1 Contrôle des connaissances 2011/2012

Remarque préliminaire importante

Le contrôle se compose de deux problèmes qui sont indépendants l'un de l'autre. Le premier problème porte sur l'application des méthodes de décomposition (prix, allocation de ressources et prédiction) à un problème de gestion de barrages, alors que le second problème porte principalement[1] sur la mise en œuvre du Principe du Problème Auxiliaire à un problème de répartition optimale de l'énergie disponible sur un réseau.

On s'attachera dans la rédaction à être aussi précis que possible. Ainsi,

- lors de l'écriture de chaque problème d'optimisation et de chaque sous-problème issu de la décomposition et de la coordination, on précisera les variables par rapport auxquelles se fait l'optimisation, ainsi que les espaces et les parties de ces espaces dans lesquels vivent ces variables,
- on distinguera clairement les variables à optimiser de celles qui sont figées à l'étape du calcul considéré.

Enfin, il est bien sûr fortement conseillé de prendre le temps de lire attentivement les énoncés des problèmes même s'ils sont parfois un peu longs...

[1] car il contient aussi une application de la décomposition par les prix

Premier problème : gestion d'une vallée hydraulique

On s'intéresse à la gestion globale d'une vallée hydraulique composée de N retenues d'eau (barrages) en cascade sur un horizon de temps discret $\{t_0, t_0+1, \dots, T\}$. Chaque barrage est alimenté par des apports d'eau naturels (supposés connus), et a la faculté de turbiner à chaque pas de temps une partie de l'eau qu'il contient pour produire de l'électricité. La quantité d'eau turbiné à un pas de temps t donné par le barrage i se retrouve au même pas de temps[2] dans le barrage $i+1$ (barrage immédiatement en aval du barrage i). Le barrage de tête (barrage 1) n'est alimenté que par ses apports naturels. Enfin, l'eau turbinée par le dernier barrage N est perdue pour la vallée hydraulique.

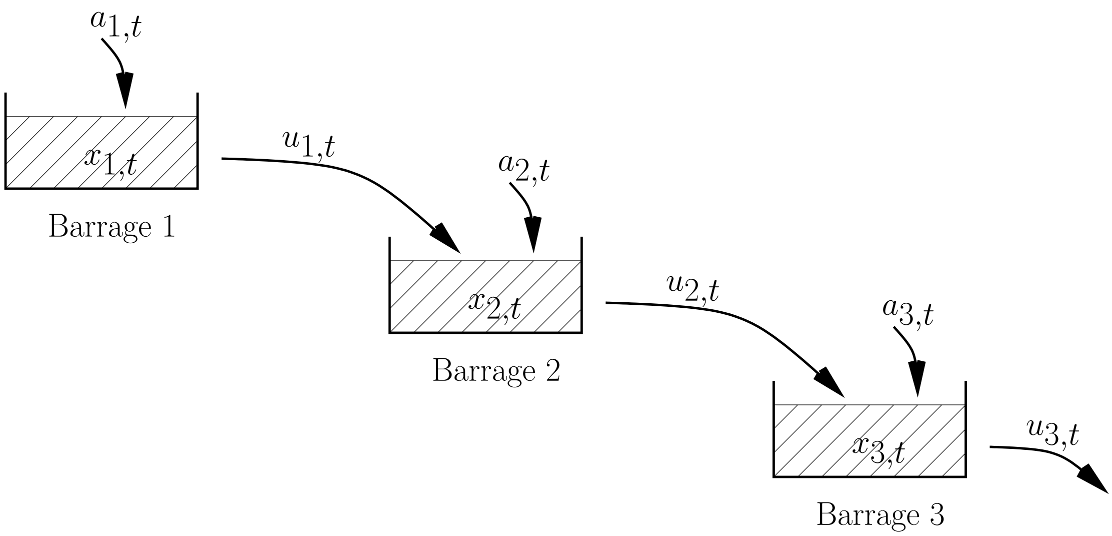

Figure 1: Fonctionnement d'une vallée hydraulique ($N = 3$)

Le but de la gestion est de valoriser de manière optimale la production d'électricité totale sur l'horizon de temps $\{t_0, \dots, T\}$ tout en s'assurant qu'on laisse dans chaque barrage une quantité d'eau suffisante à l'instant final T afin de préserver l'avenir.[3] Cette dernière considération se traduit par un coût de pénalisation portant sur la quantité d'eau disponible en fin d'horizon dans chaque barrage.

1. Formalisation du problème

Pour chaque barrage $i \in \{1, \dots, N\}$, on note :

- $a_{i,t}$ les apports naturels d'eau dans le barrage au pas de temps t,
- $x_{i,t}$ la quantité d'eau présente dans le barrage au pas de temps t,
- $u_{i,t}$ la quantité d'eau turbinée par le barrage au pas de temps t,
- $L_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t})$ le coût de turbinage de la quantité $u_{i,t}$ dans l'état $x_{i,t}$ au pas de temps t,[4]
- $K_i(x_{i,T})$ le coût de pénalisation si le barrage est dans l'état $x_{i,T}$ au pas de temps T.

