire des variables $e_{US}(t)$, $e_{UM}(t)$, $e_{SM}(t)$ et $w(t)$.

   Dans une optique de décomposition du problème selon les trois responsabilités ainsi définies, classer les contraintes (10), (11), (12), (13), (14) et (15) en "contrainte locale" d'un des sous-problèmes ou "contrainte couplante" entre sous-problèmes. Combien y a-t-il en définitive de contraintes couplantes ?

2. **Décomposition par les prix.** Décrire avec précision (coût, variables de décision, contraintes) les trois sous-problèmes qui résultent d'une décomposition par les prix. Quels sont les sous-problèmes vraiment dynamiques et quels sont ceux qui se ramènent à une suite de problèmes statiques indexés par t ? Écrire la phase de coordination de cet algorithme.

3. **Décomposition par prédiction.** Décrire avec précision (coût, variables de décision, contraintes) les trois sous-problèmes qui résultent d'une décomposition par prédiction (algorithme de type point fixe). On justifiera la manière dont on choisit d'allouer les contraintes couplantes aux sous-problèmes.