1 Contrôle des connaissances 2014/2015

Remarque préliminaire

Le contrôle se compose de deux problèmes qui sont indépendants l'un de l'autre.

On s'attachera dans la rédaction à être aussi précis que possible. Ainsi,

- lors de l'écriture de chaque problème d'optimisation et de chaque sous-problème issu de la décomposition et de la coordination, on précisera systématiquement les variables par rapport auxquelles se fait l'optimisation, ainsi que les espaces et les parties de ces espaces dans lesquels vivent ces variables,
- à chaque itération k des algorithmes que l'on sera amené à écrire, on distinguera clairement entre les variables à optimiser et les variables qui sont figées à cette itération ; ces dernières seront repérées par un indice supérieur $^{(k)}$ (comme dans le cours).

Il est bien sûr conseillé de lire attentivement les énoncés des problèmes…

Premier problème : stocks en interaction

On considère un ensemble constitué de N stocks, chaque stock i étant piloté par la variable de commande $u_i \in U_i^{\mathrm{ad}} \subset \mathbb{R}^n$. En fait, le fonctionnement du stock i dépend :

- de la commande u_i propre au stock i,
- de l'interaction x_i du stock i avec les autres stocks.

L'interaction $x_i \in \mathbb{R}^m$ du stock i avec le reste du système est modélisée de la manière suivante :

$$x_i = f_i\Big(\sum_{j \neq i} u_j\Big) ,$$

et on notera $u = (u_1, \dots, u_N)$ et $x = (x_1, \dots, x_N)$ les vecteurs des commandes et des interactions de l'ensemble du système. Supposant que le coût de fonctionnement du stock i est de la forme :

$$J_i\left(u_i, f_i\Big(\sum_{j \neq i} u_j\Big)\right) ,$$

le problème de minimiser le coût de fonctionnement de l'ensemble des stocks s'écrit :

$$\min_u \quad \sum_{i=1}^{N} J_i\left(u_i, f_i\Big(\sum_{j \neq i} u_j\Big)\right) \tag{1a}$$

sous

$$u_i \in U_i^{\mathrm{ad}} \qquad \forall i \in \{1, \dots, N\} . \tag{1b}$$

On cherche à mettre en œuvre sur ce problème les méthodes de décomposition/coordination, de telle sorte que chacun des sous-problèmes que l'on formule dans l'étape de décomposition corresponde à la gestion d'un seul et unique stock.

Question 1 — *Décomposition par les prix et par prédiction.*

Pour pouvoir mettre en œuvre les méthodes de décomposition/coordination "classiques", on commence par transformer le problème en introduisant de nouvelles variables $v = (v_1, \ldots, v_N)$, chaque variable v_i étant définie par la relation :

$$v_i = \sum_{j \neq i} u_j \; .$$

Le problème d'optimisation se met alors sous la forme suivante :

$$\min_{u,x,v} \quad \sum_{i=1}^{N} J_i \left(u_i, x_i\right) \tag{2a}$$

sous

$$u_i \in U_i^{\mathrm{ad}} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, N\} \; , \tag{2b}$$

$$x_i - f_i \left(v_i\right) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\} \; , \tag{2c}$$

$$v_i - \sum_{j \neq i} u_j = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\} \; . \tag{2d}$$

1.a Montrer que les problèmes d'optimisation (1) et (2) sont équivalents. Indiquer pourquoi il est possible d'utiliser pour le problème (2) les méthodes de décomposition par les prix et par prédiction. Parmi les contraintes du problème (2), préciser quelles sont les contraintes locales et quelles sont les contraintes couplantes.

1.b Écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k dans la méthode de décomposition par les prix lorsque l'on ne dualise que les contraintes couplantes. Donner la formule de remise à jour des multiplicateurs associés à ces contraintes. Indiquer brièvement les conditions de convergence de cet algorithme.

1.c Pour appliquer la méthode de décomposition par prédiction, on choisit d'affecter au i-ème stock la i-ème composante de la contrainte (2d), à savoir $v_i - \sum_{j \neq i} u_j = 0$, pour chaque $i \in \{1, \ldots, N\}$. Écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k dans cette méthode de décomposition, et préciser l'étape de coordination associée dans la mise en œuvre de type "point-fixe" de la méthode de prédiction.