[2] car on suppose qu'il n'y a pas de délai de transmission de l'eau entre les barrages

[3] Une solution laissant les barrages vides au pas de temps T mettrait le gestionnaire de la vallée dans une situation difficile pour les pas de temps postérieurs à T.

[4] Ce coût est en fait négatif et correspond au fait de vendre l'électricité produite par les turbines.

On note enfin $x_{i,0}$ la quantité d'eau présente dans le barrage i à l'instant initial t_0. Le problème d'optimisation à résoudre s'écrit :

$$\min_{\substack{(u_{i,t_0},\dots,u_{i,T-1})_{i=1,\dots,N} \\ (x_{i,t_0},\dots,x_{i,T})_{i=1,\dots,N}}} \quad \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{t=t_0}^{T-1} L_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}) + K_i(x_{i,T}) \Big) , \tag{1a}$$

sous les contraintes décrivant l'évolution des barrages au cours du temps :

$$x_{1,t_0} = x_{1,0} \;, \quad x_{1,t+1} = x_{1,t} - u_{1,t} + a_{1,t} \qquad \forall t = t_0, \dots, T-1 \;, \tag{1b}$$

$$x_{i,t_0} = x_{i,0} \;, \quad x_{i,t+1} = x_{i,t} - u_{i,t} + a_{i,t} + u_{i-1,t} \quad \forall t = t_0, \dots, T-1 \;, \quad \forall i = 2, \dots, N \;, \tag{1c}$$

et sous les contraintes de bornes à respecter par les quantités d'eau dans les barrages et les quantités d'eau turbinées :

$$x_{i,t} \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i] \quad \forall t = t_0, \dots, T \;, \qquad \forall i = 1, \dots, N \;, \tag{1d}$$

$$u_{i,t} \in [\underline{u}_i, \overline{u}_i] \quad \forall t = t_0, \dots, T-1 \;, \quad \forall i = 1, \dots, N \;. \tag{1e}$$

Q1.1 Discuter, en faisant des hypothèses sur les fonctions $L_{i,t}$ et K_i, de l'existence et de l'unicité des solutions du problème (1).

On souhaite résoudre ce problème en lui appliquant une décomposition *barrage par barrage*, le sous-problème $i \in \{1, \dots, N\}$ ayant à sa charge la gestion au cours du temps du barrage i.[5] Notant que le seul couplage entre barrages provient de la présence dans les équations (1c) des variables $u_{i-1,t}$, on introduit dans le problème les variables supplémentaires $w_{i,t}$, $i = 2, \dots, N$ et $t = t_0, \dots, T-1$. À l'aide de ces nouvelles variables, les contraintes (1c) s'écrivent de manière équivalente sous la forme :

$$x_{i,t_0} = x_{i,0} \;, \quad x_{i,t+1} = x_{i,t} - u_{i,t} + a_{i,t} + w_{i,t} \quad \forall t = t_0, \dots, T-1 \;, \quad \forall i = 2, \dots, N \;, \tag{1f}$$

et

$$w_{i,t} - u_{i-1,t} = 0 \quad \forall t = t_0, \dots, T-1 \;, \quad \forall i = 2, \dots, N \;. \tag{1g}$$

Q1.2 Écrire le problème d'optimisation équivalent obtenu en ajoutant ces nouvelles variables et ces nouvelles contraintes. Donner la manière dont on va décomposer ce problème en précisant pour chaque barrage i :

- les variables d'optimisation faisant partie du sous-problème i,
- les contraintes locales du sous-problème i (ensemble admissible propre au sous-problème),
- les contraintes couplant les sous-problèmes entre eux.

2. Décomposition et coordination

Q2.1 Appliquer au problème obtenu à la question précédente l'algorithme de décomposition par les prix. On donnera la justification théorique de l'utilisation de cette méthode, on écrira *avec précision* les différents sous-problèmes qui apparaissent ainsi que la phase de coordination, on discutera des avantages et inconvénients de la méthode et on proposera (sans entrer dans des détails excessifs) des façons de résoudre numériquement les sous-problèmes.

Q2.2 Mêmes questions pour la décomposition/coordination par allocation.

Q2.3 Mêmes questions pour la décomposition/coordination par prédiction ; pour chaque indice i, on choisira d'affecter au sous-problème i les contraintes $w_{i,t} - u_{i-1,t} = 0$, $t = t_0, \dots, T$.

[5] On ne souhaite donc pas effectuer de décomposition par pas de temps.

