1 Contrôle des connaissances 2012/2013

Remarque préliminaire

Le contrôle se compose de deux problèmes qui sont relativement indépendants l'un de l'autre. Le premier problème correspond à la gestion d'un stock de distribution alimenté par trois unités de production. Le second problème concerne l'optimisation sur un horizon de temps donné d'un parc de production d'énergie constitué d'un système dynamique (vallée hydraulique, stock EJP) et de plusieurs unités réagissant de manière instantanée.

On s'attachera dans la rédaction à être aussi précis que possible. Ainsi,

- lors de l'écriture de chaque problème d'optimisation et de chaque sous-problème issu de la décomposition et de la coordination, on précisera systématiquement les variables par rapport auxquelles se fait l'optimisation, ainsi que les espaces et les parties de ces espaces dans lesquels vivent ces variables,

- à chaque itération k des algorithmes que l'on sera amené à écrire, on distinguera clairement entre les variables à optimiser et les variables qui sont figées à cette itération ; ces dernières seront repérées par un indice supérieur $^{(k)}$ (comme dans le cours).

Il est bien sûr conseillé de lire attentivement les énoncés des problèmes...

Premier problème : production/distribution.

On considère trois unités de production (numérotées de 1 à 3), telles que la *commande* $u_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ appliquée à l'unité i engendre une production notée $\Theta_i(u_i) \in \mathbb{R}$ pour un coût noté $J_i(u_i)$. Chaque décision u_i est contrainte à appartenir à un sous-ensemble U_i^{ad} de $\mathbb{R}^{n_i}$. Ces unités alimentent un stock S grâce auquel on doit satisfaire une consommation θ supposée *connue* : partant d'un volume du stock initial valant $x_0 \in \mathbb{R}$, supposé lui aussi *connu*, le volume du stock après alimentation par les unités et satisfaction de la demande est donné par la relation :

$$x = x_0 - \theta + \sum_{i=1}^{3} \Theta_i(u_i) \; . \tag{1}$$

Le volume du stock doit être compris entre des valeurs minimale $\underline{x}$ et maximale $\overline{x}$, toutes deux supposées *connues*. Enfin, le stockage de la quantité x induit un coût, que l'on note $J_S(x)$, de telle sorte que le coût global de fonctionnement du système s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{3} J_i(u_i) + J_S(x) \; . \tag{2}$$

On souhaite résoudre le problème d'optimisation associé en appliquant les techniques de décomposition et coordination, de manière à formuler *un sous-problème d'optimisation par unité de production* ainsi qu'*un sous-problème d'optimisation pour le stock*.

Question 1

1.1 Formuler le problème de l'optimisation du fonctionnement de l'ensemble constitué des unités de production et du stockage. On précisera quelles sont les contraintes couplantes et quelles sont les contraintes locales pour la décomposition souhaitée. Dans la suite, toutes les contraintes locales seront traitées comme des contraintes *internes* aux sous-problèmes.

1.2 Résoudre le problème formulé à la question 1.1 en appliquant l'algorithme de décomposition par les prix. On donnera l'expression de chaque sous-problème et de l'étape de coordination.

1.3 Résoudre le problème formulé à la question 1.1 en appliquant l'algorithme de décomposition par les quantités. On donnera l'expression de chaque sous-problème et de la coordination.

1.4 Résoudre le problème formulé à la question 1.1 en appliquant l'algorithme de décomposition par prédiction lorsque l'on confie la gestion de la contrainte couplante au sous-problème associé au stock. On donnera l'expression précise de chaque sous-problème.

Question 2

On suppose qu'il existe, en plus de la contrainte couplante (1), une contrainte supplémentaire limitant la production totale des unités, de la forme :

$$\sum_{i=1}^{3} \Omega_i(u_i) \leq \omega \; . \tag{3}$$

Écrire l'algorithme de décomposition par prédiction obtenu lorsque l'on confie la gestion de cette nouvelle contrainte couplante au sous-problème associé à l'unité de production 1.