Question 2 — *Utilisation du Principe du Problème Auxiliaire.*

On revient à la formulation (1) du problème d'optimisation, et on applique le PPA en choisissant des coefficients $\epsilon^{(k)} > 0$ et des noyaux de décomposition de la forme :

$$K^{(k)}(u_1, \ldots, u_N) = \sum_{i=1}^{N} J_i \left(u_i, f_i \Big(\sum_{j \neq i} u_j^{(k)} \Big) \right) \; .$$

2.a Écrire le problème auxiliaire apparaissant à l'itération k de l'algorithme, ainsi que les sous-problèmes issus de la décomposition de ce problème auxiliaire. Préciser les conditions de convergence de cet algorithme.

2.b On décide de prendre les coefficients $\epsilon^{(k)}$ tous égaux à 1. Écrire la forme spécifique que prennent alors les sous-problèmes. Préciser à quel méthode de décomposition "classique" s'apparente cet algorithme. Proposer un moyen de pouvoir choisir $\epsilon^{(k)} = 1$ dans le cas où les constantes de forte convexité des fonctions J_i sont trop faibles pour l'autoriser.

Deuxième problème : marchés de l'énergie

On considère un producteur d'énergie ayant à sa disposition, d'une part une production $Q_{F,\omega}$ qui a pour caractéristique d'être à la fois *fatale* (c'est-à-dire non commandée) et aléatoire (dépendant d'un aléa ω), et d'autre part une production $Q_{C,\omega}$ qu'il peut contrôler en fonction de l'aléa ω (le producteur peut donc *adapter* sa commande $Q_{C,\omega}$ au vu de l'observation qu'il fait de ω et donc de sa connaissance de la production fatale $Q_{F,\omega}$). La production fatale $Q_{F,\omega}$ (photo-voltaïque, éolienne...) est gratuite, alors que la production commandée $Q_{C,\omega}$ (centrale thermique, turbine hydraulique...) induit un coût noté $J_C(Q_{C,\omega})$. Le producteur vend sa production sur différents marchés de l'énergie. Avant d'observer l'aléa ω qui affecte le système, il doit décider de la quantité d'énergie Q_{DA} qu'il va vendre ou acheter sur le marché "Day-Ahead" pour un coût $J_{DA}(Q_{DA})$.[1] Puis, une fois l'aléa ω observé, il peut avoir recours au marché "Intra-Day" pour assurer l'équilibre entre ses productions et ses ventes. Sur ce marché, il a la possibilité de vendre ou acheter une quantité d'énergie $Q_{ID,\omega}$, à un prix fortement variable qui dépend de l'aléa ω. Le coût associé à cette action est noté $J_{ID}(Q_{ID,\omega}, \omega)$.

Dans la suite du problème, on suppose que l'aléa ω vit dans un espace Ω fini de cardinal N, et on identifie alors cet espace à l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$:

$$\Omega = \{1, \ldots, N\} .$$

On note π_ω la probabilité de l'aléa ω.[2] Le coût total associé à l'activité du producteur est donc :

$$J_{DA}(Q_{DA}) + \sum_{\omega=1}^{N} \pi_\omega \Big(J_C(Q_{C,\omega}) + J_{ID}(Q_{ID,\omega}, \omega) \Big) . \tag{3a}$$

Ce coût doit être minimisé par rapport à toutes les variables de décision, à savoir la variable Q_{DA} et les vecteurs $\{Q_{C,1}, \ldots, Q_{C,N}\}$ et $\{Q_{ID,1}, \ldots, Q_{ID,N}\}$, sous les contraintes d'équilibre production-vente :

$$Q_{DA} - Q_{C,\omega} + Q_{ID,\omega} - Q_{F,\omega} = 0 \quad \forall \omega \in \{1, \ldots, N\} . \tag{3b}$$

Le but du producteur est d'obtenir la quantité optimale $Q^\sharp_{DA}$ qu'il va engager sur le marché Day-Ahead. Pour cela, il doit résoudre le problème (3) dans lequel le nombre N d'aléas ω est très grand. On suppose que résoudre le problème en déterministe (c'est-à-dire face à un unique aléa) est relativement facile, mais que la résolution frontale du problème (3) n'est pas envisageable. On cherche alors à effectuer une décomposition du problème "aléa par aléa". Pour cela, on impose la décomposition particulière suivante du problème et de l'espace des décisions :

- un sous-problème "zéro", portant sur la variable Q_{DA},
- N sous-problèmes indexés par ω, portant chacun sur le couple de variables $(Q_{C,\omega}, Q_{ID,\omega})$.