DEUXIÈME PROBLÈME : GESTION D'UNE SMART GRID

Une "smart grid" est un réseau de production et de distribution d'électricité "intelligent", permettant de mieux mettre en relation l'offre et la demande entre les producteurs et les consommateurs d'électricité. C'est un sujet très en vogue dans le monde de l'énergie : on espère grâce aux smart grids pouvoir faciliter l'intégration au réseau de sources d'énergie propres, mais irrégulières (éoliennes, centrales solaires...), et diminuer le risque de pannes dues à la surcharge des lignes de transmission.

Dans la version simplifiée que l'on va considérer ici, une smart grid sera constituée d'un réseau de transport modélisé à l'aide d'un graphe $\mathcal{G} = \big(\mathcal{N}, \mathcal{A}\big)$ où $\mathcal{N}$ représente l'ensemble des nœuds du graphe, de cardinal N, $\mathcal{A}$ étant l'ensemble des arcs du graphe, de cardinal A. En chaque nœud i sont localisés des producteurs et des consommateurs, qui peuvent recevoir ou fournir de l'électricité aux nœuds voisins par l'intermédiaire des arcs connectés à i.

Le but de la gestion de la smart grid est de gérer de manière optimale les productions aux nœuds et les transferts sur les arcs tout en fournissant les consommateurs en électricité. On s'intéressera à la situation statique et on ne prendra donc pas en compte les questions d'évolution temporelle.

1. Formalisation du problème

La structure du graphe orienté correspondant au réseau de la smart grid est représentée par une matrice $\mathrm{I}_{\mathcal{G}}$, appelée *matrice d'incidence de graphe*. Chaque ligne de cette matrice correspond à un nœud, et chaque colonne à un arc : étant donné un arc a d'origine le nœud i et d'extrémité le nœud j, la colonne correspondante de la matrice $\mathrm{I}_{\mathcal{G}}$ contient un $+1$ sur la ligne i, un -1 sur la ligne j et des zéros partout ailleurs (voir Figure 2). La i-ème ligne de la matrice $\mathrm{I}_{\mathcal{G}}$ sera notée $\mathrm{I}_{\mathcal{G}}(i)$.

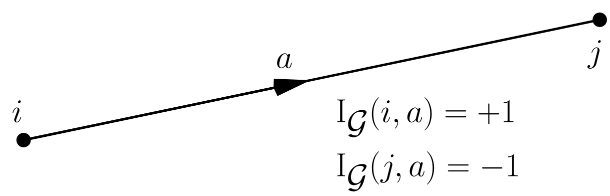

Figure 2: Convention d'orientation et de signe pour les arcs

Les connections du nœud i sont alors décrites par la ligne correspondante de la matrice, la présence d'un $+1$ indiquant un arc d'origine le nœud i, et celle d'un -1 un arc d'extrémité le nœud i.

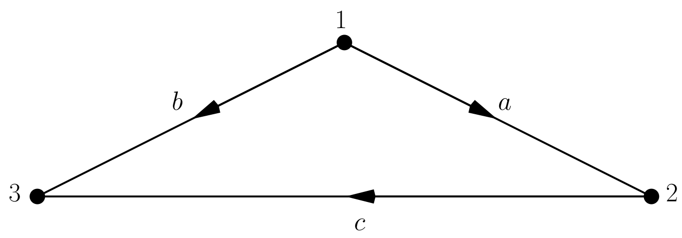

Figure 3: Smart grid ($\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$)

À titre d'exemple, la matrice d'incidence de la smart grid représenté Figure 3 est :

$$\mathrm{I}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Soit alors p_i et c_i la production et la consommation d'électricité au nœud i. On note $d_i = p_i - c_i$ le bilan au nœud et $d = (d_1, \ldots, d_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ le vecteur des bilans aux nœuds. Soit u_a le transit d'électricité dans l'arc $a = (i,j)$ (positif s'il va de i vers j et négatif dans le cas contraire). On note $u = (u_1, \ldots, u_A)^\top \in \mathbb{R}^A$ le vecteur des transits dans les arcs. L'équilibre production-demande du réseau (1-ère loi de Kirchhoff) s'exprime par l'égalité matricielle :

$$d = \mathrm{I}_{\mathcal{G}}\, u \ . \tag{2}$$

Notant J_i la fonction de coût associé au nœud i et supposant que le coût de transit dans les arcs est nul, la gestion optimale de la smart grid consiste à minimiser la somme sur les nœuds des coûts $J_i(d_i)$ sous les contraintes (2). Après élimination des variables d_i, le problème s'écrit donc :

$$\min_{u \in \mathbb{R}^A} \sum_{i=1}^{N} J_i\big(\mathrm{I}_{\mathcal{G}}(i) \cdot u\big) \ , \tag{3}$$

le terme $\mathrm{I}_{\mathcal{G}}(i) \cdot u$ correspondant au produit matriciel du vecteur-ligne $\mathrm{I}_{\mathcal{G}}(i)$ avec le vecteur-colonne u.