Question 3

On revient à la formulation (1)–(2) du problème, et on remplace dans la fonction de coût J_S la variable x par son expression donnée par la contrainte (1), de telle sorte que le coût global de fonctionnement se met sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{3} J_i(u_i) + J_S\Big(x_0 - \theta + \sum_{i=1}^{3} \Theta_i(u_i)\Big) \; . \tag{4}$$

Dans cette question, on considère que les *contraintes de bornes* sur le volume x du stock ne sont *jamais actives* (par exemple en prenant $\underline{x} = -\infty$ et $\overline{x} = +\infty$).

3.1 Appliquer le principe du problème auxiliaire au problème de minimisation de ce nouveau critère avec le choix de noyau :

$$K(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^{3} J_i(u_i) \; .$$

3.2 Préciser les hypothèses de convergence de l'algorithme obtenu à la question précédente, et indiquer à quelle condition on peut prendre les coefficients $\epsilon^{(k)}$ apparaissant dans le PPA tous égaux à la valeur 1. À quelle méthode vue à la question Q1 cet algorithme s'apparente t'il ?

3.3 Appliquer le principe du problème auxiliaire avec le choix de noyau :

$$K^{(k)}(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^{3} J_S\Big(x_0 - \theta + \Theta_i(u_i) + \sum_{j \neq i} \Theta_j(u_j^{(k)})\Big) \; .$$

Interpréter les sous-problèmes apparaissant dans l'algorithme associé.

3.4 Que devient la méthode du principe du problème auxiliaire si l'on réintroduit les contraintes de bornes $x \in [\underline{x}, \overline{x}]$ sur l'état du stock ?

Deuxième problème : gestion d'un parc énergétique

On s'intéresse sur un horizon de temps discret $\{0, 1, \ldots, T\}$ à la gestion d'un parc de production d'énergie composé de la manière suivante.

- On dispose d'une part d'un *système dynamique* :[1] partant d'un état $x_0 \in \mathbb{R}^n$ supposé *connu*, l'évolution de l'état de ce système dynamique sur le pas de temps t est donnée par la relation :

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t) \ , \quad t = 0, \ldots, T-1 \ . \tag{5}$$

  L'état x_t du système à tout instant est astreint à rester entre une borne minimale $\underline{x}$ et une borne maximale $\overline{x}$, toutes deux *connues*. La *décision* u_t prise au pas de temps t engendre une production d'énergie notée $Q_t(u_t) \in \mathbb{R}$, pour une valeur notée $C_t(u_t)$.

- On a d'autre part N unités de production *sans mémoire*,[2], ce qui signifie que la gestion de ces unités se fait indépendamment pas de temps par pas de temps. La *commande* de l'unité i au pas de temps t est notée $v_{i,t}$: elle est astreinte à appartenir à un sous-ensemble $V_{i,t}^{\mathrm{ad}} \subset \mathbb{R}^{n_i}$, engendre une production d'énergie notée $\Theta_{i,t}(v_{i,t}) \in \mathbb{R}$ pour une valeur notée $J_{i,t}(v_{i,t})$.

- L'écart entre la production totale du parc et la demande en énergie d_t (supposée *connue*) au pas de temps t est notée δ_t et vaut :

$$\delta_t = \sum_{i=1}^{N} \Theta_{i,t}(v_{i,t}) + Q_t(u_t) - d_t \ , \quad t = 0, \ldots, T-1 \ ; \tag{6}$$

  cet écart donne lieu à un coût de pénalisation noté $P_t(\delta_t)$.

Le coût global de fonctionnement du parc est donc égal à :

$$\sum_{t=0}^{T-1} \left(\sum_{i=1}^{N} J_{i,t}(v_{i,t}) + C_t(u_t) - P_t(\delta_t) \right) . \tag{7}$$

On souhaite résoudre le problème d'optimisation associé à ce parc de production en utilisant les différentes techniques de décomposition et coordination vues durant le cours.