Question 1 — *Décomposition par les prix, par allocation et par prédiction.*

1.a Montrer que la factorisation de l'espace des décisions en un produit cartésien de $N+1$ sous-espaces comme imposé ci-dessus conduit à une décomposition du problème d'optimisation (3). Écrire les $N+1$ sous-problèmes apparaissant à l'itération k dans la méthode de décomposition par les prix. Donner la formule de remise à jour des multiplicateurs associés à la contrainte (3b).

[1] En fait, ce coût est l'opposé d'un gain...

[2] On a donc : $\sum_{\omega=1}^{N} \pi_\omega = 1$.

1.b Utilisant toujours la factorisation précédente de l'espace des décisions, indiquer pourquoi l'application naïve de la décomposition par les quantités[3] conduit à un algorithme qui ne fonctionne pas. Proposer une mise en œuvre opérationnelle de cette méthode de décomposition basée sur un choix "intelligent" de l'allocation.

1.c Appliquer la méthode de décomposition par prédiction en choisissant d'affecter la composante ω de la contrainte (3b) au sous-problème gérant l'aléa ω. Écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k dans cette méthode de décomposition, et préciser l'étape de coordination associée dans la mise en œuvre de type "point-fixe" de la méthode de prédiction.

Question 2 — *Utilisation du Principe du Problème Auxiliaire.*

Une autre formulation du problème (3) peut être obtenue en utilisant la contrainte (3b) pour éliminer les variables de décision $Q_{\mathrm{C},\omega}$. En effet, ces contraintes se mettent sous la forme équivalente :

$$Q_{\mathrm{C},\omega} = Q_{\mathrm{DA}} + Q_{\mathrm{ID},\omega} - Q_{\mathrm{F},\omega} \quad \forall \omega \in \{1, \ldots, N\} ,$$

si bien que la fonction de coût du problème s'écrit :

$$J_{\mathrm{DA}}(Q_{\mathrm{DA}}) + \sum_{\omega=1}^{N} \pi_\omega \Big(J_{\mathrm{C}}(Q_{\mathrm{DA}} + Q_{\mathrm{ID},\omega} - Q_{\mathrm{F},\omega}) + J_{\mathrm{ID}}(Q_{\mathrm{ID},\omega}, \omega) \Big) .$$

Introduisant la nouvelle notation $J_\omega(Q_{\mathrm{DA}}, Q_{\mathrm{ID},\omega}) = J_{\mathrm{C}}(Q_{\mathrm{DA}} + Q_{\mathrm{ID},\omega} - Q_{\mathrm{F},\omega}) + J_{\mathrm{ID}}(Q_{\mathrm{ID},\omega}, \omega)$, le problème d'optimisation que l'on veut résoudre s'écrit :

$$\min_{Q_{\mathrm{DA}}, \{Q_{\mathrm{ID},1}, \ldots, Q_{\mathrm{ID},N}\}} J_{\mathrm{DA}}(Q_{\mathrm{DA}}) + \sum_{\omega=1}^{N} \pi_\omega J_\omega(Q_{\mathrm{DA}}, Q_{\mathrm{ID},\omega}) . \tag{4}$$

On applique alors le PPA à ce nouveau problème sans contrainte, en choisissant des coefficients $\epsilon^{(k)} > 0$ et des noyaux de décomposition de la forme :

$$K^{(k)}(Q_{\mathrm{DA}}, Q_{\mathrm{ID},1}, \ldots, Q_{\mathrm{ID},N}) = J_{\mathrm{DA}}(Q_{\mathrm{DA}}) + \sum_{\omega=1}^{N} \pi_\omega J_\omega(Q_{\mathrm{DA}}^{(k)}, Q_{\mathrm{ID},\omega}) .$$

2.a Écrire le problème auxiliaire apparaissant à l'itération k de l'algorithme, ainsi que les sous-problèmes issus de la décomposition de ce problème auxiliaire. Écrire la forme spécifique que prennent les sous-problèmes avec le choix $\epsilon^{(k)} = 1$, et dire à quelle méthode "classique" l'algorithme obtenu s'apparente.