Q1.1 Discuter, en faisant des hypothèses sur les fonctions J_i, de l'existence et de l'unicité des solutions du problème (3). La fonction coût du problème est-elle toujours fortement convexe ?

Dans toute la suite du problème, on cherche à effectuer une décomposition du problème (3) suivant *les nœuds de la smart grid*. L'une des difficultés est que le vecteur par rapport auquel on optimise a pour taille le nombre d'arcs de la smart grid, et qu'il faut donc faire une décomposition de ce vecteur suivant les nœuds.

2. Décomposition par les prix.

Pour décomposer suivant les nœuds, une première idée consiste à écrire la matrice d'incidence comme la somme de deux matrices $\mathrm{I}_{\mathcal{G}}^+$ et $\mathrm{I}_{\mathcal{G}}^-$, la première contenant tous les éléments égaux à $+1$ de $\mathrm{I}_{\mathcal{G}}$, la seconde contenant tous les éléments égaux à -1 :

$$\mathrm{I}_{\mathcal{G}} = \mathrm{I}_{\mathcal{G}}^+ + \mathrm{I}_{\mathcal{G}}^- \ . \tag{4}$$

Alors, en introduisant une nouvelle variable $v \in \mathbb{R}^A$, le problème (3) s'écrit sous la forme équivalente :

$$\min_{(u,v) \in \mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^A} \sum_{i=1}^{N} J_i\Big(\mathrm{I}_{\mathcal{G}}^+(i) \cdot u + \mathrm{I}_{\mathcal{G}}^-(i) \cdot v\Big) \ , \tag{5a}$$

sous la contrainte :

$$u - v = 0 \ . \tag{5b}$$

Q2.1 Expliquer en quoi la formulation (5) du problème permet d'effectuer une décomposition suivant les nœuds de la smart grid.

Q2.2 *Dans le cas de la smart grid représentée Figure 3*, donner l'expression des sous-problèmes apparaissant dans l'algorithme de décomposition par les prix, ainsi que l'étape de coordination. Que dire de la convergence de cet algorithme ?

3. Application du Principe du Problème Auxiliaire.

On utilise la relation (4) de la matrice $\mathrm{I}_{\mathcal{G}}$ pour écrire le problème (3) sous la forme :

$$\min_{u \in \mathbb{R}^A} \sum_{i=1}^{N} J_i\Big(\mathrm{I}_{\mathcal{G}}^{+}(i) \cdot u + \mathrm{I}_{\mathcal{G}}^{-}(i) \cdot u\Big) . \tag{6}$$

On choisit alors la famille de noyaux de décomposition $K^{(k)}(u)$ suivante :

$$K^{(k)}(u) = \sum_{i=1}^{N} J_i\Big(\mathrm{I}_{\mathcal{G}}^{+}(i) \cdot u + \mathrm{I}_{\mathcal{G}}^{-}(i) \cdot u^{(k)}\Big) , \tag{7}$$

et on cherche à appliquer le Principe du Problème Auxiliaire afin d'effectuer une *décomposition du problème selon les nœuds de la smart grid*.

On s'intéresse pour commencer à la smart grid décrite Figure 3 sur laquelle les calculs sont plus aisés à mener.

Q3.1 Écrire pour ce cas particulier l'algorithme issu du Principe du Problème Auxiliaire, avec le choix de noyau (7) et en prenant pour paramètre de l'algorithme la valeur $\epsilon^{(k)} = 1$. Commenter la forme des sous-problèmes obtenus. À quel algorithme "intuitif" (prix, allocation, prédiction) cet algorithme est-il apparenté ?

Q3.2 Le choix des noyaux (7) et le choix des coefficients $\epsilon^{(k)}$ permettent-ils de garantir la convergence ? Quels remèdes peut-on apporter en cas de défaut de convergence ?

On revient maintenant au cas général d'une smart grid supportée par un graphe $\mathcal{G}$ quelconque.[6] Pour uniformiser les notations, on pourra utiliser les notations suivantes : A_i^+ (resp. A_i^-) représente l'ensemble des arcs du graphe ayant pour origine (resp. extrémité) le nœud i, et $A_{i,j}^{\pm} = A_i^+ \cap A_j^-$.[7].

Q3.3 Écrire l'algorithme issu du Principe du Problème Auxiliaire, avec le choix de noyau (7) et en prenant pour paramètre de l'algorithme la valeur $\epsilon^{(k)} = 1$.

[6] On exclut cependant la présence d'*arc-boucle* (arc a ayant pour origine et pour extrémité le même nœud i).

[7] On notera que $A_i^+ \cap A_i^- = \emptyset$