Question 1

On souhaite pour commencer résoudre le problème en effectuant une décomposition dans laquelle *chaque sous-problème correspond à une unité* (**décomposition spatiale**).

1.1 Formuler le problème de l'optimisation du fonctionnement du parc énergétique. On précisera quelles sont les contraintes couplantes et quelles sont les contraintes locales par rapport à la décomposition souhaitée. Les contraintes locales seront traitées comme des contraintes *internes* aux sous-problèmes.

Conseil. Afin d'alléger les écritures, et puisque l'on veut effectuer une décomposition par unité, il est conseillé de reformuler le problème en utilisant les *trajectoires temporelles* des variables plutôt que les variables elles-mêmes. Ainsi, pour le système dynamique, on posera $U = (u_0, \ldots, u_{T-1})$ et $X = (x_1, \ldots, x_T)$, de telle sorte que les équations de dynamique (5) se mettront sous la forme : $X = F(x_0, U)$; on posera $Q(U) = \big(Q_0(u_0), \ldots, Q_{T-1}(u_{T-1})\big)$, le coût sur tout l'horizon d'optimisation de ce système se mettant sous la forme d'une fonction $C(U)$. De même, on posera $V_i = (v_{i,0}, \ldots, v_{i,T-1})$, $\Theta_i(V_i) = \big(\Theta_{i,0}(v_{i,0}), \ldots, \Theta_{i,T-1}(v_{i,T-1})\big)$ et on introduira la fonction $J_i(V_i)$ représentant le coût de l'unité i sur tout l'horizon ; on posera $\Delta = (\delta_0, \ldots, \delta_T)$ et on introduira la fonction $P(\Delta)$ représentant le coût de pénalisation sur tout l'horizon, de telle sorte que le critère et les contraintes (vectorielles) du problème pourront s'écrire en fonction des variables U, V_i et Δ.

[1] représentant par exemple une vallée hydraulique, un stock de combustible ou un stock EJP

[2] par exemple des centrales à fuel, à charbon et des turbines à gaz

1.2 Résoudre le problème formulé à la question 1.1 en appliquant l'algorithme de décomposition par les prix. On donnera l'expression de chaque sous-problème et celle de l'étape de coordination.

1.3 Résoudre le problème formulé à la question 1.1 en appliquant l'algorithme de décomposition par les quantités. On donnera l'expression de chaque sous-problème, celle de l'étape de coordination, et on discutera de la faisabilité de la méthode.

1.4 Résoudre le problème formulé à la question 1.1 en appliquant l'algorithme de décomposition par prédiction. On choisira à quel sous-problème est confiée la gestion des contraintes couplantes, et on justifiera le choix effectué. On donnera l'expression précise de chaque sous-problème.

1.5 On remplace dans le coût (7) la variable δ_t par son expression donnée par la relation (6), de telle sorte que le couplage entre les unités de production se fait désormais par le critère. Appliquer le principe du problème auxiliaire au problème de minimisation de ce nouveau critère, en effectuant un choix de noyau $K^{(k)}$ que l'on justifiera. On précisera les hypothèses de convergence de l'algorithme obtenu.

Question 2

On souhaite pour finir résoudre le problème en effectuant une décomposition dans laquelle chaque pas de temps correspond à un sous-problème (**décomposition temporelle**) : chaque sous-problème est alors associé à un seul pas de temps t, mais fait par contre intervenir les variables de décision de tous les moyens de production à ce pas de temps.

2.1 Reprendre l'analyse faite à la question 1.1 pour cette nouvelle décomposition (le "conseil" donné en 1.1 ne peut bien sûr pas être utilisé dans ce nouveau contexte puisque c'est par rapport au temps que l'on décompose).

2.2 Mettre en œuvre l'algorithme de décomposition par les prix.