2.b En fait la fonction J_{DA} permettant de valoriser l'énergie sur le marché "Day-Ahead" est linéaire, ce qui risque de poser des problèmes de convergence à la méthode... On choisit alors le noyau de décomposition suivant :

$$K^{(k)}(Q_{\mathrm{DA}}, Q_{\mathrm{ID},1}, \ldots, Q_{\mathrm{ID},N}) = \frac{\gamma}{2} \left\| Q_{\mathrm{DA}} \right\|^2 + \sum_{\omega=1}^{N} \pi_\omega J_\omega(Q_{\mathrm{DA}}^{(k)}, Q_{\mathrm{ID},\omega}) .$$

Écrire les sous-problèmes issus de la décomposition de ce problème auxiliaire avec pour coefficient $\epsilon^{(k)} = 1$. Discuter de la pertinence de ce dernier choix.

[3] c'est-à-dire celle qui consiste à introduire une allocation $(v_0, v_1, \ldots, v_N)$ telle que l'on ait :

$$v_0 + \sum_{\omega=1}^{N} v_\omega = 0 ,$$

avec $v_i \in \mathbb{R}^{N+1}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$

Troisième problème (facultatif) : décomposition espace/temps

On considère, sur un horizon de temps discret $\{0,\dots,T\}$, un ensemble de N systèmes dynamiques *indépendants*, l'évolution du système i au cours du temps étant régie par les relations :

$$x_{i,0} \text{ donné} \quad , \quad x_{i,t+1} = f_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}) \quad \forall t \in \{0,\dots,T-1\} \ , \tag{5}$$

où $x_{i,t} \in \mathbb{R}$ représente l'état du système i à l'instant t et où $u_{i,t} \in \mathbb{R}$ représente la commande appliquée au système i à l'instant t. Notant $x_i = (x_{i,1},\dots,x_{i,T})$ et $u_i = (u_{i,0},\dots,u_{i,T-1})$, les contraintes dynamiques (5) associées au système i se mettent sous la forme vectorielle compacte suivante :

$$\Theta_i(x_i, u_i) = 0 \ , \tag{6}$$

avec $\Theta_i : \mathbb{R}^T \times \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^T$, chaque composante $\Theta_{i,t}$ de Θ_i correspondant à $f_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}) - x_{i,t+1} = 0$. Le coût de fonctionnement du système i à l'instant t est noté $C_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t})$, et on note $F_i(x_{i,T})$ le coût associé à l'état final du système à l'instant T. Le coût total du système i se met donc sous la forme :

$$J_i(x_i, u_i) = \sum_{t=0}^{T-1} C_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}) + F_i(x_{i,T}) \ . \tag{7}$$

À chaque pas de temps t et pour chaque système i, on dispose de commandes $y_{i,t} \in \mathbb{R}$ permettant d'effectuer une redistribution spatiale entre les systèmes. Cette répartition spatiale doit respecter une contrainte associée à la satisfaction d'une demande $d_t \in \mathbb{R}^S$ commune, et s'écrit :

$$d_t - \sum_{i=1}^{N} g_{i,t}(y_{i,t}, u_{i,t}) \leq 0 \ . \tag{8}$$

Notant $y^t = (y_{1,t},\dots,y_{N,t})$ et $u^t = (u_{1,t},\dots,u_{N,t})$,[4] la contrainte spatiale (8) associée au pas de temps t se met sous la forme compacte suivante :

$$\Omega^t(y^t, u^t) \leq 0 \ , \tag{9}$$

avec $\Omega^t : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^S$. Le coût de répartition du système i à l'instant t est noté $M_{i,t}(y_{i,t}, u_{i,t})$, et le coût total de répartition au pas de temps t est alors :

$$K^t(y^t, u^t) = \sum_{i=1}^{N} M_{i,t}(y_{i,t}, u_{i,t}) \ . \tag{10}$$

À l'aide des notations $u = (u_1,\dots,u_N) = (u^0,\dots,u^{T-1})$, $x = (x_1,\dots,x_N)$ et $y = (y^0,\dots,y^{T-1})$, le problème d'optimisation global s'écrit :

$$\min_{u,x,y} \quad \sum_{i=1}^{N} J_i(x_i, u_i) + \sum_{t=0}^{T-1} K^t(y^t, u^t) \tag{11a}$$

sous

$$\Theta_i(x_i, u_i) = 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,N\} \ , \tag{11b}$$

$$\Omega^t(y^t, u^t) \leq 0 \quad \forall t \in \{0,\dots,T-1\} \ . \tag{11c}$$

[4] On fera attention la double notation u_i et u^t sous forme de vecteurs (que l'on suppose écrits en ligne) que l'on associe aux commandes $u_{i,t}$. Notant $U = (u_{i,t}) \in \mathcal{M}(N,T)$ la matrice à N lignes et T colonnes associée aux commandes $u_{i,t}$, le vecteur u_i correspond à la i-ème ligne de la matrice U, alors que le vecteur u^t correspond à sa t-ème colonne :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {u^0}^\top & \dots & {u^{T-1}}^\top \end{pmatrix} \ ,$$

où $^\top$ représente l'opération de transposition.

On va utiliser la forme (11) du problème pour mettre en place des schémas de décomposition espace/temps, c'est-à-dire des algorithmes dans lesquels les contraintes (11b) couplantes en temps d'une part, et les contraintes (11c) couplantes en espace d'autre part, sont satisfaites à chaque itération pour certains des sous-problèmes apparaissant dans la décomposition. Pour cela, on introduit de nouvelles variables v qui ont pour objet de dupliquer les variables u. Les variables $u = (u_1, \dots, u_N)$ seront utilisées dans le sous-problème dit "temporel", c'est-à-dire celui où figurent des couplages en temps, mais pas en espace. Ce sous-problème "temporel" porte sur les variables (x, u), et les contraintes (11b) y sont donc considérées comme locales et donc entièrement traitées dans ce sous problème. Les variables $v = (v^0, \dots, v^{T-1})$ seront quant à elles utilisées dans le sous-problème dit "spatial", c'est-à-dire celui où se trouvent les couplages en espace, mais pas en temps. Le sous-problème "spatial" porte sur les variables (y, v), et les contraintes (11c) y sont considérées comme locales et donc entièrement traitées dans ce sous problème.

On introduit donc la contrainte supplémentaire $u - v = 0$.[5] Le problème peut alors être mis sous la forme :

$$\min_{u,v,x,y} \quad \sum_{i=1}^{N} J_i(x_i, u_i) + \sum_{t=0}^{T-1} K^t(y^t, v^t) \tag{12a}$$

sous

$$\Theta_i(x_i, u_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \ , \tag{12b}$$

$$\Omega^t(y^t, v^t) \leq 0 \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \ , \tag{12c}$$

$$u - v = 0 \ , \tag{12d}$$

où la seule contrainte couplant les problèmes en (x, u) et (y, v) est la contrainte (12d).

Question 1 — *Décomposition par les prix.*

Écrire la méthode de décomposition par les prix obtenue en dualisant la contrainte (12d).[6] Montrer que le sous-problème "temporel" en (x, u) se décompose lui-même en N sous-problèmes ne portant chacun que sur un seul système dynamique. De façon similaire, montrer que le sous-problème "spatial" en (y, v)) se décompose en T sous-problèmes ne portant chacun que sur un seul pas de temps. Écrire tous ces sous-problèmes en revenant aux variables et aux notations initiales données par les équations (5)–(7)–(8)–(10).

Question 2 — *Décomposition par les quantités.*

Écrire la méthode de décomposition par les quantités obtenue en traitant la contrainte (12d). Comme dans la question précédente, redécomposer le sous-problème "temporel" en N sous-problèmes et le sous-problème "spatial" en T sous-problèmes, chacun de ces sous-problèmes étant formulé dans les notations initiales.

Question 3 — *Décomposition par prédiction.*

Même question que précédemment pour la méthode de décomposition par prédiction dans laquelle on affecte la contrainte (12d) au sous-problème "spatial" en (y, v).

---

[5] Cette contrainte signifie que $u_{i,t} = v_{i,t}$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et pour tout $t \in \{0, \dots, T-1\}$. On ne peut bien sûr pas écrire d'égalité entre les vecteurs u_i et v^t...

[6] Notant $p^{(k)}$ le multiplicateur associé à la contrainte à l'itération k, on utilisera le fait que ce multiplicateur s'écrit de manière équivalente $(p_1^{(k)}, \dots, p_N^{(k)})$ et $(p^{0,(k)}, \dots, p^{T-1,(k)})$.